

ANIMACIONES DE FUNCIONES TRASCENDENTES Y CAMPOS VECTORIALES EN GEOGEBRA

Alexandra Bulla Buitrago, Christian Camilo López Mora, William Alfredo Jiménez Gómez, Joel Fernando Morera Robles
Universidad de los Andes y Universidad Pedagógica Nacional. (Colombia)
alexandrabulla128@gmail.com, clopezcamilom@gmail.com, williamajg@gmail.com,
joemore05@gmail.com

Resumen

En este trabajo, describimos dos propuestas enfocadas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ámbitos universitarios. Estas propuestas, se diseñaron e implementaron con el objetivo de establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico y algebraico mediante el uso de la herramienta GeoGebra. En primera instancia, se usa la definición de campo vectorial para explicar el proceso general de programación y construcción de campos vectoriales en 2D y 3D. Posteriormente, se describe un proceso para realizar algunas animaciones que involucran movimientos rígidos sobre funciones, con el fin de comprender cambios sobre su dominio y rango. Por último, concluimos que el uso de la herramienta GeoGebra, permite establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico y algebraico, para generar una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en nuestros estudiantes.

Palabras clave: campos vectoriales; dominio y rango de una función; GeoGebra

Abstract

In this paper, we describe two proposals focused on higher education mathematics teaching and learning process. These proposals were designed and implemented with the aim of establishing relationships between the graphic and algebraic representation systems by using GeoGebra. Firstly, we describe a process to produce some animations involving rigid motions on functions, in order to understand changes in their domain and range. Subsequently, we use the definition of vector field to explain the general process of programming and construction of vector fields in 2D. Finally, we conclude that GeoGebra allows establishing relationships between the graphic and algebraic representation systems, to lead to better understanding of mathematical concepts in our students.

Keywords: vector fields; domain and range of functions

■ Introducción

En el contexto académico, existe un alto interés en los profesores de matemáticas por realizar propuestas de enseñanza y aprendizaje, que involucren situaciones con el uso de herramientas tecnológicas (Araya, 2007). De igual manera, se reconoce la importancia por el uso y las relaciones entre diferentes registros de representación para fortalecer el aprendizaje de los estudiantes respecto a los conceptos matemáticos (Gómez, 1997). En este sentido, implementamos una propuesta orientada a estudiantes universitarios en la ciudad de Bogotá, con el objetivo de establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico

y algebraico a partir del sistema de representación ejecutable.

En primera instancia, nos centramos en el desarrollo de una actividad para comprender la noción de campo vectorial en 2D y 3D. Esta actividad, la propusimos con base en aspectos que habíamos identificado en algunos cursos universitarios de cálculo vectorial en los que enseñamos dicho tema. Por ejemplo, sabíamos que era posible enseñar la definición de campo vectorial mediante el uso de un sistema algebraico y hacer una representación del campo vectorial en un plano cartesiano. Lo anterior implicaba que nuestros estudiantes representaran algunos puntos y sus vectores en 2D, sin comprender en su totalidad la verdadera representación y su comportamiento en general. Como docentes queríamos que los estudiantes obtuvieran la mejor representación de un campo vectorial. Por tal razón, diseñamos un proceso de construcción basados en la programación de GeoGebra. Esta construcción nos permitió enseñarles a nuestros estudiantes diversas características que no habíamos contemplado anteriormente. El uso de la GeoGebra nos permitió establecer relaciones entre el sistema de representación algebraico y gráfico, de igual manera, los estudiantes observaron la construcción de un campo vectorial paso a paso. También, se realizó una programación para determinar el dominio del campo vectorial, luego la construcción de los vectores. Finalmente, cada estudiante obtuvo la representación en 2D y 3D de diversos campos vectoriales de manera dinámica. Adicionalmente, durante el desarrollo de la propuesta se logró evidenciar interés de los estudiantes al comprender la utilidad de los campos vectoriales en diferentes situaciones. Por ejemplo, al modelar distribuciones de fuerzas de naturaleza electromagnética o gravitatoria en el espacio, en el estudio del movimiento de los vientos o al analizar las características del vuelo de un avión.

