LA VALIDACIÓN MATEMÁTICA COMO PROCESO DE CONSTRUCCIÓN COLABORATIVO. UNA EXPERIENCIA CON ACODESA

Álvaro Sebastián Bustos Rubilar, Gonzalo Zubieta Badillo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (Chile, México)
abustos@cinvestav.mx, gzubieta@cinvestav.mx

Resumen
En este trabajo reportamos una experiencia de implementación de una actividad de contenido geométrico diseñada bajo los lineamientos de la metodología ACODESA (aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión), mostramos cómo los estudiantes, luego de validar individualmente una conjetura, construyen de manera colaborativa una nueva validación para la misma conjetura. El estudio es de corte cualitativo y la población participe estuvo compuesta por futuros profesores de matemática.

Palabras clave: validación matemática, metodología ACODESA, aprendizaje colaborativo

Abstract
In this paper, we report an experiment on the implementation of a geometry activity designed under the guidelines of collaborative learning, scientific debate and self-reflection (CLSDSR) methodology. We show how students, after individually validating a speculation, collaboratively constructed a new validation for the same speculation. This is a qualitative study, which was carried out with mathematics prospective teachers.

Key words: mathematics validation, ACODESA method, collaborative learning

Introducción

En este trabajo presentamos parte del análisis de una experimentación llevada a cabo con futuros profesores de educación secundaria de México, a quienes se les propusieron actividades de contenido geométrico con la intención de que conjeturaran y posteriormente validaran dichas conjeturas. En esta investigación ocupamos el término validación para referirnos a los procedimientos (orales o escritos) que un estudiante pudiera proporcionar para justificar una aserción matemática. Esta validación la entendemos como un proceso de carácter dinámico el cual esperamos evolucione (en el sentido de Brousseau) de acuerdo con el contexto en el cual trabaje el estudiante.

Las actividades fueron diseñadas siguiendo los principios de la metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión (ACODESA), propuesta por Hitt (2007). Ello, con el fin de generar en el aula un ambiente de interacción social y trabajo colaborativo, donde los estudiantes tuvieran oportunidad de debatir e intercambiar ideas para refinar sus validaciones. La metodología ACODESA promueve el aprendizaje colaborativo mediante la interacción social y el uso de tecnología, con esta metodología se logra generar un ambiente donde los estudiantes pueden conjeturar, argumentar y validar (Hitt, Sabolla, & Cortés, 2016). El objetivo de este trabajo fue determinar cómo los estudiantes, luego de validar individualmente una conjetura, construyen en forma colaborativa, al trabajar en equipo, una nueva validación para la misma conjetura.

Referentes teóricos

Los principales elementos teóricos en los cuales está sustentada la investigación tienen relación, por una parte, con la metodología ACODESA (Hitt, 2007; Hitt et al., 2016) y el debate científico en la clase de matemáticas (Alibert & Thomas, 1991; Legrand, 2001). Por otra parte, se utilizó la tipología de niveles y tipos de prueba confeccionada por Balacheff (1987) para identificar y categorizar los procedimientos elaborados por los estudiantes para validar sus conjeturas geométricas, y así poder distinguir las diferencias entre la validación formulada por un estudiante de manera individual y la confeccionada durante la etapa de trabajo en equipo.

A partir del análisis de los procedimientos elaborados por estudiantes para validar sus conjeturas, Balacheff (1987) propone dos niveles de prueba; pragmáticas e intelectuales. En el primero encontramos las pruebas que recurren a la acción y a ejemplos concretos.

> ***Empirismo ingenuo***. El estudiante afirma la validez de un enunciado después de verificarlo en casos particulares. En este tipo de prueba se evidencia una resistencia del estudiante a la generalización.
>
> ***Experiencia crucial***. El estudiante verifica con un ejemplo lo menos particular posible. En este tipo de prueba el alumno generaliza explícitamente a partir del ejemplo con el cual verifica el enunciado.
>
> ***Ejemplo genérico***. El estudiante da un ejemplo que representa la generalidad, es decir, un ejemplo que no es considerado un caso particular, sino un representante de una clase de casos para los cuales sí es verdadero el enunciado. En este tipo de prueba el enunciado es justificado por medio de operaciones y transformaciones del objeto matemático.

En el segundo nivel se encuentran las pruebas apoyadas en la formulación de propiedades matemáticas puestas en juego y en la relación que existe entre ellas.

