CONJETURAS GEOMÉTRICAS Y GEOGEBRA

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
eadvincula@pucp.edu.pe

Resumen
En el presente taller resolveremos problemas que involucran la realización de construcciones geométricas, usando el GeoGebra como medio para estimular la exploración y el descubrimiento de propiedades. Nuestro objetivo es analizar el papel del GeoGebra en la elaboración y verificación de conjeturas, y en la generalización de propiedades cuando los participantes resuelven problemas geométricos. Nuestras actividades han sido diseñadas tomando en cuenta aspectos de la teoría de Van Hiele (1957) y del enfoque instrumental de Rabardel (1995). Finalmente, nos interesa promover una reflexión entre los docentes participantes acerca del uso del GeoGebra en la resolución de problemas geométricos.

Palabras clave: conjeturas, GeoGebra

Abstract
In this workshop we will solve problems that involve the development of geometric constructions using GeoGebra as a means to stimulate the exploration and discovery of properties. It is aimed at analyzing the role of GeoGebra in the elaboration and verification of speculations and in the generalization of properties while the participants solve geometric problems. Our activities have been designed taking into account the aspects of the theory of Van Hiele (1957) and the instrumental approach of Rabardel (1995). Finally, we want to encourage participating teachers to reflect on the use of GeoGebra to solve geometric problems.

Key words: conjectures, GeoGebra

Antecedentes

Este trabajo surge al observar las dificultades que presentan nuestros estudiantes cuando resuelven problemas de geometría. Generalmente, tienen dificultades para realizar construcciones geométricas así como para identificar las propiedades necesarias para cada problema. Por ello consideramos que es muy importante crear espacios donde los estudiantes tengan la posibilidad de explorar y manipular los objetos geométricos con el fin de descubrir sus propiedades, así como elaborar y validar sus conjeturas. En este sentido, coincidimos con Álvarez, Ángel, Carranza y Soler-Álvarez (2014) cuando señalan que la actividad matemática debe estar en pro de la producción y validación de conjeturas, generalidades, proposiciones, entre otros procesos que potencien el pensamiento matemático.

Consideramos que debemos promover espacios para que los estudiantes elaboren sus conjeturas y las verifiquen o validen desde la educación básica regular, pero para ello es necesario que los docentes estén conscientes de la importancia que tienen estos procesos en el desarrollo de otros procesos como la demostración matemática, y en general, en el desarrollo de habilidades matemáticas. Al respecto, Marmolejo y Moreno (2011) señalan que la demostración es un proceso que produce razonamientos matemáticos, pero al desarrollarla surge la necesidad de explicar, argumentar, conjeturar, probar y razonar de manera deductiva.

Por otro lado, consideramos que debemos incorporar el uso del *software GeoGebra* en las actividades de exploración y elaboración de conjeturas, debido al dinamismo y flexibilidad que este presenta para realizar construcciones geométricas y modificaciones inmediatas a las mismas, facilitando así la visualización, el descubrimiento de características propias de cada objeto geométrico y el reconocimiento de propiedades invariantes en los objetos geométricos involucrados (Madama y Curbelo, 2012).

Por todo lo mencionado, nuestro taller está dirigido a profesores de Matemática de educación secundaria por dos razones. La primera es que actualmente todo docente requiere desarrollar competencias tanto matemáticas como digitales para el desarrollo exitoso de su práctica docente. La segunda es que todo docente debe promover el desarrollo del pensamiento geométrico en sus estudiantes y en este sentido el *GeoGebra* es una herramienta muy útil pues permite explorar; descubrir; elaborar, refutar y verificar conjeturas; encontrar contraejemplos; comprobar propiedades y realizar generalizaciones.

Enfoque teórico

En nuestro trabajo consideramos aspectos de la teoría de Van Hiele (1957) y del enfoque instrumental de Rabardel (1995). El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (1957) nos parece pertinente ya que en su propuesta considera que tanto las deducciones informales como las formales son fundamentales en el desarrollo del pensamiento geométrico de una persona. Consideramos que en el nivel 3 de razonamiento geométrico de Van Hiele, deducciones informales, se encuentran la elaboración y verificación de conjeturas, ya que en este nivel se propone el descubrimiento de propiedades y la comprensión de definiciones geométricas. Asimismo, para trabajar conjeturas y validaciones con los estudiantes, creemos que primero debemos trabajar estos procesos con los profesores para que luego ellos estimulen a sus estudiantes y promuevan el desarrollo de habilidades geométricas.

Por otro lado, el enfoque de Rabardel (1995), también nos parece pertinente ya que nos permitirá analizar las acciones de los participantes e identificar los esquemas de utilización que construyen y movilizan cuando interactúan con el *GeoGebra* al resolver problemas geométricos, y elaborar y verificar conjeturas. Es decir, nos permitirá analizar la génesis instrumental que se da cuando el *GeoGebra* se transforma de artefacto a instrumento y los procesos de instrumentalización e instrumentación que forman parte de este proceso.

