

ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA CON PROYECTOS Y COMPRESIÓN GRÁFICA

Carmen Batanero y Pedro Arteaga
Universidad de Granada. (España)
batanero@ugr.es, parteaga@ugr.es

Resumen

En este trabajo se describe un curso corto presentado en RELME, donde se analizó el interés que para la formación de profesores tiene la realización de proyectos estadísticos en que estos recogen sus propios datos para responder una pregunta, completando un ciclo de investigación estadística. El análisis de los gráficos producidos en uno de estos proyectos trabajado dentro del curso permitió reforzar los componentes de la comprensión gráfica y los conocimientos didácticos de los participantes, en particular sobre los errores más frecuentes en la construcción de gráficos y los niveles de lectura de los gráficos.

Palabras clave: proyectos estadísticos, comprensión gráfica, errores estadísticos, niveles de lectura, formación de profesores

Abstract

In this paper we describe the workshop presented in RELME, where we analyzed that statistical projects are an issue of interest in teacher training, as teachers collect their own data to answer a research question and complete a cycle of statistical investigation. The analysis of graphs produced in one of these projects carried out in the workshop allow reinforcing the components of graphical competence as well as the didactic knowledge of participants, in particular, on the most common errors in building graphs and on the reading levels of the graphs.

Key words: statistical projects, graphical understanding, statistical errors, reading levels, teacher training.

■ Introducción

Aunque la enseñanza de la estadística en la Educación Secundaria tiene una trayectoria de más de 30 años, su presencia en la Educación Primaria es reciente. En España, se incorporó en este nivel educativo, dentro del Bloque Tratamiento de la información, azar y probabilidad del área de Matemáticas, en el currículo anterior (Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 2006), donde se incluyeron en el primer ciclo (6 y 7 años) las técnicas elementales para la recogida de datos, los gráficos estadísticos, e introducción al lenguaje del azar. Se continuaban estos contenidos en segundo ciclo (8-9 años), incluyendo las tablas de datos y de doble entrada. En tercer ciclo (10-11 años) se ampliaba el trabajo con gráficos, resaltando la importancia de analizarlos críticamente. Igualmente se trataba la media aritmética, moda y rango, y la estimación de la probabilidad de un suceso. Contenidos similares se contemplan en el currículo actual (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2014), aunque ahora se da libertad a las comunidades autónomas a organizar estos contenidos por ciclo.

Una condición para asegurar el éxito de estas propuestas es la formación de los profesores de Educación Primaria, puesto que pocos han seguido un curso completo de estadística durante su formación. Menos aún han trabajado con proyectos estadísticos; además, es necesaria la formación de los aspectos didácticos que se han de tener en cuenta en la enseñanza de la estadística. En este curso corto se sugirió el interés de organizar secuencias didácticas dirigidas a estos profesores, en las que, en primer lugar completan un proyecto estadístico y posteriormente realizan un análisis didáctico del mismo y de sus soluciones, con la finalidad de reforzar diferentes componentes de su conocimiento como profesores.

El interés del trabajo con proyectos es resaltado en estos currículos, así como el proyecto GAISE (Franklin, *et al.* 2005), con la finalidad que los estudiantes experimenten el ciclo completo del trabajo estadístico, diseñando investigaciones, formulando preguntas de investigación, recogiendo datos de observaciones, encuestas o experimentos, y obteniendo conclusiones y predicciones basadas en el análisis de los datos. Batanero y Díaz (2011) y McGilliway y Pereira-Mendoza (2011) indican que al trabajar con proyectos se contextualizan los conceptos y técnicas y se presentan al estudiante las diferentes fases de una investigación estadística. Murray y Gal (2002) sugieren que el trabajo con proyectos desarrolla nuevas competencias, pues la comprensión, interpretación y reacción frente a la información estadística no sólo requiere conocimiento estadístico o matemático, sino también habilidades lingüísticas, conocimiento del contexto, capacidad para plantear preguntas, y una postura crítica que se apoya en un conjunto de creencias y actitudes, que se desarrollan en el proyecto.

■ Marco teórico

El marco teórico del trabajo se basa en dos componentes que resumimos a continuación: a) Trabajos teóricos sobre comprensión gráfica y b) Modelos de conocimiento del profesor para enseñar matemáticas.

Comprensión gráfica

La propuesta que presentamos en el curso se orienta a mejorar la comprensión gráfica de los futuros profesores, ya que los gráficos estadísticos son parte de la cultura estadística necesaria en la sociedad actual, donde argumentar y representar son habilidades recomendadas en muchos currículos (Estrella, Olfos, Morales. y Vidal-Szabó (2017).