Posterior a la actividad de campos vectoriales, describimos el proceso de construcción que utilizamos para diseñar algunas animaciones en la herramienta GeoGebra, basándonos en funciones sobre el plano cartesiano. Esta idea surge con la intención de afianzar conceptos relacionados con los movimientos rígidos en el plano sobre una función haciendo énfasis en identificar el cambio de las características propias de la función (dominio, rango,...). Esta actividad se relaciona con la actividad de campos vectoriales en sus propósitos de dar sentido a un concepto matemático a partir de las diferentes traducciones en los sistemas de representación y lograr un mejor aprendizaje de nuestros estudiantes con el uso de herramientas tecnológicas.

■ Fundamentos teóricos

Las matemáticas escolares son complejas, porque cada concepto matemático admite una multiplicidad de significados (Cooney, 2004, p. 511; Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia, 1997). Los conceptos matemáticos tienen sus propias características y se pueden evidenciar a partir de sus diferentes representaciones (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2016). Seguimos el trabajo de Kaput (1992) quién menciona que un sistema de representación es “un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523).

En esta propuesta, consideramos el sistema de representación ejecutable definido por Cañadas, Gómez y Pinzón (2016) quienes afirman que el programa de geometría dinámica GeoGebra se considera un sistema de representación ejecutable, porque tiene elementos propios y sus propias reglas para combinar, operar y representar con esos elementos. Por tanto, estableceremos relaciones entre las representaciones simbólicas y gráficas por medio de GeoGebra de algunos conceptos y procedimientos propios del Cálculo. En

términos específicos nos centramos en la transformación de funciones y algunos conceptos básicos como la función, su dominio y rango y los campos vectoriales.

En cuanto a la enseñanza del cálculo, Hitt (2018) reconoce que “en las primeras investigaciones con tecnología se tenía una gran tendencia en tratar de demostrar que dentro de un medio tecnológico podría ser más adecuada la enseñanza del cálculo con tecnología”.

Para el desarrollo de esta propuesta, tomamos como referente otros trabajos que utilizan la herramienta GeoGebra para abordar el aprendizaje y enseñanza de temas matemáticos. Por ejemplo, Rey, Bulla, Jiménez, y Rojas (2013) proponen utilizar GeoGebra para construir animaciones creativas para comprender características de las funciones en un plano cartesiano. También López, Morera, y Jiménez (2016) utilizaron GeoGebra como recurso para realizar una introducción a la noción de campos vectoriales en 2D.

■ Método y resultados

En este apartado, describimos el método y los resultados obtenidos durante el desarrollo de las actividades propuestas. La propuesta de animaciones de funciones, implementó con estudiantes de una Licenciatura en Matemáticas en una universidad pública de Bogotá. En cuanto a la construcción de campos vectoriales, se implementó con estudiantes de Ingeniería en una universidad privada en Bogotá. Para la primera actividad, nos basamos en la noción de campo vectorial en términos generales.

Un campo vectorial es una función $F: D \subseteq R^n \rightarrow R^n$ que relaciona a cada punto $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ del dominio correspondiente el vector que tiene la forma $F(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X))$. Con lo anterior, establecimos las siguientes expresiones para 2D y 3D respectivamente: $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ y $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$.

El primer paso de la construcción con los estudiantes, se relaciona con el dominio de puntos que determinará el campo vectorial. Por ejemplo, en la figura 1, se muestra el dominio de puntos que fue generado por un deslizador y con el uso de la instrucción *secuencia* en la herramienta GeoGebra.

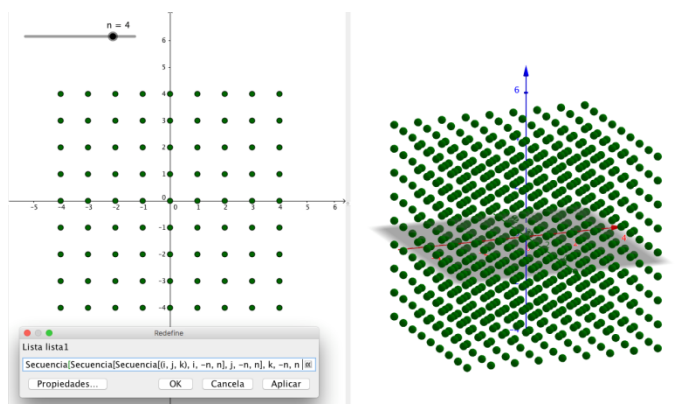


Figura 1. Secuencia de puntos

Es importante resaltar que los estudiantes identificaron que era necesario solo una programación para determinar esta secuencia en 2D y 3D. Es decir, programar la lista de puntos en 3D genera directamente los puntos en 2D. En el mismo sentido, esta programación inicial permite generar la construcción del dominio para cualquier campo vectorial. Posteriormente, construimos una secuencia de vectores (figura 2), con el objetivo que los estudiantes identificarán como determinar una secuencia de vectores relacionados con el dominio dado.