Metodología y diseño de actividades

Nuestro trabajo sigue una metodología cualitativa pues nos interesa profundizar en la problemática y describir detalladamente los aspectos que nos interesan. En nuestro trabajo no interesa describir como los estudiantes resuelven problemas geométricos, elaborando conjeturas relacionadas con propiedades geométricas, a partir de la exploración y manipulación de objetos geométricos, y luego verificándolas o validándolas, apoyados con el *software GeoGebra.*

Este taller se desarrollará en dos sesiones y en un laboratorio de computación. En cada sesión tendremos, en primer lugar, un trabajo individual y luego una discusión grupal para intercambiar estrategias de solución y diversos modos de validación de conjeturas.

A continuación mostramos los problemas diseñados para ser trabajados con docentes de Matemática, tanto de nivel secundario como superior.

Problema 1

En un cuadrado $ABCD$ inscriba otro cuadrado $MNPQ$ de modo que sus vértices M, N, P y Q pertenezcan a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente.

a) ¿Es posible construir un cuadrado $MNPQ$ con la condición dada? Justifique su respuesta.
b) Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, indique si la solución es única o muestre todas las soluciones posibles. Explique.

Problema 2

En un triángulo rectángulo ABC, sobre la hipotenusa $\overline{AC}$se ubica un punto P. Luego se traza$\overline{PI}$ perpendicular a $\overline{AB}$(I en $\overline{AB}$) y $\overline{PJ}$ perpendicular a $\overline{BC}$ (Jen $\overline{BC}$).

a) Determine la posición del punto P de modo que la longitud de $\overline{IJ}$ sea mínima. Justifique su respuesta.
b) ¿Para cuántas posiciones del punto P la longitud de $\overline{IJ}$no es mínima?
c) Escriba una conjetura relacionada con esta situación y verifíquela.

Problema 3

En un cuadrilátero $ABCD$, se ubican los puntos medios M, N, P y Q de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente.

a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es $MNPQ$? Justifique.
b) ¿Existe alguna relación entre las áreas de las regiones $ABCD$ y $MNPQ$? Explique.
c) ¿Es posible que $MNPQ$ sea un rectángulo? Si es posible, determine qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$. Justifique.
d) ¿Es posible que $MNPQ$ sea un rombo? Si es posible, determine qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$. Justifique.
e) Escriba una conjetura relacionada con esta situación y verifíquela.

Problema 4

En un cuadrado $ABCD$ inscriba un triángulo equilátero de modo que uno de sus vértices coincida con uno de los vértices del cuadrado y los otros dos pertenezcan a dos lados de dicho cuadrado.

a) ¿Es posible realizar esta construcción? De ser el caso, muestre todas las soluciones posibles. Justifique su respuesta.
b) Escriba una conjetura relacionada con esta situación y verifíquela.

A continuación mostramos algunos resultados obtenidos al trabajar los dos primeros problemas en el taller realizado en la Relme 31, con docentes de educación secundaria y de educación superior.

Algunos resultados

A modo de ejemplo, mostramos algunos resultados obtenidos en el taller realizado con docentes de Matemática, durante la Relme 31. En este taller trabajamos los dos primeros problemas propuestos tanto con docentes de educación secundaria como con docentes del nivel superior.

En el primer problema, observamos que los docentes tuvieron dificultades para determinar si el problema tenía una o más soluciones. La mayoría de docentes ubicó los vértices M, N, P y Qen los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$; y concluyó que esta era la única solución, tal como podemos ver en la siguiente figura:

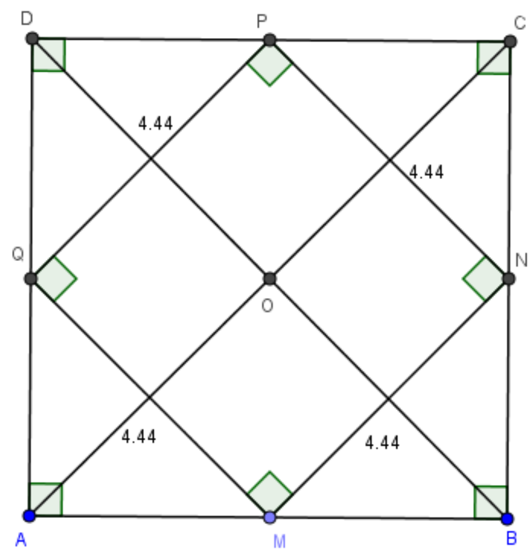

Figura 1. Respuesta de un docente al problema 1. (Elaboración propia)

Podemos afirmar que a pesar de contar con el *GeoGebra* como herramienta de apoyo, los docentes no lograron determinar más de una solución. Otra solución encontrada fue hacer coincidir los vértices de ambos cuadrados de modo que $ABCD$sea congruente $MNPQ$.

