

## ECOLOGIA DO ENSINO DO CONCEITO DE FATORAÇÃO NUMÉRICA E ALGÉBRICA ENTRE AS DÉCADAS DE 1960 A 2010

Míriam do Rocio Guadagnini, Marlene Alves Dias, Valdir Bezerra dos Santos Júnior, Renato da Silva Ignácio

UNIAN. UNIAN. UFPE. UFCG. (Brasil)

miriamguadagnini@hotmail.com, maralvesdias@gmail.com, valdir.bezerra@gmail.com, renatosignacio@gmail.com

### Resumo

Apresentamos parte de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da fatoração numérica e algébrica, especificamente, o estudo da ecologia do seu ensino entre as décadas de 1960 a 2010. No referencial teórico da pesquisa, optamos pelas noções de praxeologia e ecologia, segundo Chevallard, que conduziram à metodologia da pesquisa documental, por meio da análise de livros didáticos das décadas consideradas. Os resultados mostram uma ecologia bastante estável, se desconsiderarmos a década de 1960, pois praxeologias privilegiadas nas décadas posteriores estão centradas no uso de técnicas e situações contextualizadas que refletem apenas uma nova vestimenta, que não a torna uma real situação de contexto.

**Palavras-chave:** fatoração, ecologia, praxeologia, álgebra

### Abstract

We report partial results of a research on the teaching and learning process of numerical and algebraic factorization, specifically, the study of the ecology of its teaching between the decades of 1960 and 2010. As the theoretical framework of the research, we chose the notions of praxeology and ecology, according to Chevallard, which led to the methodology of documentary research, through the analysis of textbooks of the decades already mentioned. The results show a fairly stable ecology if we disregard the 1960s, because privileged praxeologies in the later decades are centered on the use of contextualized techniques and situations that reflect only a new appearance, which does not make it a real context situation.

**Key words:** factorization, ecology, praxeologies, algebra

## ■ INTRODUÇÃO

Este estudo tem o objetivo de compreender quais noções associadas ao conceito de fatoração numérica e algébrica desaparecem ou sobrevivem nas propostas institucionais de ensino deste conceito no Ensino Fundamental anos finais (alunos entre 11 e 14 anos) no Brasil, ou seja, estudamos a ecologia associada

ao ensino da noção de fatoração na escola básica brasileira a partir da análise dos livros didáticos das décadas de 1960, 1970 e 2010.

Para isso, escolhemos como referencial teórico da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático, em particular, as noções de ecologia dos saberes e praxeologia. Ainda consideramos os níveis inferiores de codeterminação didática, abordados por Chevallard (2002), que apontam o caminho para examinar o modo como poderão ser/estar organizados os conteúdos matemáticos e o papel do professor e do estudante nessa organização.

A metodologia adotada é a da pesquisa documental à luz dos ensinamentos de Lüdcke e André (2013). Escolhemos, para a análise, um livro de cada década, o que justificamos por meio da afirmação de Lages Lima *et al.* (2006) que observam que, em geral, o professor dispõe apenas do livro didático adotado, uma vez que os outros existentes no mercado diferem muito pouco entre si.

Os resultados mostram um ensino que sofre pequenas modificações, se desconsideramos a década de 1960, pois nas décadas posteriores, o ensino é centrado na memorização de técnicas e aplicação em situações contextualizadas, que representam apenas uma nova forma de revestir as técnicas consideradas, fazendo pouco uso de situações de contexto reais apenas durante as seis décadas consideradas.

Na sequência, apresentamos brevemente o referencial teórico que sustenta nossas análises.

### ■ Noções da teoria antropológica do didático (TAD)

Chevallard (1992), após introduzir os elementos primitivos da TAD, a saber: objeto (O), pessoa (X) e instituição I, define as noções de relação institucional e pessoal ao objeto O.

Assim, um objeto O existe para uma pessoa X, se esta tem uma relação pessoal  $R(X,O)$ , ou seja, uma relação que corresponde ao conjunto de interações que X pode ter com O, no sentido de poder manipular, utilizar, falar de, sonhar com, etc. Isto define a maneira como a pessoa X conhece O.

