

# EXPERIMENTANDO CON EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA USANDO TECNOLOGÍA

**Jorge Ávila Soria**  
Universidad de Sonora. (México)  
javilas9@gmail.com

## Resumen

En este trabajo queremos mostrar los primeros resultados de una investigación, que iniciamos en el segundo semestre del año 2016. Con esta, buscamos contrastar dos formas de abordar el planteamiento y resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales de hasta 4 incógnitas. En la enseñanza tradicional, tanto el profesor como los estudiantes dedican buena parte del tiempo para revisar y practicar las diversas formas de resolver, más que plantear esos sistemas de ecuaciones. Mientras que, en un nuevo enfoque como el que proponemos, gran parte del tiempo se emplea en el modelado y la diversificación de aplicaciones de software para ayudar a responder las interrogantes planteadas.

**Palabras Clave:** geometría dinámica, representaciones múltiples, contextos

## Abstract

In this work, we want to show the preliminary outcomes of a research, which we started in the second half of 2016, where we seek to contrast two ways of approaching how to propose and solve Systems of Linear Equation. In traditional teaching, both the teacher and the students spend much of their time reviewing and practicing the various ways of solving, rather than posing those systems of equations. Whereas, in a new approach such as the one we propose, much of the time is used in the modeling and diversification of software applications to help students answer the questions raised.

**Key Words:** dynamic geometry, multiple representations, contexts

## ■ Introducción

En el presente reporte de investigación queremos mostrar los primeros resultados obtenidos de la implementación que iniciamos en el segundo semestre del año 2016, con el propósito de contrastar dos formas de abordar el planteamiento y resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) en un curso de Álgebra para Ingenieros.

Como ya dijimos, el principal propósito de esta investigación es comparar la enseñanza tradicional donde los estudiantes deben trabajar en su cuaderno un sistema de ecuaciones lineales que puede tener hasta 4

incógnitas, por alguno de los métodos de resolución requeridos, para contestar a las interrogantes planteadas en una situación problema de un contexto particular, en contraposición a un tipo de enseñanza en el que los estudiantes no ocupan preocuparse por la parte operativa del Álgebra, conocen esa parte operativa, pero deben de aprender principalmente como utilizar el software que se encargará de esa parte operativa del Álgebra, mientras los estudiantes dedican más tiempo a contestar las mismas preguntas relativas a la situación problema de estudio. En el grupo que trabaja con tecnología se utilizan las mismas situaciones problema, sin embargo, el tamaño de los SEL que se pueden trabajar sólo se limitando por las capacidades del software, lo cual queda claro en ambos grupos, aun cuando esto es solo en la teoría.

### ■ Marco teórico y metodológico

Para la presente investigación, se asume la validez de las premisas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS; Font, Godino, y D'Amore, 2007), en especial, las relativas al carácter sistémico de los significados de los objetos matemáticos que parten de concebirlos de una naturaleza pragmática antropológica y, en consecuencia, de carácter contextual. Es decir, partimos de que dichos significados son, esencialmente, los sistemas de prácticas que se utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problemáticas; que estos sistemas de prácticas son discursivas y operativas; y que los elementos que los constituyen son los medios utilizados en dichas prácticas, tales como el lenguaje, constituido a su vez, por las diversas formas de representación de los objetos matemáticos (como son la tabular, la gráfica, la analítica, la verbal y otras), los procedimientos, los conceptos, las propiedades, los argumentos (utilizados para justificar las propiedades y los procesos que se desarrollan) y los medios tecnológicos. En este caso, el interés está centrado en el uso de las tecnologías digitales, especialmente, en el uso de GeoGebra por la facilidad de trabajar en un ambiente de múltiples representaciones, además de su gratuidad.

Al igual que Godino (2010) y Ávila y Ávila (2015), buscamos introducir la tecnología digital como parte integral del proceso de enseñanza aprendizaje. Asimismo, queremos encontrar formas adecuadas de utilizar esas tecnologías digitales en forma científica para que los estudiantes adquieran las competencias necesarias en el uso de software matemático, mejorando así sus capacidades para afrontar y resolver problemas de ingeniería en el ambiente laboral en el que se desempeñen.