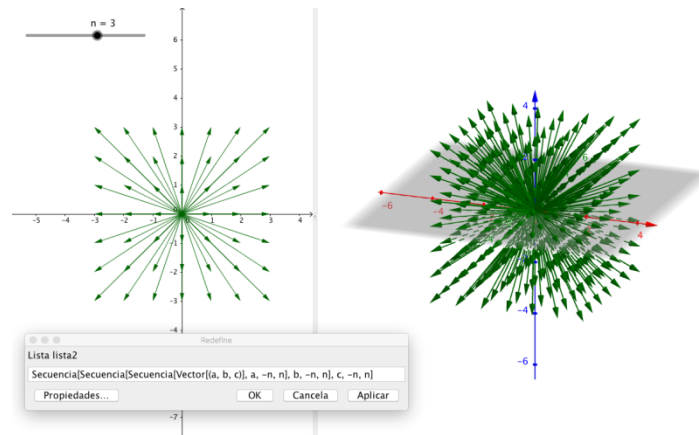


Figura 2. Secuencia de vectores

Por último, se construye el campo vectorial. Por ejemplo, en la figura 3, se muestra la representación del campo vectorial en 2D correspondiente a $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ en donde $P(x, y) = -y$; $Q(x, y) = x$, y la representación en 3D correspondiente a $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ en donde $P(x, y, z) = -y$; $Q(x, y, z) = x$; $R(x, y, z) = z$.

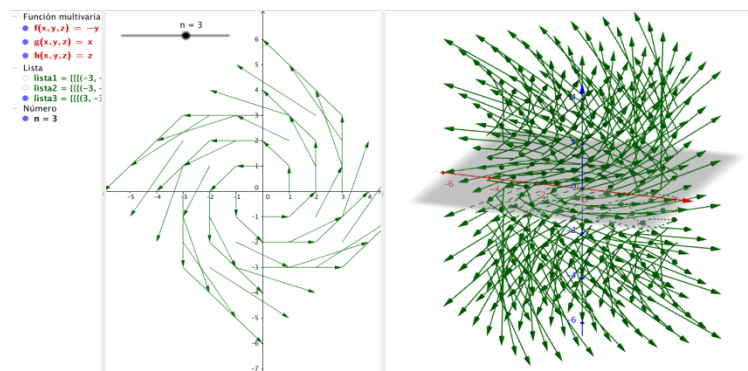


Figura 3. Campo vectorial

Al finalizar esta actividad, obtuvimos que los estudiantes lograron realizar la representación de algún campo vectorial en 2D y 3D logrando explicar a sus compañeros la definición del campo vectorial. La figura 4, muestra algunas representaciones que realizaron nuestros estudiantes.