Para Chevallard (1992), o par formado pelo indivíduo X e o sistema de relações pessoais  $R(X,O)$  definem uma pessoa. Este sistema de relações pessoais evolui, uma vez que objetos que não existiam passam a existir, outros deixam de existir e assim a relação pessoal de X muda. Nesta evolução, o invariante é o indivíduo e o que muda é a pessoa, ou seja, esta modificação da relação pessoal do indivíduo X com o objeto O representa a aprendizagem.

A relação institucional ao objeto O é definida por Chevallard (1992) como uma restrição para a relação de uma pessoa com o mesmo objeto O, quando esta se torna sujeito de uma instituição I. A relação institucional depende da posição p que o objeto O ocupa em I, indicada por  $R_I(p,O)$ . Desta forma, a pessoa X é o emergente de um complexo de sujeições institucionais. As noções de relações institucional e pessoal são ferramentas que nos possibilitam identificar o que o indivíduo ou a instituição são capazes de fazer com o objeto O.

Para descrever a relação institucional associada a um saber, observando que este tem um prestígio cultural para certos objetos, Chevallard (1999) introduz a noção de praxeologia, que corresponde a um

modelo para descrever o conhecimento matemático, situando a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Assim, a noção de praxeologia, segundo Chevallard (1999), é ampla, pois toda atividade humana pode ser analisada por meio desta noção, como por exemplos: calcular o valor de uma equação, um gráfico, arrumar uma mesa.

Assim, para Chevallard, uma praxeologia corresponde aos tipos de tarefas ( $T$ ) que, para serem executadas, necessitam de uma maneira de fazer, denominada técnica ( $\tau$ ). A associação entre tarefa-técnica é definida como um saber fazer, a qual necessita de uma tecnologia ( $\theta$ ), um discurso racional que justifica e torna a técnica compreensível, e de uma teoria ( $\Theta$ ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada, resultando na associação tecnológico-teórico, que corresponde ao saber. O sistema composto por tipo de tarefa ( $T$ ), técnica ( $\tau$ ), tecnologia ( $\theta$ ) e teoria ( $\Theta$ ), constitui o que Chevallard denomina praxeologia, indicado por  $[T, \tau, \theta, \Theta]$ . Por exemplo, reconhecer no tipo de tarefa “simplificar uma fração algébrica” que uma técnica a utilizar é: reduzir termos semelhantes, sabendo justificar essa operação por meio da tecnologia que corresponde a reconhecer as propriedades da adição e multiplicação de polinômios que, por sua vez, será justificada pela teoria algébrica associada à estrutura de anel do conjunto dos polinômios em  $\mathbb{R}$ .

Observamos ainda que a análise da ecologia dos saberes considerados pode ser realizada à luz dos diferentes níveis de codeterminação didática. Para Chevallard (2007), os níveis de codeterminação descrevem as relações recíprocas entre os diferentes níveis do sistema didático e são representados da seguinte forma: tópicos  $\leftrightarrow$  temas  $\leftrightarrow$  setores  $\leftrightarrow$  domínios  $\leftrightarrow$  disciplinas  $\leftrightarrow$  pedagogia  $\leftrightarrow$  escola  $\leftrightarrow$  sociedade  $\leftrightarrow$  civilização  $\leftrightarrow$  humanidades. Em geral, os níveis superiores são: escola, pedagogia e disciplina, os quais ficam sob a responsabilidade da política e da noosfera disciplinar e algumas vezes fazem parte de uma reflexão crítica de professores, enquanto os níveis inferiores, a saber: domínios, setores, temas e tópicos, deveriam integrar os conhecimentos de todos os professores, de modo que eles pudessem explicitar as diferentes funções de um mesmo objeto matemático em seus possíveis habitats, que equivale ao lugar onde vivem esses objetos. Por exemplo, a fatoração de polinômios aplicada à determinação das raízes de uma equação do segundo grau.

Ressaltamos aqui a importância de o professor identificar setores e domínios, pois, conforme Chevallard (2002), um trabalho centrado apenas sobre tópicos e temas pode conduzir à falta de motivação para o estudo proposto. No caso da fatoração, observamos que as aplicações que motivam sua utilização, em geral, encontram-se nos níveis setores e domínios, como o exemplo de sua aplicação no estudo de equações do segundo grau.