Al presentar los objetos de estudio con la ayuda de GeoGebra, buscamos que los alumnos interpreten adecuadamente –con ayuda su manipulación– las situaciones problemáticas presentadas y logren plantear y resolver los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) correspondientes para dar respuestas a las interrogantes que les plantea el estudio de esas situaciones.

La metodología de diseño y marco teórico están fundamentados en Aprendizaje en Colaboración, Debate científico, y Auto reflexión (ACODESA), propuesta por Hitt (2009), que a su vez se apoya en otros marcos teóricos relativos a los campos conceptuales, las representaciones semióticas y las situaciones didácticas. ACODESA favorece particularmente el uso de manipulables para promover la producción de representaciones funcionales por parte de los estudiantes, que consideramos fundamental para que estos tengan una mejor retención de las construcciones matemáticas estudiadas, ya que el curso de Álgebra para ingenierías del nivel superior busca enfrentar a los estudiantes con una diversidad de contextos que requieren las significaciones de los objetos matemáticos.

## ■ Metodología de diseño

Para esta investigación, decidimos trabajar exclusivamente con el tema Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) de hasta 4 incógnitas, con 6 estudiantes, pues nos facilitaba su observación. Estos estudiantes que participaron de la experiencia nunca estuvieron al tanto de que eran observados, ni sabían que existían dos grupos de estudio, uno de trabajo más comúnmente tradicional y otro con un enfoque puramente orientado al uso de tecnología digital.

Buscamos seleccionar dos grupos homogéneos de estudiantes tanto para el grupo de enseñanza tradicional, como para el grupo de enseñanza con tecnología digital. Los sujetos de estudio elegidos, para esta primera observación, eran estudiantes que habían mostrado un interés por arriba del promedio de la totalidad del grupo, además de capacidades similares, durante el trabajo previo en el curso. Se seleccionaron 6 estudiantes que se podrían clasificar como aventajados.

En el grupo de enseñanza tradicional, decidimos observar el desempeño de 4 sujetos de estudio, el doble que los sujetos observados en el grupo de enseñanza con tecnología digital. Además, en ambos grupos, la mitad eran repetidores de la materia y la otra mitad eran estudiantes de nuevo ingreso. El haber elegido repetidores, no va en detrimento de las capacidades de esos estudiantes, pues el principal factor a evaluar fue su desempeño previo en el curso.

El trabajo previo al proceso de experimentación-observación fue similar en ambos grupos. Los cursos en ambos grupos se desarrollaron, en lo general, de la misma manera, se trataron los mismos temas, se usaron los mismos contextos de problematización de las situaciones, se mezclaron proporcionalmente igual, la enseñanza digital con la enseñanza tradicional y fue luego de todo este proceso que se hizo la selección de estudiantes para la investigación.

En ambos procesos de enseñanza, se buscó que los estudiantes fueran capaces de transitar entre las múltiples representaciones de los objetos de estudio en los diversos contextos utilizados, para que pudieran, ellos mismos, avanzar tanto en forma colaborativa como de forma individual en darle respuesta a las interrogantes planteadas por cada problemática.

## ■ Uso de múltiples contextos para Sistemas de Ecuaciones Lineales

Durante el tema de SEL, en el grupo de enseñanza tradicional del curso de Álgebra para ingenierías del nivel superior, tanto el profesor como los estudiantes dedicaron buena parte del tiempo revisar y practicar los diversos métodos para resolver los SEL y bastante menos tiempo se dedicó a su planteamiento. Mientras que, en el grupo que usó tecnología digital, la mayoría del tiempo se empleó en el planteamiento y la explicación de los diversos elementos y funciones en el ambiente del software de geometría dinámica, GeoGebra.