Bertin (1967) indica que el primer paso en la lectura de un gráfico es la identificación externa del tema al que se refiere el gráfico. En segundo lugar se lleva a cabo, una identificación interna, interpretando las variables representadas y sus escalas. Posteriormente se produce la comprensión de la correspondencia entre las dimensiones interna y externa del gráfico, con lo que se obtienen conclusiones sobre las variables, su rango de variación, su distribución y sus características, en la situación real representada.

A partir de estas ideas Bertin (1967) definió los siguientes niveles de lectura de un gráfico:

- *B1: Extracción de los datos:* El nivel más básico, en el que sólo se lee exactamente uno de los datos que hay en el gráfico, por ejemplo, se lee la frecuencia que corresponde a una categoría.
- *B2: Extracción de las tendencias:* Implica, además de la lectura simple, la percepción entre la relación de dos subconjuntos de datos que intervienen en el gráfico, para lo cual hay que operar con los datos o compararlos.

- *B3: Análisis de la estructura de los datos:* Comparación de tendencias en dos o más variables o grupos.

Por otro lado, Curcio (1987) propone los siguientes niveles de lectura.

- *C1: Leer los datos:* Consiste en la lectura literal de la información representada en el gráfico. Este nivel es equivalente al nivel B1 de Bertin.
- *C2: Leer dentro de los datos:* Lectura de una información basada en los datos del gráfico, pero que no es representada explícitamente. Equivalente al nivel B2 de Bertin.
- *C3: Leer más allá de los datos:* Realización de inferencias con la información presentada en el gráfico, más allá de la realización de cálculos y/o comparaciones, así como por ejemplo, predicciones sobre qué valor tomará un dato que no está en el gráfico. Este nivel no es tenido en cuenta por Bertin.
- Shaughnessy (2007) amplía la clasificación anterior definiendo un nuevo nivel, que es posteriormente recogido en Friel, Curcio y Bright (2001): *C4: Leer detrás de los datos* o valoración crítica de los datos, la cual no supone únicamente tener comprensión gráfica, sino además conocer el contexto de los datos. Este nivel no es tenido en cuenta por Bertin. Un ejemplo sería dar al alumno un gráfico con la escala no proporcional y preguntarle si en el gráfico hay algún error.

Varias investigaciones evalúan la construcción de gráficos estadísticos por parte de los estudiantes. El primer paso es la elección de un gráfico adecuado, aunque algunos estudiantes, según Li y Shen (1992) utilizan gráficos inadecuados al tipo de variable o problema; por ejemplo, diagramas de barras para representar datos bivariantes. Los autores encuentran también los siguientes problemas en las escalas de los gráficos construidos:

- (a) Elegir una escala inadecuada (por ejemplo no se cubre todo el campo de variación de la variable representada);
- (b) Omitir las escalas en alguno de los ejes;
- (c) No especificar el origen de coordenadas y
- (d) No proporcionar suficientes divisiones en las escalas.

Por su parte Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2016) encuentran los siguientes errores en la construcción de gráficos por parte de futuros profesores:

1. *Errores de interpretación de las convenciones de construcción de los gráficos.* Por ejemplo, no entender que hay que incluir en el eje X sólo los valores de la variable cuya frecuencia es no nula. Esto lleva a omitir los valores de frecuencia nula en los gráficos de barras, polígonos de frecuencia e histogramas; dicha omisión también fue descrita por Bruno y Espinel (2005).
2. *Errores en interpretación de la finalidad de cada gráfico.* Por ejemplo, representar variables no comparables en el mismo gráfico, error encontrado por Li y Shen (1992).
3. *Errores de representación de números en la recta real,* detectados por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007). Por ejemplo, producir escalas no proporcionales o representar valores numéricos no ordenados.

4. *Errores conceptuales*, como confusión entre variable continua y discreta, representación incorrecta de un intervalo numérico, confusión entre variables y frecuencia o asociar un rango a un conjunto de distribuciones (y no a cada distribución).

Formación de profesores para enseñar matemáticas

Como hemos indicado, nuestra propuesta se dirige a completar la formación de profesores de Educación Primaria para enseñar estadística en este nivel educativo; por tanto es importante tener en cuenta los componentes de conocimiento que requieren los profesores para abordar con éxito la enseñanza. Shulman (1986) desglosó el conocimiento requerido por los profesores para abordar con éxito la enseñanza de la matemática en conocimiento del contenido, conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento del currículo. Esta investigación promovió un gran número de estudios orientados a la evaluación y desarrollo del mismo en los profesores de matemática (descritos, por ejemplo, en Even y Ball, 2009 y Llinares y Krainer, 2006).