## ■ Metodologia

Como já anunciado na introdução, trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujo método é o da pesquisa documental, consoante Lüdke e André (2013), pois nossas fontes são escritas e, portanto, utilizamos a técnica de análise de documentos retrospectivos e contemporâneos, a saber: livros didáticos, que são materiais habitualmente usados por professores e estudantes.

A partir da justificativa de Lages Lima et al. (2006), consideramos o livro didático como objeto de análise, uma vez que nele podemos identificar as possíveis praxeologias que sobrevivem atualmente nas escolas brasileiras.

Isso nos conduziu a analisar a obra de Dante (2012) para o Ensino Fundamental anos finais, que representa uma proposta de ensino de Matemática avaliada e distribuída pelo Ministério da Educação, sendo a de maior alcance nacional, pois tem sido indicado desde o ano 2000 pelo Programa Nacional do livro Didático (PNLD).

Em relação às obras anteriores, analisamos a obra de Sangiorgi (1965, 1966), que foi a mais utilizada na época e para as décadas de 1970 até 1990, a coleção de Castrucci *et al.* (1976), que representa a transição entre a Matemática moderna e o momento em que se privilegia o desenvolvimento de técnicas visando à formação do indivíduo para trabalhar na indústria.

As análises foram feitas a partir dos questionamentos: *Quais são os tipos de tarefas privilegiadas nas décadas consideradas? Quais as técnicas e tecnologias que permanecem ou desaparecem? Quais as semelhanças e diferenças entre as abordagens utilizadas nas obras? Quais tipos de tarefas indicam as aplicações do conhecimento sobre fatoração? Como elas estão tratadas nos livros didáticos considerados?*

### ■ Resultados das análises ecológica e praxeológica

A análise ecológica dos livros didáticos tem por objetivo localizar os habitats, ou seja, o lugar onde vivem os objetos matemáticos considerados, e nichos, que correspondem à função que esses objetos ocupam em cada habitat para o objeto fatoração.

Para tanto, interpretamos os sumários e a estrutura dos livros didáticos, considerando os níveis inferiores de codeterminação didática: domínio, setor, tema e tópicos. Isso nos auxiliou a compreender o habitat e o nicho proposto nas três épocas aqui focalizadas.

Assim, associamos a introdução de um conceito ao domínio, especialmente representado pelo conjunto numérico; as noções a ele associadas inserem-se no setor de estudo, no qual podemos identificar diferentes temas e tópico. Para a fatoração numérica, foram observados os seguintes resultados.

### ■ Fatoração numérica

Na obra de Sangiorgi (1965), atual sexto ano do Ensino Fundamental (alunos de 11 anos), a fatoração numérica é introduzida no domínio dos conjuntos numéricos, no setor dos números inteiros, suas operações e propriedades, para o qual são desenvolvidos os temas: número um; números primos; números compostos e a fatoração completa, mostrando que esta é uma propriedade dos números naturais. Na sequência, são propostas as praxeologias associadas aos tipos de tarefas: T1: Decompor um número em fatores primos; T2: Determinar os divisores primos de um número dado; T3: Determinar os divisores de números dados; T5: Escrever o máximo divisor comum (m.d.c.) de números dados; T6: Aplicar o m.d.c. para resolver uma situação contextualizada; T7: Determinar os múltiplos de um número

dado; T9: Escrever o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de números dados; T10: Aplicar o m.m.c para resolver situação contextualizada; T11: Verificar se números dados são “amigos” e “perfeitos”. Ainda no setor números inteiros, são introduzidos os temas máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

O habitat da fatoração numérica constitui-se de conjuntos numéricos. A proposta da época da Matemática moderna é o estudo das estruturas algébricas. Nessa perspectiva, observamos que o nicho significava considerar as propriedades da estrutura correspondente.

O livro didático de Castrucci *et al.* (1976) foi publicado à época em que o ensino proposto era centrado no desenvolvimento das técnicas associadas aos diferentes objetos matemáticos. Em nossa análise, verificamos que a fatoração numérica era introduzida no sexto ano do Ensino Fundamental, no domínio dos conjuntos numéricos, no setor do conjunto dos números naturais para os temas: sistema de numeração, operações fundamentais e divisibilidade sem explicitação da estrutura algébrica; assim a fatoração numérica correspondia a um tópico do setor divisibilidade, ou seja, tanto a fatoração como o m.d.c. e o m.m.c. eram introduzidos por meio do tópico números primos, que também integrava o setor divisibilidade, o que mostra o caráter técnico impimido a essas noções.