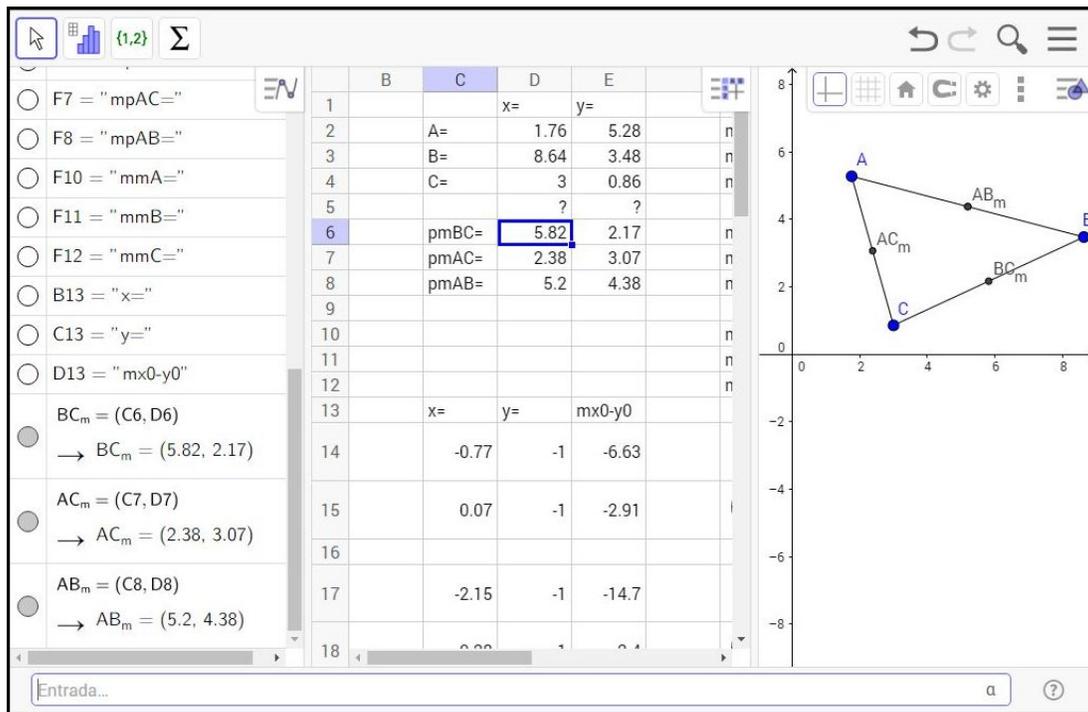


Figura 1. Los centros de un triángulo, tratado en múltiples representaciones digitales interrelacionadas. (Pantalla de GeoGebra)

La Figura 1 presenta un escenario de múltiples representaciones para el contexto de la intersección de líneas rectas y los vértices de una figura geométrica, en este caso, un triángulo. Todos los contextos son usados en ambos enfoques del curso y esta imagen en particular es usada para los SEL de 2x2, para la enseñanza digital. Desde el principio del curso, se presentó a los estudiantes las ventajas que podían tener si eran capaces de utilizar las múltiples representaciones para su ventaja en el entendimiento de las situaciones problemas estudiadas.