En nuestra propuesta consideramos un marco teórico que ha tenido un gran impacto en la investigación sobre formación de profesores de matemáticas y de estadística, que es el del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008). Al igual que en el trabajo de Shulman (1986), se considera el conocimiento del contenido y el conocimiento del contenido pedagógico.

- El conocimiento del contenido se divide en tres componentes: a) El *conocimiento común del contenido*, es el que posee una persona (no necesariamente el profesor) después de haber estudiado el tema; b) El *conocimiento matemático avanzado* (que los autores denominan conocimiento en el horizonte matemático), va más allá del conocimiento común; incluye conocimiento del tema a un nivel superior y las conexiones con otras materias; y c) El *conocimiento especializado del contenido*, es el aplicado por el profesor para articular tareas de enseñanza referidas al tema a enseñar.
- Respecto al conocimiento didáctico del contenido, se considera: a) el *conocimiento del contenido y los estudiantes* o conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden un objeto matemático; b) el *conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT)* resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido y c) el *conocimiento del currículo*, que se refiere a las directrices curriculares, orientaciones, fines y motivaciones de las mismas, materiales curriculares y secuenciación del tema en los diferentes ciclos formativos.

Actividad desarrollada con futuros profesores

La actividad que llevamos a cabo en el curso se ha experimentado en los últimos cursos con futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada, distribuidos en pequeños grupos (20 - 30 alumnos por grupo). En cada curso han participado unos 100 estudiantes de segundo año de sus estudios universitarios. En el primer año se estudian, durante alrededor de 15 días, los gráficos y tablas estadísticas elementales, las medidas de posición central y dispersión y nociones de probabilidad. También se trabaja con un proyecto estadístico diferente del que se describe en este trabajo.

En la Universidad de Granada, la actividad se organiza en tres sesiones de clase, cada una de dos horas de duración. En la primera sesión, los participantes resuelven un proyecto estadístico, titulado *Comprobación*

tus intuiciones sobre el azar que se describe en Batanero y Díaz (2011), en el cual los futuros maestros recogen los datos a través de un experimento aleatorio y posteriormente comparan tres pares de variables estadísticas para concluir sobre las intuiciones del grupo sobre los fenómenos aleatorios. La secuencia de actividades es la siguiente:

1. *Presentación del proyecto y realización del experimento:* En la primera sesión, una vez que el formador de profesores explica la finalidad del proyecto, los futuros profesores llevan a cabo un experimento aleatorio para decidir si tienen o no buenas intuiciones sobre el azar. El experimento consta de dos partes. En la primera parte (secuencia inventada), cada participante inventa una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda sin realmente lanzar dicha moneda, de tal modo que otra persona pudiera pensar que se trata de una secuencia aleatoria y completa sus resultados en una hoja de registro. En la segunda parte (secuencia real) los participantes anotan en la hoja de registro los resultados de lanzar 20 veces una moneda (Ver Figura 1).

Experimento. Abajo tienes dos cuadrículas. En la primera de ellas escribe 20 resultados de lanzar una moneda como pienses que saldrían al realizar el experimento, pero sin hacerlo. Para rellenar la segunda fila, lanza la moneda 20 veces y escribe los resultados obtenidos. Pon C para cara y + para cruz.

Secuencia inventada:																				
Secuencia real (lanzando la moneda)																				

Figura 1. Experimento realizado por los futuros profesores para recoger sus propios datos

2. *Recogida de datos:* Finalizado el experimento, el formador de profesores inicia un debate pidiendo a los participantes, sugerencias para comparar las secuencias inventadas y reales generadas en el experimento en el total del grupo. Se acuerda comparar las siguientes variables estadísticas: número de caras, número de rachas y longitud de la racha mayor en las secuencias real y simulada. Cada estudiante anota los valores de estas seis variables en su propio experimento en una hoja de registro proporcionada por el profesor (Ver la primera línea de la hoja de recogida de datos en la Tabla 1).

