

APRENDER MATEMÁTICA, HACIENDO MATEMÁTICA: LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Guadalupe Xochitl Chávez Pérez, Ángel Homero Flores Samaniego, Adriana Gómez Reyes
Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM.; CECyT 13 IPN. (México)
matematica60_xch@hotmail.com, ahfs@unam.mx, orodelsilencio@yahoo.com.mx

Resumen

En el presente reporte damos cuenta de los resultados de un experimento de enseñanza cuyo propósito fue determinar el grado de comprensión del concepto de función cuadrática en estudiantes de nivel medio superior de la Ciudad de México. El experimento consistió en una serie de actividades que se trabajaron siguiendo el modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*; el análisis se centró en las Dimensiones Contenido y Acceso Equitativo al Contenido definidas en el marco de referencia TRU (Teaching for Robust Understanding: *Enseñanza para un Entendimiento Sólido*). Los avances en la comprensión del concepto se consignaron en una rúbrica.

Palabras clave: reconocimiento de patrones, generalización, funciones cuadráticas.

Abstract

This paper reports the outcomes of a teaching experiment whose objective was to determine the level of understanding of quadratic function concept in senior high school students in Mexico City. The experiment consisted of a series of activities developed under the teaching model *to learn mathematics doing mathematics*; the analysis focused on the Content and Equitable Access to Content Dimensions defined in the *Teaching for a Robust Understanding* framework. Advances in the understanding of quadratic function concept were recorded in a rubric.

Key words: pattern recognition, generalization, quadratic functions.

■ Introducción

En este artículo damos cuenta de algunos resultados obtenidos de un experimento de enseñanza (Steeffe y Thompson, 1999) cuyo propósito fue determinar el grado de comprensión del concepto de función cuadrática en estudiantes de nivel medio superior en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), perteneciente a la Universidad Nacional Autónoma de México (edades entre 14 y 18 años).

El estudio forma parte de una investigación educativa en el aula encaminada a la documentación de la eficacia de una serie de actividades. Nuestro objetivo es promover la comprensión del concepto de función matemática en bachillerato.

El concepto de función tiene un papel fundamental en el entendimiento de conceptos matemáticos que se estudian en cálculo, ecuaciones diferenciales y álgebra lineal, entre otras ramas de la matemática. Es muy importante en el uso de la matemática como un cuerpo de conocimiento que ayuda a explicar fenómenos a través del modelado (entendido como el proceso de creación de un modelo matemático que ayuda a entender un fenómeno, natural o no).

En experimentos anteriores (Chávez, Flores y Gómez, 2016), nos enfocamos en la promoción del entendimiento del concepto de función a través de la modelación matemática (uso del modelado matemático con fines educativos: se trata de una combinación de los términos *modelado* y *educación*). Dado que los resultados obtenidos no han sido óptimos, en esta ocasión integramos actividades de graficación y un juego de dominó. La hipótesis que subyace en nuestro razonamiento es que las actividades de modelado no son suficientes para entender el concepto de función y que es necesario incluir actividades y ejercicios de otro tipo. Otro de los factores que pueden estar influyendo en los resultados poco satisfactorios se refieren al tratamiento de las actividades en el aula, consideramos que durante su desarrollo debe haber un ambiente de aprendizaje propicio. Para determinar si el ambiente de aprendizaje es el adecuado se pondrá atención en las Dimensiones Contenido de la Materia y Acceso Equitativo al Contenido definidas en el marco conceptual de referencia *Enseñanza para un Entendimiento Sólido* (TRU, por sus siglas en inglés; Schoenfeld, 2016).

Así, los propósitos del presente experimento fueron:

- a. *Determinar el grado de comprensión del concepto de función cuadrática a través del desarrollo de una serie de actividades de modelado, graficación y conversión entre representaciones semióticas del concepto.*
- b. *Analizar las dimensiones Contenido de la Materia y Acceso Equitativo al Contenido.*

Lo anterior en el contexto del modelo de enseñanza-aprendizaje *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*.

