ANÁLISIS COMPARATIVO DE TEXTOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA CIRCUNFERENCIA

Rafael Antonio Arana-Pedraza, Evaristo Trujillo-Luque, Omar Cuevas Salazar, Julia Xóchilt Peralta García
Instituto Tecnológico de Sonora. (México)
rafael.arana@itson.edu.mx, evaristo.trujillo@itson.edu.mx, omar.cuevas@itson.edu.mx, julia.peralta@itson.edu.mx

Resumen
En el presente trabajo se reporta la comparación del análisis de dos textos de matemáticas para la enseñanza de la circunferencia, a través de las nociones de sistema de prácticas y configuración epistémica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico y la Instrucción Matemática (EOS) desarrollado por Godino, Batanero y Font (2007). El primer texto se caracteriza por ser utilizado en un esquema de enseñanza tradicional y el segundo es una propuesta didáctica generada con la intención de relacionar de manera oportuna los objetos matemáticos relacionados con la circunferencia puestos en juego y resaltando las relaciones entre ellos.

Palabras clave: análisis de textos, enfoque ontosemiótico (EOS), circunferencia

Abstrac
This paper aims to report the comparison between two mathematics texts used to teach topics related to the circumference, through the notions of systems of practices and epistemic configurations which are proposed in the Onto-semiotic Approach of mathematics instruction, (OSA) developed by Godino, Batanero and Font (2007). The first text is characterized for being used in a traditional-based teaching scheme, meanwhile the second one is a didactical proposal developed with the aim to properly link the primary mathematical objects related to the circumference, highlighting the relations between them.

Key words: text analysis, onto-semiotic approach (OSA), circumference

Introducción

Durante muchos años, la práctica matemática promovida en el aula se ha centrado en procesos de memorización y repetición de los ejercicios que el profesor desarrolla en el aula de clases. Una de las críticas más importantes fue que al imponer un proceso mecánico, se fuerza al alumno a confiar más en la memorización que en la comprensión. En este modelo de enseñanza tradicionalista se pide al alumno que imite al profesor y/o el libro que utilizan, enfrentándolo a diversos procedimientos que aprenden de memoria a fin de tener un amplio dominio de ellos. Estos procedimientos generalmente se presentan de manera desconectada entre sí, a pesar de ir encaminados a que el alumno los utilice en matemáticas superiores (Kline, 1976).

Aunado a lo anterior, no permitir los procesos de esquematización de la práctica matemática en el alumno es una parte primordial del problema de la falta de comprensión de dichos procesos. El desarrollo histórico de los diferentes objetos matemáticos es producto de procesos de esquematización progresiva, que si bien el estudiante no necesita repetirlos, tampoco es conveniente que parta del último punto al que se llegó anteriormente (Freudenthal, 1981/2001).

Esta y otras premisas han servido de base para generar un proceso de reestructuración de los contenidos de la materia de Fundamentos de Matemáticas, la cual es impartida en el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) como una materia remedial con el objetivo de nivelar el conocimiento de los alumnos en los contenidos matemáticos mínimos necesarios para la oferta educativa de ingeniería. De acuerdo a Arana, Peralta, Cuevas y Trujillo (2017) un análisis global sobre el texto utilizado anteriormente permitía visualizar una tendencia a la repetición y mecanización de los ejercicios planteados como método de enseñanza. Lo anterior llevó a que se generara una propuesta para la enseñanza de cada uno de los temas que comprenden el curso remedial, en dicha investigación generó el capítulo referente a la circunferencia del nuevo libro de texto, que además fue analizado tomando como referencia algunos constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS).

Objetivo

La presente investigación tiene como objetivo comparar el sistema de prácticas del manual anterior con la propuesta didáctica que se realizó, a través del análisis de la articulación de las configuraciones epistémicas de ambos textos, con el fin de identificar las diferencias en ambos sistemas de prácticas.

Marco Teórico

Según Godino, Batanero y Font (2007), se considera práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Sin embargo, más que estudiar una práctica en particular para un problema concreto, resulta de mayor interés estudiar el sistema de prácticas (operativas y discursivas) puestas en manifiesto al abordar algún tipo de situación problemática. Los sistemas de prácticas se pueden dividir en dos: el que realiza una persona (significados personales), o los que se realizan en el seno de una institución (significados institucionales).