Tabla 1. Hoja de recogida de datos en el experimento

Alumno. N°	Secuencia inventada			Secuencia real		
	N° caras	N° rachas	Longitud de la racha mayor	N°caras	N° rachas	Longitud de la racha mayor
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

3. *Análisis de los datos*: El formador proporciona a cada participante una copia de la hoja de registro con los datos obtenidos por el conjunto de la clase (20 a 30 alumnos) para las variables descritas. Como tarea extraescolar, para traer a la segunda sesión los futuros profesores realizan un informe escrito con los resultados del análisis de los tres pares de variables estadísticas (número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en las secuencias real e inventada de cada estudiante). Tienen libertad para el análisis de los datos. La mayoría realizan tablas de frecuencia y diversos tipos de gráfico, como diagramas de barras o de líneas; generalmente, también se calcula la media, moda y rango de cada variable. Deben finalizar el informe con una conclusión sobre la intuición de la aleatoriedad en el conjunto de estudiantes.
4. *Conclusiones*: Durante la segunda sesión se discute el análisis de datos y las conclusiones obtenidas en un debate general, organizado por el formador de profesores. La principal conclusión del análisis de los datos es que los estudiantes tienen buena intuición sobre el valor esperado en el número de caras, pues las secuencias inventadas por ellos tienen un número medio de caras cercano al valor teórico 10. En cambio, su percepción de la variabilidad o del número de rachas es mucho peor, ya que las secuencias son poco variables y la longitud de las rachas muy cortas. Tanto el análisis como las conclusiones son presentadas y discutidas en la clase por los estudiantes hasta llegar a un consenso.
5. *Análisis de los gráficos producidos por los estudiantes*. En la última parte de la segunda sesión y en la sesión tercera se examinan los diferentes gráficos producidos por los futuros profesores, con el fin de detectar posibles errores en su elaboración y corregirlos en lo posible. Para ello se examina en primer lugar si los gráficos elegidos son adecuados o no al tipo de variable. En segundo lugar se buscan aquellos gráficos en que los futuros profesores no llegan a formar la distribución, sino que representaron los datos uno a uno. Seguidamente se analizan las escalas producidas para detectar posibles problemas de falta de proporcionalidad, escalas demasiado amplias o que no cubren el rango de variación de las variables. Se comprueba igualmente que la representación de números e intervalos en la recta numérica sigue los convenios de representación numérica. Finalmente se pide a los futuros profesores que han cometido errores en algunos de los pasos anteriores, que vuelvan a elaborar los gráficos correctamente. Finalizada la actividad de corrección de gráficos se describen los diferentes niveles de lectura de gráficos y se pide pensar preguntas de cada uno de los niveles para los gráficos que han construido.

■ Conclusiones

La actividad descrita ha resultado interesante a los participantes que deseaban recoger sus propios datos para averiguar si sus intuiciones sobre la aleatoriedad eran correctas (o en qué puntos eran correctas o incorrectas). Además les proporcionó una oportunidad de aplicar sus conocimientos estadísticos elementales y reforzar así su conocimiento común y avanzado de estadística. El trabajo con proyectos les proporcionó un ejemplo de cómo llevar a cabo la enseñanza de la estadística con este método, por tanto reforzó su conocimiento del contenido y la enseñanza. La corrección de los errores en los gráficos producidos mejoró su competencia en la evaluación y su conocimiento del contenido y los estudiantes.

En consecuencia pensamos que actividades como la descrita permiten mejorar diferentes componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, sobre todo cuando se dispone de poco tiempo para la formación de los profesores. Una formación puramente matemática, que sólo tenga en cuenta el conocimiento del contenido no es suficiente. Esperamos que la descripción de esta experiencia, así como

la reproducción que se hizo en el curso corto ofrecido en Relme 31 sobre la misma pueda ser útil a los formadores de profesores.

■ Agradecimientos

Proyectos EDU2013-41141-P y y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

■ Referencias bibliográficas

- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. R. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (Relime)*, 19(1), 15-40.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.) (2011). *Estadística con proyectos* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Online: www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf.
- Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars
- Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficos estadísticos: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas*, 7, 57-85.
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education* 18(5), 382-393.
- Estrella, S., Olfos, R., Morales, S. y Vidal-Szabó, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (Relime)*, 20(3), 345-370.
- Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 99-119). La Laguna, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Even, R. y Ball, D. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.
- Friel, S., Curcio, F., y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158. doi: 10.2307/749671
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/Education/gaise/.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Li, D. Y., y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics* 14(1), 2-8.
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 429-459). Rotherdam: Sense Publishers.
- McGillivray, H. y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 109-120). New York: Springer.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las*

- enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria.* Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.
- Murray, S. y Gal, I. (2002). Preparing for diversity in statistics literacy: Institutional and educational implications. En B. Phillips (Ed.). *ICOTS-6 papers for school teachers.* [CD-ROM]. Cape Town: International Association for Statistics Education.
- Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.