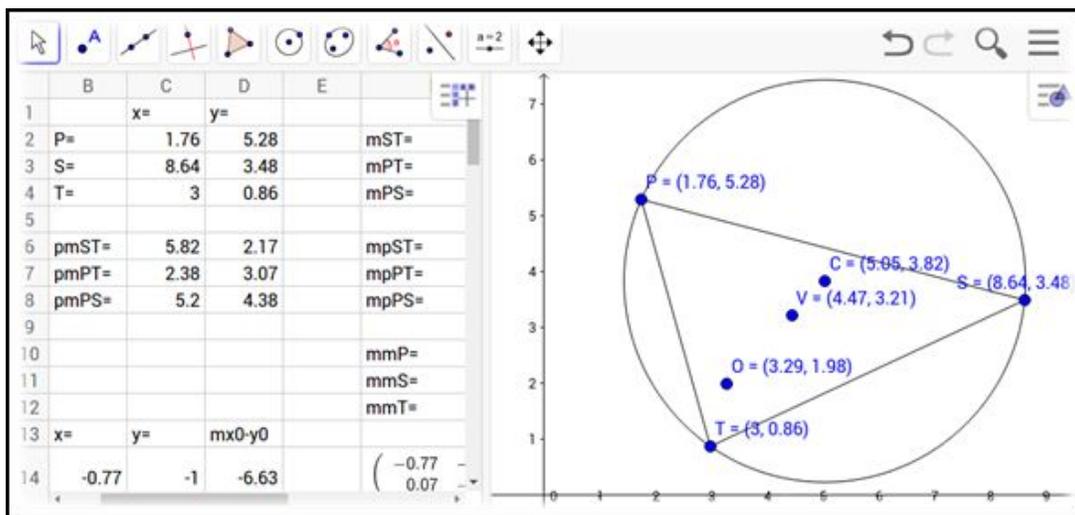
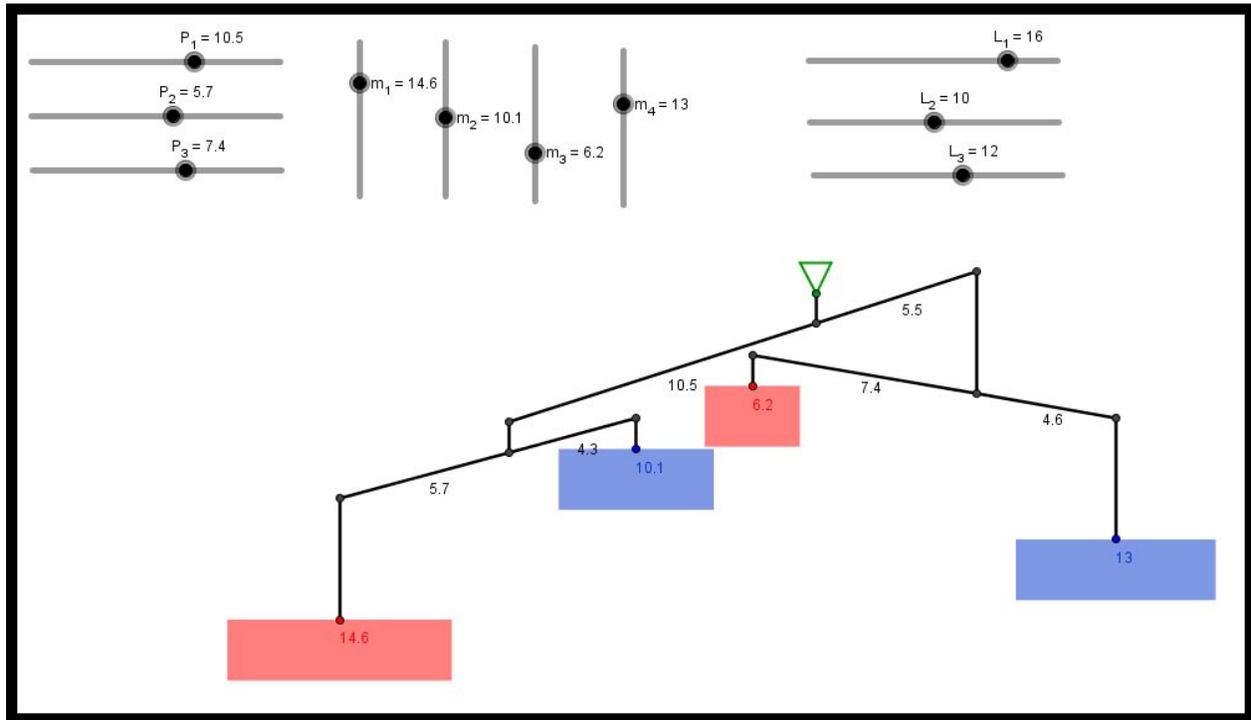


Figura 2. La obtención de los centros de un triángulo. (Pantalla de GeoGebra)



**Figura 3.** El estudio del balanceo de masas en sistemas de ecuaciones con más incógnitas que ecuaciones. (Pantalla de GeoGebra)

En la Figura 2, se continúa con los SEL de  $2 \times 2$ , donde los estudiantes observan muchas líneas rectas que se interceptan y donde los estudiantes pueden practicar múltiples veces y métodos de resolver trabajar los SEL. En particular en esta imagen solo se ven los tres segmentos que representan los lados del triángulo, mientras que las otras líneas rectas que se interceptan, que son bisectrices, medianas o perpendiculares, se encuentran ocultas. Al mismo tiempo, los estudiantes observan y aprenden que las diferentes intersecciones llevan nombres diversos, aún dentro de una misma situación problema en un mismo contexto geométrico. Estas soluciones a los SEL, pueden ser una simple intersección entre dos rectas, un vértice, el punto medio de un lado de un triángulo, el centro de una circunferencia o alguno de los centros de un triángulo y esto sin duda abona a la riqueza contextual de la utilidad de los SEL.