■ Marco teórico

El experimento consistió en una serie de actividades que se trabajaron siguiendo el modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2007, 2010) que privilegia la resolución de problemas (principalmente a través de la modelación matemática) y el trabajo en equipo. Este modelo será considerado como nuestro marco teórico, y corresponde a una didáctica centrada en el aprendizaje cuyos cimientos se encuentran en:

- El pensamiento reflexivo que describe Rodgers (2002) como “un proceso de formación de significados que lleva al individuo de una experiencia a otra con un entendimiento más profundo de sus relaciones y sus conexiones con otras experiencias y otras ideas” (p. 845)
- En el planteamiento de que el aprendizaje depende del ambiente, de la mediación de las herramientas (Vigotsky, 1978) y de las acciones que desarrollan los estudiantes (Dewey, 1989). El aprendizaje es una actividad individual que se desarrolla en la convivencia social.

- La teoría de las Representaciones Semióticas de Duval (1995) que establece que que un objeto matemático tiene varias representaciones semióticas: la comprensión cabal de un concepto matemático se da cuando el individuo es capaz de hacer un tratamiento del concepto en todas sus representaciones, y tiene la habilidad de transferir el objeto matemático de una representación a otra.
- El Modelo Educativo del CCH, que promueve la autonomía del estudiante basándose en tres principios fundamentales: *Aprender a aprender*, *Aprender a hacer* y *Aprender a ser* (UNAM, 1971).

Así mismo, el análisis de los resultados se hará desde la perspectiva del marco de referencia TRU (Schoenfeld, 2016) que explica lo que sucede en el aula, con la intención de mejorar la enseñanza en búsqueda de un entendimiento sólido. Para esto el acontecer en el aula se divide en cinco dimensiones: Contenido de la Materia; Demanda Cognitiva; Acceso Equitativo al Contenido; Disponibilidad, Dominio e Identidad; y Usos de la Evaluación.

En particular, nos interesa el análisis en cuanto al Contenido y al Acceso Equitativo al Contenido. Schoenfeld (2016) define el *Dominio Contenido* como el grado en el que el contenido que abordan los estudiantes representa el mejor entendimiento disciplinario; los estudiantes deben tener oportunidades para aprender la matemática y las prácticas matemáticas importantes, y para desarrollar hábitos mentales productivos en el quehacer matemático. Mientras que el *Dominio Acceso Equitativo al Contenido* está definido como el grado en el que las estructuras de la actividad en el aula fomentan el involucramiento activo de todos los estudiantes de la clase con el contenido que se aborda.

■ Desarrollo experimental

El experimento de enseñanza estuvo conformado por una secuencia de ocho actividades sobre funciones cuadráticas cuya temática se abordó a través de resolución de problemas, graficación y conversión entre representaciones. El experimento se llevó a cabo en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), en cuatro grupos de primer semestre (15-16 años) del turno vespertino.

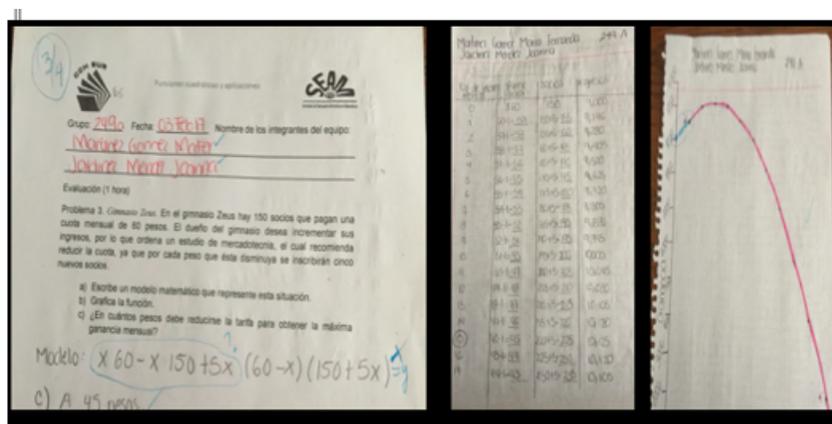


Figura 1. Hoja de trabajo sobre funciones cuadráticas. Fuente propia

Los alumnos consignaron los resultados en hojas de trabajo que analizamos por medio de listas de cotejo, matrices de resultados y bitácoras COL; los resultados de estos instrumentos se condensarán en una rúbrica sobre la comprensión del concepto de función cuadrática. Durante las actividades se propició el trabajo cooperativo con la formación de equipos pequeños que se abocaron al desarrollo de las actividades. Tuvo una duración de tres semanas, cinco horas por semana, distribuidas en dos sesiones de dos y una de una hora. La última hora fue utilizada para llevar a cabo actividades de evaluación. En la Figura (1) se muestra la hoja de trabajo de una de las actividades de evaluación.