> ***Experiencia mental***. El estudiante explica las razones mediante el análisis de las propiedades implicadas en el enunciado, descontextualizándolo y sacándolo de una representación particular.
>
> ***Calculo sobre los enunciados***. Construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, originadas en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas. Este tipo de prueba oscila entre la experiencia mental y la demostración.

Otro referente teórico utilizado en la investigación, son los lineamientos del debate científico en la clase de matemática (Alibert & Thomas, 1991; Legrand, 1993, 2001). En el debate científico en matemáticas deben prevalecer los argumentos racionales –justificaciones sustentadas en el corpus teórico de la matemática–, más que en evidencia empírica o declaraciones carentes de una validación propia de la disciplina. Durante el desarrollo del debate, el rol del profesor consiste en facilitar la manifestación de ideas y permitir esclarecer los diferentes puntos de vistas para que los estudiantes sean quienes defiendan sus aserciones, siempre y cuando sientan que son más razonables que las expresadas y justificadas por sus pares. Los estudiantes mismos deben ser quienes lideren el consenso de lo debatido.

Metodología

La investigación es de corte cualitativo y la población participante estaba compuesta por futuros profesores de matemáticas nivel secundaria. El tiempo dedicado para implementar cada actividad fue de dos sesiones de clases de dos horas cada una. El propósito general de las actividades fue generar un ambiente de trabajo en el cual los estudiantes pudieran conjeturar y enseguida validar sus conjeturas en forma individual y en colaboración con sus pares. Como el objeto de estudio en la investigación son las validaciones elaboradas por los alumnos, las actividades fueron diseñadas para que los estudiantes no dedicaran mucho tiempo al proceso de conjeturar, y así disponer de mayor tiempo para elaborar validaciones.
La recolección de datos se hizo a través de distintas fuentes, se utilizaron videocámaras para capturar planos generales y específicos en el salón de clases. También se grabó, por medio de grabadoras de audio, todos los diálogos producidos por los estudiantes. Además, fueron recopiladas las hojas de trabajos de los alumnos cuando trabajaron en las distintas etapas de la metodología ACODESA, detalladas a continuación.

1. **Trabajo individual**. El estudiante desarrolla la actividad en forma individual con papel y lápiz.
2. **Trabajo en equipo**. Los estudiantes trabajan en equipos compuestos por dos o tres integrantes.
3. **Debate científico**. Los estudiantes debaten, en el sentido de Legrand (2001) las propuestas de solución presentadas por cada equipo.
4. **Autorreflexión**. Cada estudiante reconstruye individualmente con papel y lápiz la respuesta al problema.
5. **Institucionalización**. El docente presenta la solución institucional –en el sentido de Brousseau (2002) – del problema.

El enunciado principal de la actividad de la cual se analizaron los resultados reportados aquí trataba de dos cuadrados congruentes adyacentes; en el interior de uno se tenían cuatro círculos congruentes tangentes entre sí y tangentes al cuadrado, mientras que en el otro cuadrado se tenía un círculo inscrito (Figura 1).

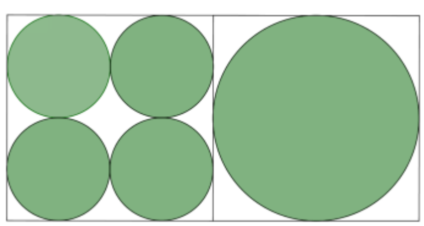

Figura 1. Círculos inscritos.

Por limitaciones de espacio, en este escrito solo se reporta el análisis de uno de los incisos de la actividad propuesta a los estudiantes. Se analiza la justificación proporcionada por los alumnos para validar la conjetura formulada por un estudiante ficticio llamado Oscar.

Oscar: ...El diámetro de un círculo pequeño es la mitad del lado del cuadrado, y el del círculo grande es igual al lado del cuadrado.

A partir de la afirmación de Oscar se solicitó a los estudiantes responder la siguiente pregunta: *¿cuál sería para ti la justificación matemática de la conjetura formulada por Oscar?*

■ Análisis de resultados

Por razones de espacio solo mostraremos el caso de un equipo integrado por cuatro estudiantes; Karina, Michel, Juan y Marce. Cada estudiante elaboró una validación durante la etapa de trabajo individual, y durante el trabajo en equipo contrastaron sus respuestas e intercambiaron ideas y comentarios que ayudaron al surgimiento de argumentos cada vez más sólidos para justificar la conjetura de Oscar. Por ejemplo, en la etapa de trabajo individual Marcela elaboró la siguiente respuesta (Figura 2).