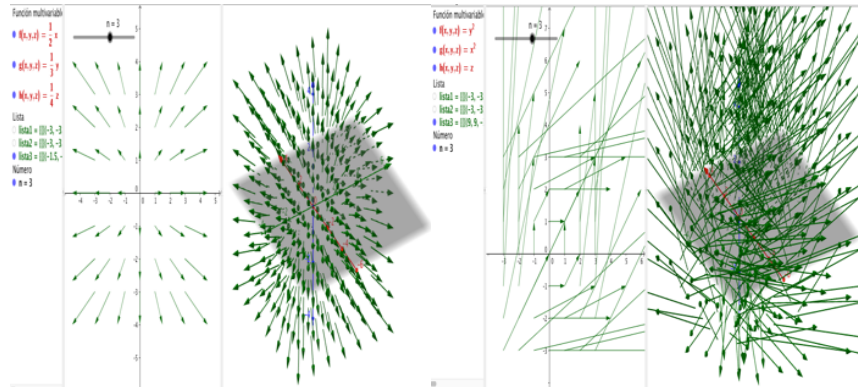


Figura 4. Campo vectorial 2

En cuanto a la propuesta de animaciones de funciones, esta idea se centra en utilizar nociones de movimientos rígidos, como rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano, para comprender nociones de dominio y rango de funciones cartesianas y polares. Por ejemplo, se utiliza la construcción de una animación que permita evidenciar las características antes nombradas mediante el uso de deslizadores y de comandos como `Funcion[f,a,b]`, que permite graficar funciones con dominio restringido. Por ejemplo, tomamos como referencia la $f(x) = \text{sen}x$, luego, se realizan transformaciones para obtener la función $f(x) = \text{sen}(x - 0.5) - 4.5$. Posteriormente, se cambia el dominio de la función, para el diseño del movimiento de un *pequeño gusanito con un pájaro* sobre el valle (figura 5). A partir de la figura 5, se realizan cambios para generar nuevas gráficas (figura 6). Además, consideramos algunas funciones polares para este trabajo definidas como: $\text{Curva}(3z(t) \ 3 \cos(t) - 15, z(t) \ 3 \text{sen}(t + a) + 7.79, t, 0, 6.28319)$, $\text{Curva}(3r(t) \ 3 \cos(t) - 19, r(t) \ 3 \text{sen}(t) + 10, t, 0, 6.28319)$ y $\text{Curva}(3r(t) \ 3 \cos(t) - 19, r(t) \ 3 \text{sen}(t) + 10, t, 0, 6.28319)$. La construcción está basada en 4 deslizadores y los lectores pueden ver dicha aplicación en el enlace <https://www.geogebra.org/m/eVNJ3w2a>.

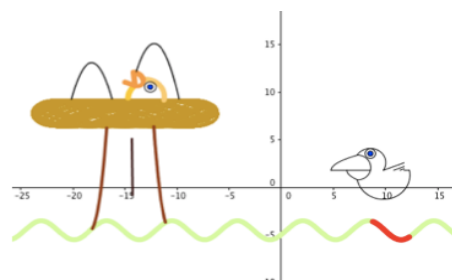


Figura 5. Representación inicial del Barco

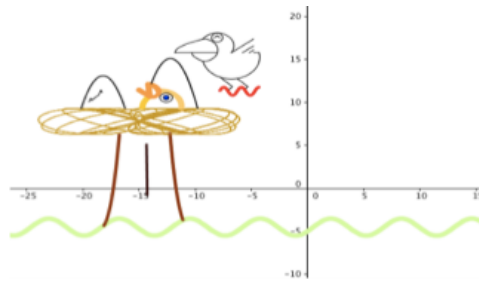


Figura 6. Movimiento generado

■ Conclusiones

El uso de la herramienta GeoGebra como sistema de representación manipulable permitió que los estudiantes identificaran relaciones entre representaciones gráficas y simbólicas. En los campos vectoriales, los estudiantes afianzaron la definición de campo vectorial al realizar un proceso de construcción para la representación del campo vectorial en 2D y 3D. En cuanto a la animación de funciones, nuestros estudiantes pudieron observar e identificar características de las funciones y realizar diversos movimientos rígidos en el plano con funciones dadas.

La propuesta de actividades con el uso de un software educativo, en este caso GeoGebra, generó interés en los estudiantes por el aprendizaje de conceptos matemáticos relacionados con los campos vectoriales y las animaciones de funciones.

Las animaciones de funciones y los campos vectoriales son contenidos que deben seguirse trabajando para su aprendizaje y enseñanza, se deben continuar realizando estas propuestas enfocadas al uso de herramientas tecnológicas y con aplicaciones o uso de situaciones cercanas al estudiante.

Aunque las propuestas fueron implementadas en cursos universitarios, consideramos que otros colegas puedan desarrollar este tipo de actividades con estudiantes de otros niveles escolares.

■ Referencias bibliográficas

- Araya, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2(3), 11-44.
- Cañadas, M., Gómez, P. y Pinzón, A. (2016). *Módulo 2: Análisis de contenido*. Documento no publicado. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/6453/1/ApuntesModulo2MAD3.pdf>
- Cooney, T. (2004). Pluralism and the teaching of mathematics. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby & K. Wallby (Eds.), *23 International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 503- 517). Göteborg: National Center for Mathematics Education.
- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, 10(1), 93-111.
- Hitt, F. (2018). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Revista electrónica AMIUTEM*, 2(2), 1-19
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 515-556.

- López, C., Morera, J. y Jiménez, W. (2016). *Campos vectoriales en GeoGebra*. Congreso Latinoamericano de GeoGebra. Medellín. Memorias en proceso de publicación.
- Rey, R., Bulla, A., Jiménez, W., y Rojas, S. (2012). *El dominio, rango y la transformación de funciones construyendo animaciones en GeoGebra*.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., y Segovia, I. (1997). *Investigación, diseño y desarrollo curricular*. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-318). Madrid: Síntesis.