As praxeologias privilegiadas são associadas aos tipos de tarefas: T1, T2, T3, T5, T7 e T9, sendo que o habitat da fatoração numérica está inserido no setor dos números naturais e seu nicho estava associado ao tema divisibilidade para dar suporte aos critérios de divisibilidade, uma prática que propiciava decidir rapidamente por meio do cálculo mental se um número era ou não divisível por outro, o que evidencia a proposta de desenvolvimento técnico do ensino daquela época.

Na obra de Dante (2012), voltada para o 6º ano do Ensino Fundamental, a fatoração numérica está localizada no domínio dos conjuntos numéricos para o setor dos números naturais, considerada no tema dos divisores e múltiplos de números naturais. Assim como a fatoração, o m.d.c. é um tópico que faz parte do tema “divisores e número primo”, onde também encontramos o tópico Crivo de Eratóstenes e a decomposição de um número natural em fatores primos. Já o m.m.c. é um tópico do tema múltiplos de um número natural.

O autor considera ainda o tópico problemas envolvendo m.d.c. e m.m.c., enfatizando que é necessário aplicar estes conceitos propondo situações-problema, em geral, com um viés de contextualização cotidiana, o que difere da obra de Sangiorgi (1965), na qual as situações-problema se referiam ao contexto da Matemática.

As praxeologias privilegiadas estão atreladas aos tipos de tarefas: T1, T2, T3, T4: Determinar a soma dos divisores de um número; T5, T6, T7, T8: Representar genericamente a sequência dos múltiplos de um número natural, T9, e T10. Destacamos que o habitat da fatoração numérica é o domínio dos números naturais, tendo como nicho a noção de números primos. Sua proposta evidencia o momento vivido pela educação, para a qual se tem a preocupação de contextualizar uma técnica para proceder à resolução de problemas.

## ■ Fatoração algébrica

A fatoração algébrica na obra de Sangiorgi (1966), atual oitavo ano do Ensino Fundamental (alunos 13 anos), é introduzida no domínio dos conjuntos dos polinômios com coeficientes reais, mais particularmente no setor “cálculo algébrico e estudo de polinômios”, no qual são desenvolvidos os temas referentes às técnicas de cálculo algébrico, como adição, subtração, multiplicação e divisão de expressões literais e apresentação da estrutura de anel para os conjuntos dos polinômios. Na sequência, o autor considera os tópicos associados às técnicas usuais de multiplicação, denominados “produtos notáveis”, cubos e multiplicações usuais de binômios, com o objetivo de mostrar as expressões algébricas equivalentes, estabelecendo assim a relação entre fatoração e desenvolvimento. Para o tópico simplificação de expressões literais, são destacadas as técnicas: colocar o fator comum em evidência, diferença de dois quadrados, quadrado da soma ou da diferença de dois números, expressão da forma  $x^2 + (a + b)x + ab$ , todas obtidas por meio da multiplicação, o que conduz ao tópico simplificação de frações literais como aplicação dos tópicos anteriores.

As praxeologias privilegiadas estão associadas aos tipos de tarefas: o autor, para tratar da fatoração algébrica, desenvolve os seguintes tipos de tarefas T12: Desenvolver um dos casos de produto notável; T15: Colocar o fator comum em evidência; T16: Colocar o fator comum em evidência e agrupar os termos; T17: Reconhecer um trinômio quadrado perfeito e escrever na forma fatorada da soma ou da diferença de quadrados; T18: Escrever uma diferença entre dois quadrados como produto da soma pela diferença; T19: Calcular o quadrado de um número natural qualquer, utilizando produtos notáveis e fatoração; T20: Simplificar frações algébricas; T22: Fatorar expressão da forma  $x^2 + (a + b)x + ab$ ; T26: Indicar por meio de expressões algébricas o perímetro e a área de figuras planas ou sólidos geométricos (paralelepípedo); T28: Aplicar fatorações sucessivas.

Para a obra de Sangiorgi (1966), o habitat da fatoração algébrica situa-se no domínio dos conjuntos dos polinômios com coeficientes reais e seu nicho equivale a mostrar as propriedades estruturais do conjunto dos polinômios, associando às propriedades do conjunto dos números reais.