En la Tabla 1 presentamos la rúbrica para determinar el grado de comprensión del concepto de función cuadrática (Flores y Gómez, 2009):

Tabla 1. Rúbrica de evaluación del concepto de función cuadrática. Fuente propia.

Rubros	Principiante	Intermedio	Avanzado
Concepto de función	Procedimiento que se realiza a través de una ecuación para resolver un problema y obtener su resultado.	Relación entre dos variables. Puede definir dominio, contradominio y regla de correspondencia, pero no con suficiente claridad.	Relación de dependencia entre dos variables, en la que a cada valor de la variable independiente, le asocia un único valor de la variable dependiente. Reconoce dominio, contradominio y regla de correspondencia
Variación	No reconoce la variación de la función, en relación con la variable independiente.	Reconoce la diferencia entre una variación lineal y la que no lo es, puede generalizar lo que no es lineal como cuadrática	Reconoce la diferencia entre una variación lineal, una variación cuadrática, y otras
Representación gráfica	No relaciona la parábola con la función cuadrática, puede distinguirla de la recta.	Reconoce la parábola vertical como representación de una función cuadrática, pero no reconoce los diferentes parámetros y su influencia.	Reconoce la parábola vertical como representación de una función cuadrática. Es capaz de reconocer los elementos de la parábola. Reconoce la influencia de los parámetros.
Representación algebraica	No reconoce la expresión algebraica correspondiente a una función cuadrática	Reconoce la función cuadrática en la forma general, pero no cuando está factorizada o en otra forma.	Puede reconocer la función en su forma general y en la forma estándar.
Representación tabular	No reconoce la variación en una tabla	Sabe que se puede obtener el tipo de variación mediante diferencias.	Reconoce la variación cuadrática en una tabla mediante las diferencias de las diferencias.
Tránsito entre una y otra representación	No reconoce una representación y otra como elementos de una misma función	Tiene algunos problemas para transitar de una función a otra. Es capaz de encontrar los ceros, pero no los relaciona con las raíces	Es capaz de transitar de un modelo a otro, y reconoce que pertenecen a la misma función. En particular relaciona las raíces de la gráfica con los ceros de la expresión algebraica
Modelación	No reconoce un modelo cuadrático cuando se le presenta.	Reconoce con ayuda, un modelo cuadrático en distintas situaciones	Reconoce el modelo cuadrático en distintas situaciones. Encuentra máximos y mínimos mediante las propiedades o elementos de la parábola.

En la Tabla 2 se presenta la rúbrica utilizada para evaluar las dimensiones TRU.

Tabla 2. Rúbrica para evaluar las dimensiones *Contenido* y *Acceso Equitativo al Contenido*. Adaptada de Schoenfeld (2016)

	Contenido ¿En qué medida el contenido que abordan los estudiantes representa el mejor entendimiento de la matemática?	Acceso Equitativo al Contenido ¿En qué medida el profesor mantiene el acceso del contenido de la lección para todos los estudiantes?
1	Las actividades de enseñanza no están enfocadas en el contenido propuesto y no tienen coherencia, se carece de oportunidades para involucrarse en prácticas clave de razonamiento y de resolución de problemas.	Hay un acceso diferenciado al contenido matemático, o una participación desigual en su desarrollo, y no se hacen esfuerzos para remediar esta situación.
2	Las actividades están principalmente orientadas hacia el desarrollo de habilidades, con someras conexiones entre procedimientos, conceptos y contextos y se da una mínima atención a prácticas matemáticas clave.	Hay un acceso o participación dispares, pero el profesor hace algunos esfuerzos para proporcionar acceso matemático a un número más amplio de estudiantes.
3	Las actividades dan apoyo a conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos (cuando sea apropiado) y proporcionan oportunidades para involucrarse en prácticas matemáticas clave.	El profesor apoya activamente una participación amplia y significativa de sus estudiantes y lo logra en gran medida; o lo que parecen ser estructuras establecidas en el ambiente de enseñanza-aprendizaje promueven dicha participación.