Algunos docentes sospechaban que había más soluciones, pero no lograron identificarlas. Esto último pone en evidencias que los docentes no estaban instrumentalizados con el *GeoGebra* y tampoco con el concepto de cuadrado. También, podemos comentar que los docentes no estaban familiarizados con la resolución de problemas que incluían más de una solución o con la resolución de problemas que implicaban la elaboración de una conjetura que debían validar para dar su respuesta.

En el segundo problema, observamos que los docentes tuvieron dificultades para responder al ítem a) pues no estaban instrumentalizados con el concepto de rectángulo, específicamente con las diagonales de un rectángulo, las cuales son congruentes. En este caso, observamos que algunos docentes si estaban instrumentalizados con el *GeoGebra* pues usaban adecuadamente las herramientas de arrastre y de medidas, de distancia o longitud, para comprobar sus conjeturas respecto a segmentos congruentes como eran los lados paralelos del rectángulo construido donde $\overline{IJ}$ era una de sus diagonales. A continuación mostramos la construcción geométrica de un docente.

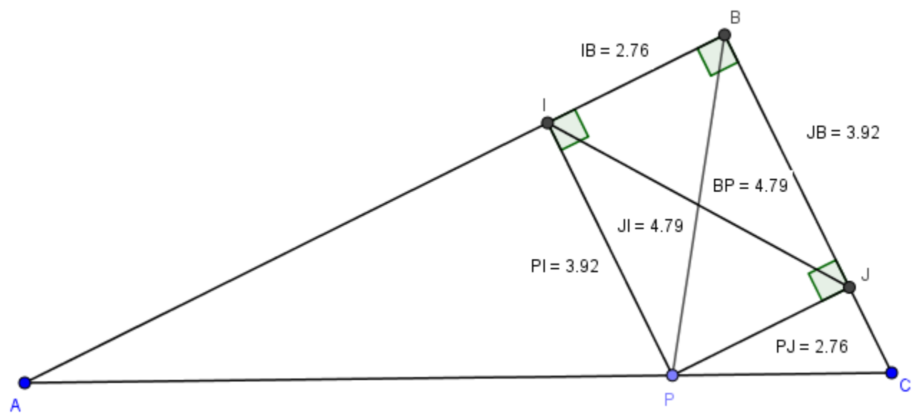

Figura 2. Construcción geométrica de un docente al problema 2. (Elaboración propia)

Consideraciones finales

A modo de conclusión, podemos mencionar que el uso del *GeoGebra* en la resolución de problemas geométricos permite la realización de construcciones geométricas dinámicas e interactivas, que pueden ser modificadas de manera casi inmediata, lo cual facilita el desarrollo del pensamiento geométrico. Asimismo, podemos afirmar que el *GeoGebra* ayuda a los participantes a explorar y descubrir propiedades geométricas, así como elaborar y verificar conjeturas, lo cual contribuye con el desarrollo de otros procesos como la demostración y la argumentación.

Por otro lado, en observaciones realizadas anteriormente con profesores de Matemática de educación secundaria encontramos que algunos presentan dificultades para apropiarse de las herramientas que ofrece el *GeoGebra,* y otros, dificultades para validar o justificar sus conjeturas. Por ello, en nuestro taller reflexionaremos sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría con apoyo del *GeoGebra*.

Las actividades diseñadas para ser trabajadas con apoyo del *GeoGebra* permitirán generar espacios donde los participantes puedan construir figuras, explorar y descubrir relaciones y propiedades geométricas, identificar las condiciones necesarias para resolver problemas, elaborar y validar conjeturas, justificar y argumentar sus soluciones y procedimientos utilizados.

Referencias bibliográficas

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. & Soler-Álvarez, M. (2014). Actividades matemáticas: Conjeturar y argumentar. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 75-90.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Gutiérrez, A. (2001). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. http://www.altascapacidades.org/uploads/6/3/7/5/6375624/ensenanza_aprendizaje_geometria.pdf Consultado 20/02/2017

Madama, M. & Curbelo, M. (2012). Visualizar, Conjeturar y demostrar utilizando el *software GeoGebra. Acta de la Conferencia Latinoamericana GeoGebra,* 109-116.

Marmolejo, E., & Moreno G., (2011) Argumentar-Conjeturar: Introducción a la Demostración. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa CLAME, 24, 509-516.

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías*. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

Vargas, G. & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947762005 Consultado 12/03/2017