La tipología básica de significados que establecen Godino, Batanero y Font clasifica a los significados institucionales en los siguientes tipos:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global

requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales se clasifican los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

En el EOS se considera que los objetos matemáticos emergen de un sistema de prácticas donde se ponen en juego diferentes elementos para resolver cierta situación que se presenta. Godino, Batanero y Font (2007) califican estos elementos en seis objetos matemáticos primarios: (1) Situaciones, (2) Lenguaje, (3) Conceptos, (4) Proposiciones, (5) Procedimientos y (6) Argumentos. El análisis de estos objetos y sus relaciones permiten establecer una estructura que se denomina Configuración Epistémica (ver Figura 1).

Font y Godino (2006), establecen que la forma en cómo interactúan los objetos puestos en juego en un texto matemático permiten conocer la anatomía del mismo.

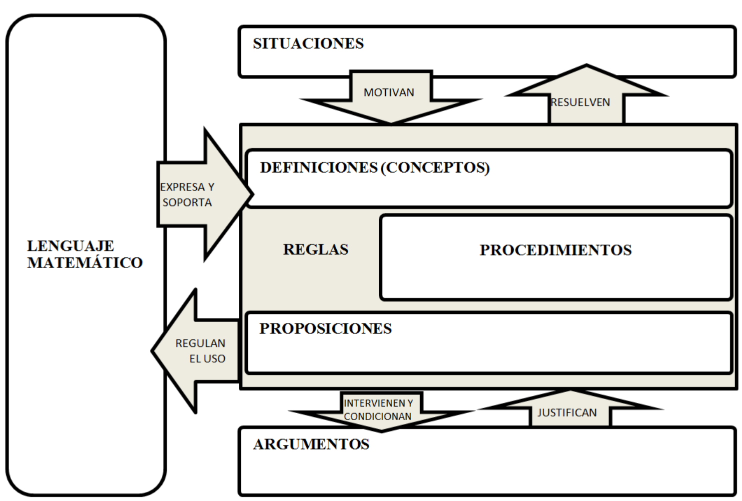

Figura 1. Relación de los objetos primarios en una configuración epistémica. Adaptado de "Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" por Godino, Batanero y Font, 2009.

Contexto

El presente trabajo se realiza en el Instituto Tecnológico de Sonora, como parte del seguimiento a la reestructuración de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas, la cual se oferta a los alumnos que cursan el primer semestre de los programas educativos de ingeniería en el nivel superior (18-22 años).

Diseño

Esta investigación se realiza desde un enfoque cualitativo utilizando constructos teóricos del EOS, principalmente se utiliza la noción de Configuración Epistémica a través de la identificación y relación de los seis objetos primarios que caracteriza la teoría: (1) situaciones, (2) lenguaje, (3) conceptos, (4) procedimientos, (5) proposiciones y (6) argumentos.

Procedimiento

1. Identificación de los objetos primarios promovidos por el manual: se dividió en unidades de análisis agrupando las situaciones que buscaban la emergencia de un mismo objeto matemático. A su vez cada una de las unidades de análisis se dividió en secciones, que se denominaron unidades epistémicas, con el objetivo de identificar los objetos primarios que se ponen en juego en cada una de ellas.

2. Estructuración de las Configuraciones Epistémicas: se estructuró para cada unidad de análisis una Configuración Epistémica de los elementos y sus relaciones. Además, se realizó una Configuración Epistémica global caracterizando el sistema de prácticas promovidas por los textos utilizados.

3. Comparación de los sistemas de prácticas: se estableció el sistema de prácticas del manual a través de las Configuraciones Epistémicas, el cual se comparó con los resultados obtenidos en la investigación realizada por Arana (2016) sobre la propuesta didáctica que desarrolla, para contrastar los elementos puestos en juego en cada uno de ellos.

Análisis de resultados

Para realizar la comparación entre los sistemas de prácticas que se promueven se analizaron los objetos matemáticos puestos en juego por cada uno de los documentos. El manual que se utilizaba anteriormente se divide en dos subtemas: (1) Distancia entre dos puntos y (2) Definición de Círculo. En cuanto a la propuesta didáctica se divide en cuatro subtemas: (1) La distancia entre dos puntos, (2) La ecuación y los elementos de la circunferencia, (3) La recta tangente a la circunferencia y (4) La longitud de arco y el área de sector circular.