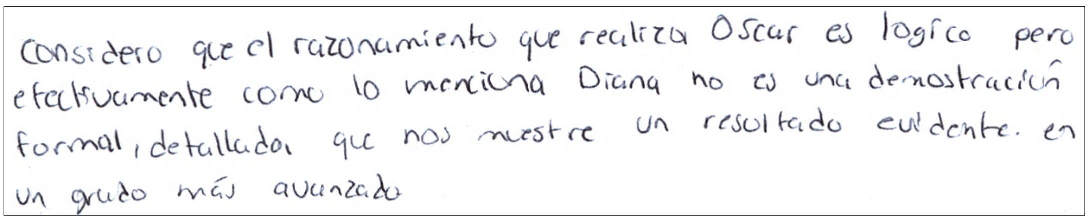
Considero que el razonamiento que realiza Oscar es lógico pero efectivamente como lo menciona Diana no es una demostración formal, detallada que nos muestre un resultado evidente. en un grado más avanzado

Figura 2. Validación elaborada por Marcela.

Observamos que la validación proporcionada por Marce tiene características de un discurso descriptivo, más que el de una justificación matemática. Ello, porque la estudiante menciona relaciones, pero no las justifica, además de afirmar de diferente manera lo ya dicho por Oscar. Esto último quedó en evidencia en la etapa de trabajo en equipo, la cual inició con la lectura de la validación proporcionada por Marce. Luego que la estudiante finalizara de leer su respuesta a sus compañeros, Juan intervino y afirmó que su justificación era similar a lo formulado por Oscar.

[1] Juan: *Más o menos como lo que va diciendo Osc...*
[2] Marce: *Sí, más o menos lo que dijo Oscar.*
[3] Juan: *Sí, es lo que dijo Oscar.*
[4] Marce: *Yo decía que era por lo de tangencias, pero ¿podría yo hacer eso para justificarlo?*

En el diálogo entre Juan y Marce observamos que Juan no considera una justificación lo hecho por su compañera, incluso la misma estudiante da indicios en [4] de no estar convencida de si puede justificar como lo hizo. Luego de lo anterior, es Juan quien explica a sus compañeros su forma de validar lo conjeturado por Oscar.

[5] Juan: *Si trazamos una paralela a un lado del cuadrado, que pase por el centro de la circunferencia* [grande]*, nos daríamos cuenta de que efectivamente, el segmento determinado por los puntos de tangencia de la circunferencia con respecto al cuadrado forma un lado del mismo cuadrado, es decir, si trazáramos una paralela y luego que lo determina su punto de tangencia, se forma un segmento igual al del lado del cuadrado.*
Del mismo modo, si trazamos una paralela a cualquiera de los cuatro lados del cuadrado, que pase por... digamos que hacemos lo mismo, pero con las

circunferencias chiquitas, también se forma un lado del cuadrado.
...entonces, ya nos daría que la suma de los diámetros chiquitos es igual al diámetro del círculo mayor, por haber trazado las paralelas y habernos dado cuenta de eso.

En la propuesta de Juan, observamos que él trata de justificar visualmente mediante el trazado de rectas o segmentos paralelos a los lados del cuadrado. Para el caso del círculo mayor, explica por qué el segmento paralelo que propone trazar por el centro de la circunferencia pasa por los puntos de tangencia de la misma. Probablemente, Juan apoya sus argumentos en las propiedades de la circunferencia inscrita en un polígono regular como el cuadrado, aunque no lo explicita.

[6] Marce: *No que él* [Oscar] *decía que este diámetro* [de un círculo pequeño] *era la mitad de un lado del cuadrado.*
[7] Juan: *Pero primero dice: el radio de un círculo pequeño es la mitad de un lado del cuadrado, y del círculo grande es igual a un lado del cuadrado.*
Yo con la paralela, yo según "demostré" efectivamente, que un diámetro del círculo grande es igual a un lado del… cuadrado.

Juan supone haber demostrado de manera visual la conjetura de Oscar, aunque Marce y sus otros compañeros de equipo no daban muestras de estas convencidos de lo dicho por Juan. Luego de intercambiar algunas ideas, Marce intervino nuevamente para tratar de explicar y dar las razones de lo que ella trató de hacer al retomar su respuesta.