■ Resultados

En algunos casos los estudiantes llegan a la expresión correcta del modelo algebraico pero no la insertan en una relación funcional; muchos no llegan a la regla de correspondencia correcta. La mayoría presenta problemas para distinguir entre variable dependiente e independiente. Con respecto a las representaciones gráfica y algebraica, la mayoría reconocen cuándo se trata de una función cuadrática e identifican el vértice, las raíces o ceros de la función y su concavidad. Los estudiantes tienen problema para transitar de una representación a otra, sobre todo de la tabular a la algebraica. A pesar de que la mayoría reconoce un modelo cuadrático, sobre todo en sus representaciones algebraica y gráfica, no todos son capaces de determinar algebraicamente el máximo o mínimo de la función.

Con el análisis de la rúbrica sobre entendimiento del concepto de función cuadrática determinamos situar a los estudiantes, en su mayoría, en el nivel de comprensión intermedio, aunque es posible colocar a algunos en un nivel a medio camino entre el intermedio y el avanzado.

Por su parte, con respecto al *Dominio Contenido*, definido como el grado en el que el contenido que abordan los estudiantes representa el mejor entendimiento disciplinario, proporcionando a los estudiantes la oportunidad de aprender el contenido y las prácticas importantes de la materia, y de desarrollar hábitos mentales disciplinarios y productivos, la secuencia de actividades cubre por completo el contenido disciplinario y los aprendizajes propuestos en el programa oficial de la escuela en donde se aplicó. El análisis, entonces, debería hacerse tomando en cuenta qué tanto el programa de matemática cumple con

este Dominio. En un análisis somero, podemos decir que, a pesar de que se dice que el programa se centra en los aprendizajes del estudiante, el énfasis se pone en los contenidos y en estrategias de enseñanza (que no de aprendizaje). El problema con este programa es que no hubo una reflexión suficiente sobre qué es un aprendizaje y, en la mayoría de los casos se consignan procedimientos en vez de un aprendizaje. En la Figura 2 se muestra parte del programa.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
<ul style="list-style-type: none"> Expresa la función $y=ax^2 + bx + c$ en la forma estándar $y=a(x-h)^2+k$, usando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto. Además, interpreta el impacto de sus parámetros en el registro gráfico. Comprende los términos de concavidad, vértice, máximo, mínimo y simetría. 	<ul style="list-style-type: none"> La función $y=ax^2 + bx + c$ y sus propiedades gráficas. <ul style="list-style-type: none"> Simetría, concavidad, máximo o mínimo. Forma estándar $y=a(x-h)^2+k$ 	<ul style="list-style-type: none"> El profesor cuestiona a los alumnos sobre la simetría de la gráfica de las funciones cuadráticas, y su utilidad para determinar el valor máximo o mínimo y las coordenadas del vértice. El profesor plantea a sus alumnos la actividad de transformar una función cuadrática a la forma $y=a(x-h)^2+k$ y analizar su utilidad para determinar las características analíticas y gráficas de la función.
Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.	Problemas de aplicación.	El profesor resalta la importancia de los métodos algebraicos en la resolución de problemas de optimización en diversos contextos, por ejemplo, numéricos, de áreas, costos y ganancias.

Figura 2. Parte del programa de la Unidad 2. Funciones cuadráticas y su aplicación. CCH (2016).

Como las actividades se ciñen a este programa, consideramos que se pueden colocar en el nivel dos de la rúbrica correspondiente (Tabla 2).