Na obra de Castrucci *et al.* (1976), a fatoração algébrica é trabalhada no atual oitavo ano do Ensino Fundamental, no domínio dos polinômios com coeficientes reais, no setor cálculo algébrico e estudo dos polinômios, no qual são desenvolvidos os temas associados às técnicas de reconhecimento e cálculo com: expressões literais ou algébricas, polinômios, produtos notáveis, fatoração, m.d.c. e m.m.c. e frações algébricas.

As praxeologias privilegiadas estão associadas aos tipos de tarefas: T12, T15, T16, T17, T18, T20, T22, T28. Notamos que as tarefas são condizentes com a época em que o ensino proposto era centrado no desenvolvimento de técnicas.

Salientamos que o habitat da fatoração algébrica é o domínio do conjunto dos polinômios com coeficientes reais e seu nicho está associado ao reconhecimento desse novo objeto matemático e algumas de suas operações.

Em Dante (2012), um dos livros indicados em todos os PNLD, analisamos o livro do 8º ano do Ensino Fundamental, no qual a fatoração é inserida no domínio dos polinômios com coeficientes reais, no setor cálculo algébrico e polinômios. A fatoração de polinômios é um tópico que faz parte do tema

“Polinômios”, onde encontramos os tópicos: redução de termos semelhantes, grau de um polinômio, operações com polinômios, produtos notáveis, fatoração de polinômios, aplicações dos produtos notáveis e da fatoração e demonstrações.

Para o tema fatoração do setor polinômios, são privilegiadas as praxeologias associadas aos tipos de tarefas: T12, T13: Desenvolver casos de produto notável e reduzir termos semelhantes; T14: Demonstrar uma igualdade envolvendo produtos notáveis geometricamente (demonstração de Euclides [330 a.C. - 260 a.C.]); T15, T16, T17, T18: T19, T20, T21: Resolver equações na forma fatorada, ou fatorá-las utilizando os casos de fatoração e produto notável; T22, T23: Verificar uma igualdade numérica e generalizá-la; T24: Provar propriedades de números naturais pares e ímpares, consecutivos e múltiplos; T26: Indicar, por meio de expressões algébricas, o perímetro e a área de figuras planas ou sólidos geométricos (paralelepípedo); T27: Articular a noção de área com os casos de fatoração; T28: Aplicar fatorações sucessivas.

Como nos livros anteriores, o habitat da fatoração algébrica é o domínio do conjunto dos polinômios com coeficientes reais e seu nicho está associado à noção de operações com polinômios e algumas aplicações intramatemáticas.

### ■ Considerações finais

Ressaltamos que os PCN (BRASIL, 1998) orientam que, nos currículos de Matemática dedicados ao Ensino Fundamental, devem-se considerar os blocos de “Números e Operações”, “Espaço e Forma”, “Grandezas e Medidas” e “Tratamento da Informação”. Segundo o documento citado, no terceiro ciclo que corresponde atualmente ao 6º e 7º ano (alunos de 11 e 12 anos), os conceitos de múltiplo e divisor de um número natural, número primo, devem ser trabalhados como uma ampliação do campo multiplicativo e não como um novo conteúdo independente dos demais. Quanto ao m.m.c. e m.d.c., o documento enfatiza a importância de serem tratados por meio de situações-problemas, sem maior preocupação com as técnicas em detrimento da sua aplicação.

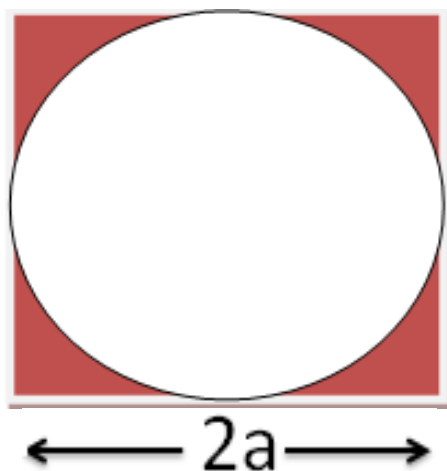
Observamos nas obras de Sangiorgi (1965) e Castrucci *et al.* (1976) que a presença das noções de m.m.c. e m.d.c. tinham por fim enfatizar as possíveis técnicas para a obtenção destes cálculos; desse modo, a primeira obra citada foi a mais rica em técnicas e um número reduzido de situações contextualizadas; em oposição, a segunda obra, mesmo representando um período do conhecido como tecnicista, apresenta poucas técnicas, dando ênfase apenas às mais básicas, o que mostra um empobrecimento do tratamento matemático.