Para caracterizar el sistema de prácticas del manual, se dividió en unidades de análisis de las cuales se distinguieron cuales objetos estaban presentes en el texto matemático y cuál era la naturaleza de sus relaciones a través de la articulación de diferentes configuraciones epistémicas. Una vez establecidas las configuraciones epistémicas para el manual, se retomaron las configuraciones realizadas por Arana (2016) para la propuesta didáctica y se realizó una comparación entre sus sistemas de prácticas propuestos.

Derivado de las comparaciones entre las configuraciones epistémicas de ambas propuestas se desprenden algunos resultados que se presentan a continuación. Respecto a las configuraciones en general se aprecian objetos matemáticos primarios similares en ambos textos, sin embargo, difieren en el uso y en los objetos matemáticos primarios en los que se centra. Lo anterior se puede notar en relación con los elementos lingüísticos que se utilizan, donde se percibe que las expresiones analíticas que se distinguen en el lenguaje son muy parecidas, no obstante, se nota una clara diferencia entre el número de figuras que se emplean y las descripciones en ambos casos. Por ejemplo, la figura que sirve como base para la emergencia del concepto circunferencia en el manual (ver figura 2) va muy enfocada a la relación con la ecuación y se muestran coordenadas que después no se mencionan o relacionan con algún otro objeto, en contraste en la propuesta didáctica la figura empleada (ver figura 3) proviene de un ejemplo mostrado en una actividad inicial que solicitaba encontrar distancias entre puntos en un plano cartesiano y el centro, retomando la característica de que algunos puntos se encontraban a la misma distancia y quedan sobre una curva que se traza al abrir un compás considerando la distancia del centro a algún punto en el plano. De esta manera se presentan objetos matemáticos en contextos muy distintos, en la propuesta existe una idea e interacción previa y se presenta una situación en la que se aprecia que la gráfica contiene a algunos puntos, efectivamente aquellos en que la distancia es la misma

Con referencia a los conceptos, existen diferencias en cuanto a la utilización de los términos circunferencia y círculo. En el caso del manual, se utiliza la definición: “el círculo es el conjunto de todos aquellos puntos del plano que se encuentran ubicados a una distancia fija r de un punto dado, llamado centro del círculo; r es el radio del círculo” como parte del objeto primario lenguaje en forma verbal, asociado a la forma gráfica que se muestra en la figura 2. Contario a la propuesta didáctica donde aparece la definición asociada a la figura 3 como:

> … [La circunferencia] se define como el conjunto de puntos que se encuentran a una misma distancia de un punto de origen (punto de referencia). Este punto de origen se define como centro y la distancia a la que se encuentran todos los puntos desde el centro de la circunferencia se le denomina radio (Arana, Trujillo, & Cuevas, 2016, p. 242)

Con relación al concepto de circunferencia, se considera que los objetos primarios asociados al concepto de distancia entre dos puntos juegan un papel importante ya que en ambos casos la emergencia de esta se basa en esta noción. En el manual se asocian diferentes notaciones con la distancia entre dos puntos como: “P_1P_2”, “$d_1 = x_2 - x_1$”, “$d_2 = y_2 - y_1$”, “$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$”, “distancia AB”, “$\overline{AB}$”, sin encontrar de manera explícita la idea de que todas representan a un mismo objeto; en la propuesta se hace el uso de la letra minúscula d para referirse a la distancia entre dos puntos.