En la Figura 3, se usa el balanceo de masas en un sistema de balanzas, para explicar los SEL que cuentan con más incógnitas que ecuaciones, hasta los SEL de  $3 \times 3$ , pero en este contexto, los estudiantes no necesitan observar las rectas en la vista gráfica de GeoGebra, en lugar de eso, usan el Applet para balancear la balanza virtual.

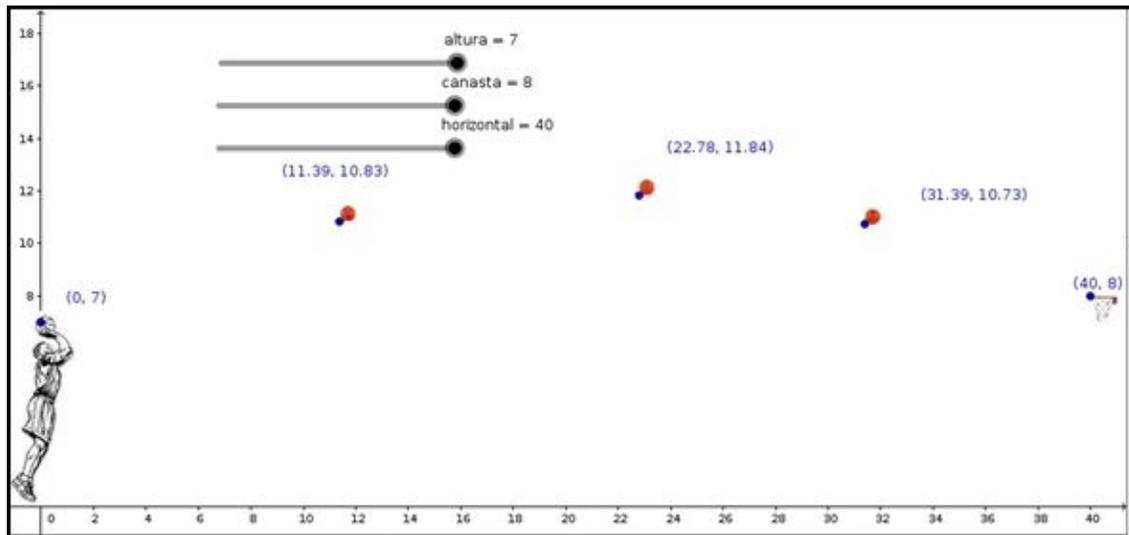


Figura 4. Lanzamiento parabólico estudiado desde las perspectivas de diversos contextos. (Pantalla de GeoGebra)