Para observar en qué medida el profesor mantiene el acceso del contenido para todos los estudiantes, la información de las bitácoras resulta de utilidad. Por ejemplo, tenemos el caso de dos compañeros estudiantes: el estudiante A indicó desde el inicio del curso que las matemáticas le cuestan mucho trabajo y “no sabe nada”, mientras que la estudiante B es muy hábil, y le gusta apoyar a sus compañeros; se les recomendó que trabajaran juntos (aunque tenían la libertad de asociarse con quién ellos quisieran). Al final del curso la estudiante B consignó en una de sus reflexiones: “Creo que una de las cosas más importantes es aprender a trabajar en equipo, me sentí muy bien, sentí que las cosas que aprendí las aprendí por mí misma”. Mientras que el estudiante A mencionó que lo importante fue “...entender más las matemáticas, subir el nivel en una materia que casi no entendemos, [...] superar mis metas paso a paso...”. Estos comentarios son muestra de cómo el trabajo en equipo, en particular con dos estudiantes en situaciones muy diferentes, es de utilidad para que el estudiante sienta que está aprendiendo y tenga la oportunidad de acceder al conocimiento. La propuesta de la profesora puede ser un factor que ayudó a lograr un acceso equitativo, sin embargo, a pesar de éstas y otras muestras similares, se tiene la convicción de que los esfuerzos no son suficientes, pues se tiene la impresión de que algunos estudiantes no tuvieron el mismo acceso, entre otras cosas, por falta de motivación.

De acuerdo con la rúbrica de la Tabla 2, se llegó a la conclusión de que la Dimensión Acceso Equitativo quedó en el Nivel 2: *hay un acceso o participación dispares, pero el profesor hace algunos esfuerzos para proporcionar acceso matemático a un número más amplio de estudiantes.*

■ Conclusiones

Consideramos que los avances en ambos aspectos de la investigación, grado de comprensión del concepto de función cuadrática, y la atención a los dominios Contenido de la Materia y Acceso Equitativo al Contenido, son insuficientes con respecto a las expectativas que se tenían al inicio de la puesta en práctica. No tenemos certeza de las causas de estos resultados, pero es posible aventurar algunas hipótesis que podrían determinar la dirección de nuestra investigación:

- Es necesario redefinir los aprendizajes planteados en el programa de acuerdo con una concepción puntual sobre el término aprendizaje y, a partir de esto, determinar las actividades y las estrategias a seguir, dando un papel central al estudiante en las estrategias de aprendizaje sugeridas.
- El tiempo para tratar funciones cuadráticas es insuficiente (15 horas) falta tiempo para la reflexión. Una posible solución sería integrar la unidad anterior a ésta, Ecuaciones Cuadráticas, y diseñar actividades que cubran ambas temáticas de manera simultánea.
- Se ha descuidado el ambiente en el aula, en el sentido de que se sigue poniendo más énfasis en la enseñanza que en el aprendizaje (esto también se manifiesta en las estrategias sugeridas en el programa). Es necesario hacer una reflexión más profunda sobre este tema y diseñar ambientes de aprendizaje mejores en los que se garantice el acceso equitativo al contenido.

■ Referencias Bibliográficas

- CCH, (sf). *Misión y filosofía*. Recuperado el 30 de septiembre de 2017 de <http://www.cch.unam.mx/misionyfilosofia>.
- Chávez, G. X., Flores, A. H. y Gómez, A. (2016). Modelación Matemática en el Desarrollo de Funciones Lineales y Variación Directamente Proporcional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 29, 634-642.
- Dewey, J. (1989) *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona: Paidós.
- Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.
- Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. (2016). *Programas de Estudio Área de Matemáticas: Matemáticas I a IV*. México: UNAM.
- Flores, A. H. (2007). Aprender Matemática Haciendo Matemática: modelo de enseñanza centrado en el estudiante. *Acta Scientiae*, 9(1), 28-40.
- Flores, A. H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model. *Educação Matemática e Pesquisa*, 12(1), 75-87.
- Flores, A. H. y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*. 21(2), 117-142.
- Rodgers, C. (2002). Defining Reflexion. *Teachers College Record*, 104(4), 842-866.

- Schoenfeld, A. H., & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Recuperado el 18 de enero de 2017 de <http://map.mathshell.org/trumath.php>
- Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. En Kelly, A y Lesh, R. (eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Vigotsky, L. S. (1978). *Mind in Society, The development of Higher Psychological Processes*. Massachusetts: Harvard University Press.