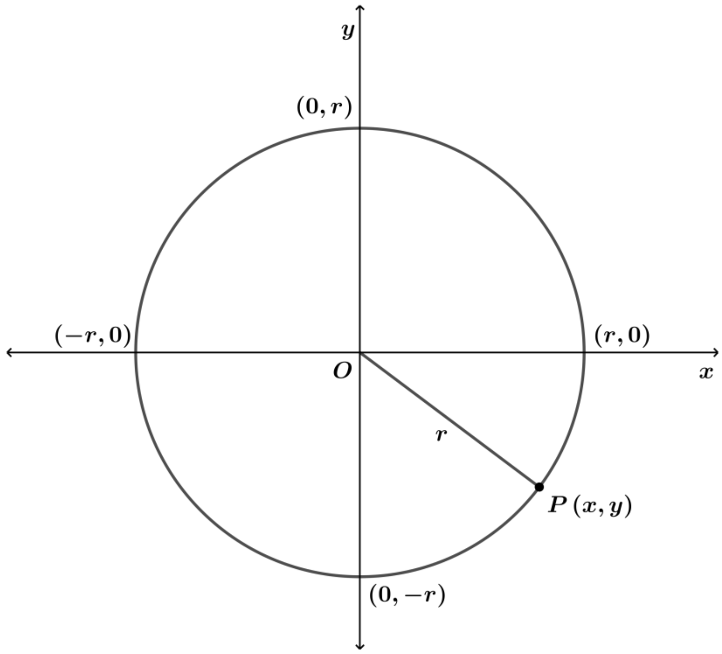

Figura 2. Gráfica para la emergencia del concepto de círculo. Adaptado de "Manual del Curso: Fundamentos de Matemáticas" por Morimoto, 2011.

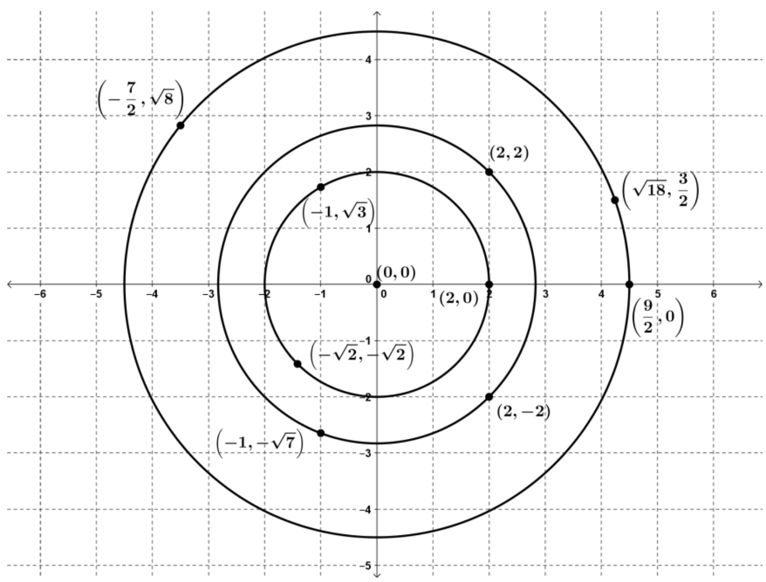

Figura 3. Gráfica para la emergencia del concepto de circunferencia. Adaptado de "La circunferencia" por Arana, Trujillo y Cuevas, 2016.

Las proposiciones y argumentos relacionados con la distancia entre dos puntos también tienen diferencias notorias, los argumentos utilizados en la propuesta para sustentar que el orden en que se tomen los dos puntos para calcular la distancia es indistinto se basan en la noción de desplazamiento y valor absoluto que se retoman de capítulos previos en el libro de texto. Contrario a los expuestos en el manual, donde se utiliza la noción de la potencia par de "$(x_2 - x_1)^2$ y $(y_2 - y_1)^2$" para sostener que al ser siempre cantidades positivas el cualquiera de los dos puntos puede ser el inicial. En esta idea se identifica un posible conflicto semiótico ya que el manual establece "En consecuencia, cuando se emplea esta fórmula, cualquiera de los dos puntos $(x_2 - x_1)^2$ o $(y_2 - y_1)^2$ puede tomarse como punto inicial" asociando la notación $(x_2 - x_1)^2$ o $(y_2 - y_1)^2$ al concepto de punto y no de cantidad como se utiliza previamente.