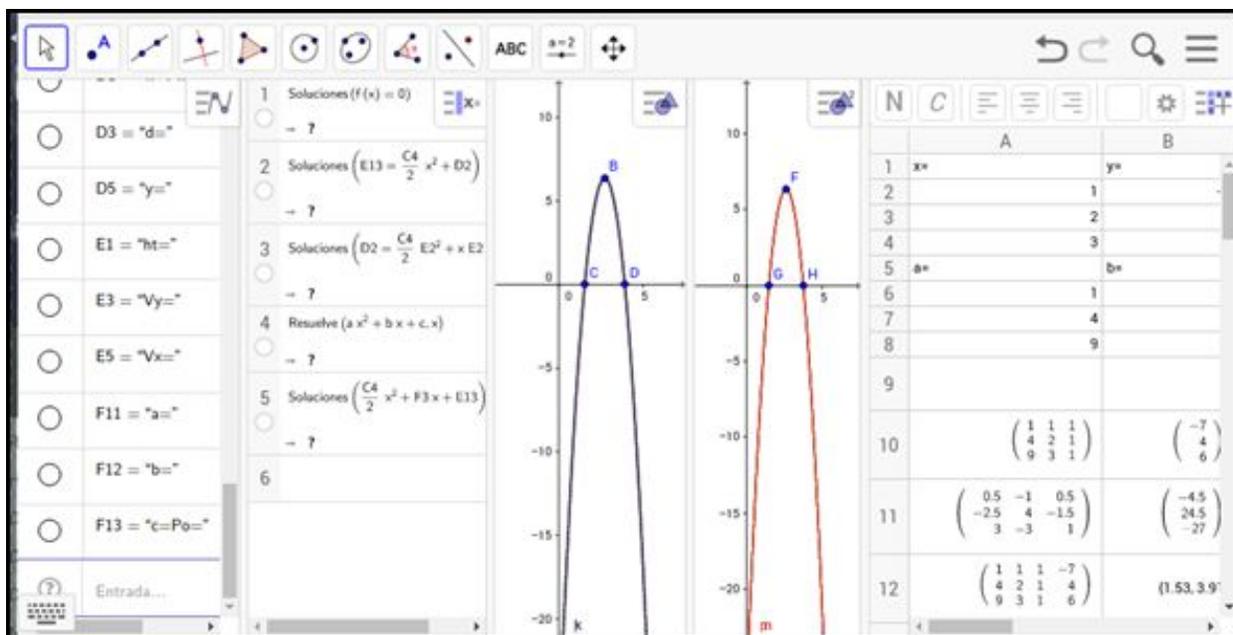
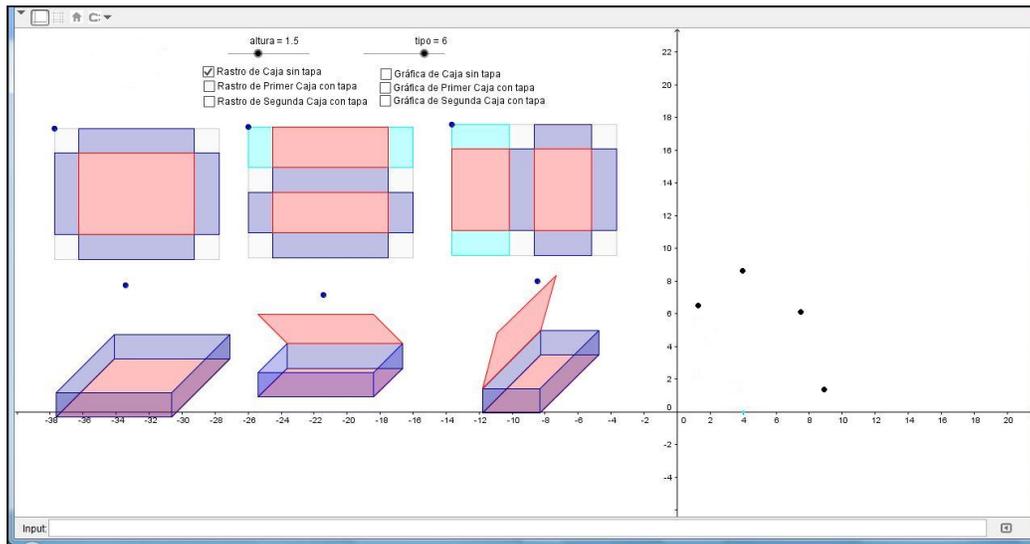


Figura 5. Lanzamiento parabólico estudiado como desplazamiento en el espacio y como tiro parabólico. (Pantalla de GeoGebra)

En las Figuras 4 y 5, se usa el contexto de los lanzamientos con trayectorias parabólicas desde dos puntos de vista. El lanzamiento visto en función de las trayectorias que dibujan en el espacio y ese mismo lanzamiento visto con relación a la altura del proyectil lanzado y el tiempo que tardan antes de que choquen con algo y reboten. La Figura 4, solo trata la parte de la trayectoria en el espacio en diversos contextos y tipos de parábolas, mientras que la Figura 5, presenta la situación de dos parábolas relacionadas con el mismo lanzamiento, donde al obtener una de ella, se puede obtener la segunda y este Applet es usado para los SEL de  $3 \times 3$  y de  $2 \times 2$ .



*Figura 6.* El estudio de los polinomios cúbicos usando el contexto del diseño de recipientes. (Pantalla de GeoGebra)

Finalmente, en la Figura 6, se usa el contexto del diseño de recipientes para estudiar los polinomios cúbicos, que por medio de la factorización deberá descifrarse y con este Applet tratamos SEL de  $3 \times 3$  y de  $4 \times 4$ . En toda esta última parte de la investigación, los estudiantes trabajan con los SEL, sin graficar líneas y partiendo de modelos que claramente no son lineales, sin embargo, los estudiantes lograron generar los planteamientos de los SEL con poca ayuda, lo cual resultado satisfactorio.