Essa situação torna-se diferente na obra de Dante (2012), que segue as orientações dos PCN há vários anos e na qual encontramos a preocupação em propor situações de aplicação dos conceitos e noções matemáticas introduzidas. Salientamos ainda que o autor, mesmo apresentando as técnicas básicas, não se limita a elas, pois na sequência propõe situações “contextualizadas” envolvendo essas técnicas.

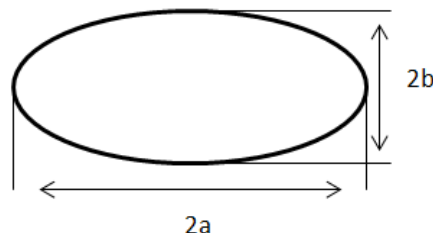
Para a fatoração algébrica, observamos que a mudança é restrita, que o domínio dos polinômios conduz a um tratamento algébrico que exige a apresentação dos novos objetos matemáticos e um trabalho de reconhecimento dos mesmos, acompanhado das técnicas de cálculo que os sustentam.

Em relação à contextualização, observamos que Sangiorgi (1966) utiliza o contexto matemático, Castrucci *et al.* (1976) não se preocupam com a contextualização e Dante (2012) dá ênfase a um contexto voltado para o cotidiano, que pode ser considerado mais como um pretexto que como contexto, como podemos observar na figura 1.

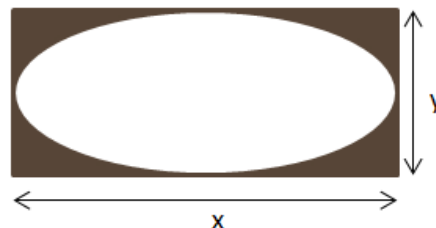
(SANGIORGI, 1966, p. 62) Escreva a expressão literal que representa a área da figura colorida.



(DANTE, 2012, p.50) A área de uma superfície cujo contorno é uma elipse é dada pela expressão  $\pi ab$ , em que  $2a$  e  $2b$  são os comprimentos de seus eixos.



O marceneiro José colocou um espelho elíptico em uma região retangular de madeira na qual  $x = 60$  cm e  $y = 0,36$  m.



Responda (use  $\pi = 3,14$ ):

- Qual é a área do espelho?
- Qual é a área da parte visível da madeira?

Figura 1: Tarefas das obras de Sangiorgi (1966) (à esquerda) e Dante (2012) (à direita).

Ao compararmos as obras das décadas de 1960 e 1970 e a obra da década atual, observamos um recuo na aplicação do m.d.c. ou m.m.c. para a resolução de expressões algébricas, visto que estas noções ficaram restritas ao 6º ano, associadas apenas ao conjunto dos números naturais, deixando assim a articulação entre fatoração numérica e algébrica por meio das noções de m.d.c. e m.m.c. para outra etapa escolar.

### Referências bibliográficas

- Brasil.(1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Secretaria de Educação Fundamental. Ensino de quinta a oitava séries. Brasília: MEC/SEF.
- Chevallard, Y. (2007). *Le développement actuel de la TAD: Pistes et jalons*. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr> Acesso em: 2 de abril de 2015
- Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude3: Ecologie e Régulation*. Acesso em 17 de março de 2016 de [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=53](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53)



- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique du didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), 73-112.
- Castrucci, B. *et al.* (1976). *Matemática*. (5ª série e 7ª série), São Paulo: FTD.
- Dante, L. R. (2012). *Projeto Teláris: Matemática*. (6º e 8º ano), São Paulo: Ática.
- Lages Lima, E.; *et al.* (2006). *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: IMPA.
- Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Sangiorgi, O. (1966). *Matemática Curso Moderno*. (Volume 3 para os ginásios), São Paulo: Editora Companhia Nacional.
- Sangiorgi, O. (1965). *Matemática Curso Moderno*. (Volume 1 para os ginásios), São Paulo: Editora Companhia Nacional.