Respecto a los procedimientos se observan que son parecidos, en el caso del manual se identifican (Morimoto, 2011, p. 176):
complementamos los cuadrados en $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 32 = 0$$
$$(x^2 + 6x) + (y^2 + 10y) = -32$$
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = -32 + 34$$
$$(x + 3)^2 + (x + 5)^2 = 2$$

En la propuesta los procedimientos se acompañan del lenguaje verbal y se muestra el uso de las propiedades de la igualdad, por lo que se relacionan al menos los objetos primarios: procedimientos, lenguaje verbal y simbólico, proposiciones, argumentos y conceptos. Se muestra uno de los procedimientos encontrados en la propuesta:

> Primeramente, se ordenan los términos de forma descendente con el fin de acomodar aquellos que son semejantes, primero los que contengan x y después los que contengan y:
> $$x^2 + 6x + y^2 + 10y + 30 = 0$$
> Después se toma el coeficiente del término lineal de cada una, se divide entre dos y se eleva al cuadrado; sumando y restando para no alterarla ecuación:
> $$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + y^2 + 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 30 = 0$$
> Se simplifican las fracciones y se forman los trinomios cuadrados perfectos:
> $$(x + 3)^2 - (3)^2 + (y + 5)^2 - (5)^2 + 30 = 0$$
> Se pasan los términos independientes al lado derecho de la igualdad:
> $$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = -30 + 25 + 9$$
> Se simplifica y se obtiene la ecuación de una circunferencia en forma estándar
> $$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$$
> En esta ecuación puede observarse que el centro es $C(-3, -5)$ y el radio $r = 2$; por lo que se la ecuación $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 30 = 0$ representa una circunferencia. (Arana, Trujillo, y Cuevas, 2016, pp. 247-248)

Conclusiones

A pesar de que el sistema de prácticas utilizado por ambos textos pudiera considerarse similar en tanto a los objetos primarios que pone en juego, la forma en que se presentan varía al momento de introducirlos. La presencia de los objetos primarios es importante, pero su articulación brinda situaciones más ricas que brindan la posibilidad de significados más robustos. El manual presenta los conceptos matemáticos al iniciar cada tema y los utiliza como herramientas al momento de solucionar una situación planteada, contrario a la metodología de la propuesta didáctica, donde se pone en juego una situación inicial que propicia el uso de diferentes objetos intervinientes y la emergencia de nuevos objetos a través de la misma. Los argumentos son una pieza clave en la construcción del significado y permite en algunas circunstancias que las relaciones entre los objetos primarios como los procedimientos, conceptos y situaciones tengan un sustento. La conexión entre los temas es importante para la construcción de significados; en el manual se observan procedimientos y proposiciones que pueden ser utilizados para la construcción de objetos emergentes, pero se detectó que en vez de ello se omiten estos u otros argumentos y, en el caso de que se usen otros argumentos estos aparecen de forma desarticulada.

Otro aspecto importante donde existe discrepancia es la concepción de lo que es una circunferencia y la diferencia con el círculo; en la propuesta didáctica se establece de manera ostensiva una diferencia entre ambos, mientras que en el manual no se utiliza el concepto de circunferencia y se usa indistintamente el de círculo, situación que genera de manera potencial un conflicto semiótico para los cursos sucesivos donde se utiliza este objeto matemático. El análisis de textos es importante para conocer el significado institucional de referencia, identificar el sistema de prácticas, conocer la estructura del texto. Se considera también oportuno como un medio para la formación docente ya que el modelo del CCDM considera que el profesor de matemáticas identifique el sistema de prácticas matemáticas, en la competencia de análisis ontosemiótico.

Referencias Bibliograficas

Arana, R. A. (2016). *Diseño y análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia* (tesis de maestría inédita). Instituto Tecnológico de Sonora, México.

Arana, R. A., Peralta, J. X., Cuevas, O., & Trujillo, E. (2017). Diseño y análisis de un texto para la enseñanza de la circunferencia a través de configuraciones epistémicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 624–632.

Arana, R. A., Trujillo, E., & Cuevas, O. (2016). La circunferencia. En O. Cuevas & J. X. Peralta (Eds.), *Fundamentos de matemáticas: una propuesta para su enseñanza y aprendizaje*. Editorial Tabook.

Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa*, *8* (1), 67-98.

Freudenthal, H. (2001). Problemas fundamentales de la educación Matematica. (Trad. A. López). ContactoS, *42*, 11–22. (Reimpreso de Educational Studies in Mathematics 12, pp. 133–150, por H. Freudenthal, 1981)

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Kline, M. (1976). El Fracaso de la Matemática Moderna: ¿Por qué Juanito no sabe sumar? Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Morimoto, T. (2011). *Manual del Curso: Fundamentos de Matemáticas*. México: Instituto Tecnológico de Sonora