Todos los Applets usados y las construcciones generadas para el curso con tecnología digital, fueron diseñados para que los estudiantes aprovecharan en todo lo posible el visualizar simultáneamente diversas representaciones y establecer sus relaciones, a través de la manipulación que la geometría dinámica permite efectuar.

## ■ Resultados y conclusiones

En el enfoque tradicional con lápiz y papel, tanto el profesor como los estudiantes dedican buena parte del tiempo para revisar y practicar las diversas formas de resolver, más que plantear los SEL estudiados. En el enfoque que proponemos con el uso de tecnología digital, mientras tanto, gran parte del tiempo se empleó para el planteamiento y la diversificación de aplicaciones de software para responder a los cuestionamientos hechos.

Durante todo el proceso de experimentación, se observó un desenvolvimiento parecido en ambos grupos de estudio, los cuales evidencian que, con el uso de esta diversidad de contextos, se logró un enriquecimiento de los significados de los objetos matemáticos emergentes construidos por los estudiantes en concordancia con lo establecido en el EOS; esto sucedió con algunas diferencias provocadas por el enfoque dado al curso en cada caso, diferencias que vale la pena comentar.

Los estudiantes que ejecutaban el álgebra en la computadora se mostraron más propositivos en general que los estudiantes que resolvían los SEL en sus cuadernos, de lo observado queremos concluir que lograron alcanzar un grado de competencia tal, con el uso de GeoGebra, que podían despreocuparse de la presión de estar resolviendo el SEL y de esta manera, ocupar ese tiempo en pensar adicionalmente en la situación problema.

Además, la rapidez para dar respuesta a cuestionamientos planteados adicionalmente, aumentó de manera significativa, según se observó en los estudiantes muestreados. Esto es, se observó un mejor uso matemático en situaciones similares, así como una mejor replicación en situaciones nuevas en las que los estudiantes que usaron computadora tendieron a generalizar mejor el uso de sus herramientas para el planteamiento que los estudiantes del curso tradicional. La más notable diferencia observada, entre los estudiantes de enseñanza tradicional y los de enseñanza con tecnología digital, es la tendencia a usar las diferentes representaciones disponibles para la interpretación de la situación problema. Los estudiantes del grupo de enseñanza con tecnología digital usaban las múltiples representaciones, lo cual pudo deberse a que la implementación de las situaciones siempre requería del uso de varias de las vistas de GeoGebra y esto les daba ventaja sobre los estudiantes del grupo tradicional; además, estos estudiantes también aprovechaban las posibilidades que los Applets digitales tienen para presentar cualquier cantidad de escenarios diversos.

Sabemos que son pocas las observaciones hechas hasta el momento y ciertamente que buscamos continuar con esta investigación en los subsiguientes cursos, pero al momento pensamos que esta primera observación arrojó cosas interesantes que debemos intentar medir en el futuro cercano.

Consideramos que esta investigación puede abonar a la justificación de cambio en el paradigma de lo que significa enseñar y aprender álgebra, al menos para el nivel superior y que debemos continuar ampliando la investigación para observar todos los tipos de estudiantes.

## ■ Referencias bibliográficas

- Ávila, J. y Ávila, R. (2016). Desarrollo de competencias para usar diversas aplicaciones de software para la resolución de problemas en los cursos de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, pp. 1612-1620.
- Ávila, J. (2016). Usando el cálculo de volúmenes de recipientes para construir significados en la factorización de expresiones cúbicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, pp. 773-781.
- Ávila, J. y Ávila, R. (2015). El uso de tecnología digital para promover nuevas formas de aprendizaje. *AMIUTEM*, 2, 37-39.
- Font, V.; Godino, J. y D'Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. Recuperado de <http://www.ugr.es/loc>.
- Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica*. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La gaceta de la RSME*, 10(2).
- Hitt, F. (2009). Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión (ACODESA), *Primer Seminario sobre Resolución de Problemas y el Uso de la Tecnología Computacional*, pp. 9-21.