[8] Marce: *Es que yo decía que trazáramos la línea de tangencia.*
[9] Juan: *Mm...*
[10] Marce: *Que es esta* [trazo rojo en Figura 3]*, la que pasa por este punto y este punto... y al verlo así, pues nos damos cuenta de que divide en la mitad* [al lado del cuadrado].
Se supone que si este es tangente... se supone que si [los círculos pequeños] *son tangentes entre sí y los círculos son iguales. Y si pasamos la línea de tangencia por la mitad* [entre dos círculos pequeños]*, esta línea de tangencia va a dividir al segmento* [lado del cuadrado] *por la mitad, ¿por qué? porque este* [diámetro de un círculo pequeño] *es igual a este* [diámetro del círculo tangente al anterior].

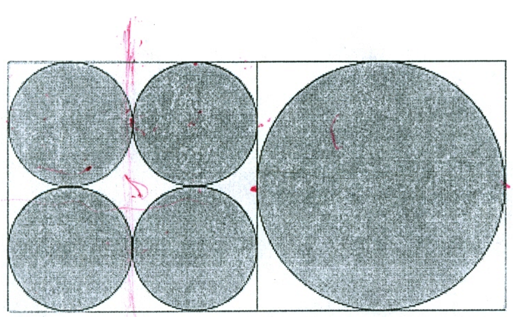

Figura 3. Trazos señalados por Marce.

Ambos estudiantes trataron de justificar de manera similar, mediante el trazo de segmentos o rectas. La diferencia entre sus validaciones es la forma, por una parte, Juan sostiene que el segmento paralelo a un lado del cuadrado y que pasa por el centro del círculo mayor, pasará también por los puntos de tangencia. Entonces, el segmento que une los puntos de tangencia será un diámetro del círculo e igual al lado paralelo del cuadrado, y de forma análoga para justificar que el diámetro de un círculo pequeño es la mitad del lado del cuadrado. Por otra parte, la estrategia de Marce fue trazar un segmento que pasara por el punto de tangencia entre dos círculos tangente (trazo rojo en

Figura 3). Los dos estudiantes basan sus afirmaciones en el trazado de segmentos auxiliares y no explicitan las propiedades relacionadas con sus afirmaciones, aun así, consideramos sus validaciones como pruebas de tipo ejemplo genérico, ya que siempre se refieren a la figura como una representación general. Aunque no observamos una prueba intelectual, sí notamos un claro avance en los argumentos escrito por Marce, por ejemplo, y los que proporciona oralmente cuando dialoga con Oscar. Argumentos que son expresados de manera más formal por escrito y mejorados en las siguientes etapas de la metodología ACODESA, debate y autorreflexión.

Conclusiones preliminares

En general, en las hojas de trabajo de los estudiantes se observaron desde validaciones apoyadas en evidencia empírica (verificaciones para casos particulares), hasta justificaciones más apegadas a pruebas intelectuales, en el sentido de Balacheff (1987). Aquellos estudiantes quienes apoyaron sus argumentos en evidencia empírica fueron quienes más enriquecieron sus validaciones durante la etapa de trabajo en equipo y de debate.

Los resultados obtenidos nos permiten, de manera preliminar, concluir que las actividades diseñadas bajo los lineamientos de la metodología ACODESA ayudaron a crear un ambiente propicio en el aula, donde los estudiantes tuvieron instancias en las cuales validaron en forma individual una conjetura, y luego al trabajar en equipo compartieron y contrastaron sus validaciones con las confeccionadas por sus compañeros. Esta forma de trabajo colaborativo generó un ambiente en el cual los estudiantes intercambiaron ideas y puntos de vista, hecho que les ayudó para refinar sus validaciones, y a la vez, aportar en la construcción de una nueva validación como equipo, consensuada por todos. Observamos que al implementar actividades enmarcadas en ACODESA la calidad de los argumentos utilizados por los estudiantes para justificar una conjetura matemática mejoró, sobre todo durante las etapas en las cuales interactuaron entre ellos.

Referencias bibliograficas

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215–230). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Klower Academic.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés*, 65–88.

Hitt, F., Sabolla, M., & Cortés, J. C. (2016). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. *En proceso de publicación*.

Legrand, M. (1993). Debat scientifique en cours de mathematiques et specificite de l'analyse. *Repères-IREM*, *10*, 123–159. Recuperado a partir de http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/10_article_68.pdf

Legrand, M. (2001). Scientific Debate in Mathematics Courses. En *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 127–135).