VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

HISTORIA E HISTORICIDAD DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES: ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS

José Carlos Cifuentes
Universidade Federal do Paraná. (Brasil)
jccifa@gmail.com

Resumen
Este artículo expone una forma de abordar los “contenidos matemáticos” en la formación de profesores de matemática enfatizando su “sentido pedagógico”. Uno de los ingredientes para alcanzar este propósito es el estímulo y el desarrollo de la sensibilidad sobre formas del pensamiento matemático que no se reducen a técnicas y algoritmos ni a la lógica del proceso matemático, pero que son importantes para una adecuada formación matemática de un profesor. Formación que, como veremos, involucra una visión diferente de la historia de la matemática, su “historicidad”, la que con su carácter epistemológico pone en evidencia la dinamicidad del conocimiento matemático.

Palabras clave: formación matemática del profesor, contenidos matemáticos, sentido pedagógico de los contenidos, historicidad de la matemática, dinamicidad del conocimiento matemático.

Abstract
The aim of this paper is to show a way of approaching “mathematical contents” in mathematical teachers’ training, emphasizing their “pedagogical sense”. One of the elements to achieve this purpose is the stimulation and development of the sensibility on forms of mathematical thinking that are not reduced to techniques and algorithms nor to the logic of mathematical process, but that are important for an adequate teacher’s mathematical training, which, as we shall see, involves a different view of mathematics history, its “historicity”, that with its epistemological character highlights the dynamism of mathematical knowledge.

Key words: teacher’s mathematical training, mathematical contents, pedagogical sense of contents, mathematical boom, historicity of mathematics.

Introducción

Este artículo podría también titularse “La historicidad de la matemática, una alternativa a la enseñanza de la historia de la matemática en la formación de profesores”, pues resalta “la historicidad” de los conceptos matemáticos como un enfoque alternativo a la enseñanza de la matemática a través de su historia epistemológica, una historia interna al pensamiento matemático que deberá poner en evidencia su dinamicidad y la posibilidad de recurrir a formas de pensamiento no lógico-formales que también dan acceso al conocimiento matemático.

La propia naturaleza del problema nos induce a un doble tratamiento:

1) un tratamiento matemático en que serán discutidas "nuevas" concepciones o concepciones ampliadas de matemática, y

2) un tratamiento pedagógico en que se discuta la relevancia de lo anterior para la formación de un profesor de matemática, más aún, diríamos, para la adecuada "formación matemática" de un profesor de matemática, una formación que deberá ser no tradicional en el sentido de que cuestiona las concepciones usuales de enseñanza de la matemática a nivel de pregrado, concepciones que muchas veces enfatizan el carácter lógico-deductivo de las teorías matemáticas que son enseñadas, descuidando los aspectos no-formales que les dieron origen.

Un primer abordaje del problema de la historicidad de la matemática para delimitar su alcance y posibilidades fue propuesto por mí como tesis de maestría en Educación Matemática en la Universidad Federal de Paraná - Curitiba/Brasil, a inicios de 2012 y desarrollado, como tal, bajo mi supervisión, por Chyczy (2014). En 2016, durante mi estadía de posdoctorado en la Universidad Estatal de Maringá - Brasil, ofrecí una conferencia con el título "Un paseo por la floresta matemática a través de su historicidad" a partir de la cual organicé y publiqué el artículo (Cifuentes, 2016) en un número especial de la revista *REVEMAT* cuyo tema central fue *Filosofía de la Educación Matemática*. El presente artículo, entonces, es un avance en la dirección ya trazada por esas investigaciones preliminares. Él va dirigido para los profesores de matemática en formación y para los profesores formadores de profesores a fin de motivarlos a una reflexión pedagógica sobre su propia práctica en clase.

Una de las ideas centrales propuesta en este artículo, veremos, es que la historicidad, a diferencia de la historia, exige un cambio en las concepciones usuales de matemática: de una matemática ya sistematizada como un cuerpo organizado de conocimientos a una matemática pensada como actividad, cuya dinamicidad pone en evidencia formas de pensamiento matemático que incluyen otros tipos de razonamiento que escapan de lo puramente lógico-formal y, por tanto, con una fuerte dimensión epistemológica en la interpretación y discurso históricos, discurso que podríamos llamar "historia epistemológica de la matemática".

Nuestra motivación principal, que constituyó el eje conductor de este trabajo y que muestra la importancia de la historia y filosofía de la matemática para su enseñanza, fue la siguiente citación de Albert Einstein:

> Concuerdo plenamente en cuanto a la importancia y al valor educativo de la metodología y también de la historia y filosofía de la ciencia. Hoy, muchas personas – y también científicos profesionales – me parecen alguien que vio miles de árboles pero nunca una floresta [un bosque]. Un conocimiento de las bases históricas y filosóficas proporciona aquel tipo de independencia de los preconceptos de su generación que afectan muchos científicos. Esta independencia creada por el conocimiento filosófico es – en mi opinión – la marca de distinción entre un mero artesano o especialista y un verdadero investigador de la verdad. (Howard, 2006, p. 3)

En la siguiente sección describiremos brevemente lo que entendemos por "floresta" en el campo de la matemática. Preferimos "floresta" en lugar de "bosque" porque trae una connotación de "paisaje" con una carga interpretativa que la diferencia de un "mero" fragmento de la naturaleza.

La floresta matemática

Parafraseando la citación anterior de Einstein podríamos decir: *Una formación puramente técnica y algorítmica en matemática nos capacitaría, sin duda, para identificar miles de árboles de un bosque matemático en sus especificidades, sin embargo, no nos educaría para "percibir" la floresta matemática.*

"Ver" o "percibir" la floresta matemática exige colocarnos en un nivel superior de reflexión, observar no solamente las ideas sino

- el movimiento de las ideas,
- la dinámica del conocimiento.

Nos exige procurar no solo la consistencia lógica de los "contenidos matemáticos" que es lo que los encapsula a través de su exigencia de rigor y exactitud, sino también, y principalmente,

- la claridad de los métodos y
- la fluidez del pensamiento en el campo de la matemática.

Comparando con la apreciación en arte, podemos expresar que pensar que la matemática se reduce a fórmulas, técnicas, algoritmos y demostraciones es como ir a un museo de arte y apreciar solamente las molduras o marcos de los cuadros y no los mismos cuadros. Ellos traen el paisaje no lógico de la floresta matemática cuya percepción requiere de facultades como la intuición y la imaginación, importantes también para la creatividad en matemática.
Ahí reside, creemos, la diferencia entre ser un conocedor de la matemática y ser un usuario de la matemática. Y esa diferencia debe guiar el aprendizaje de nuestros alumnos y nuestra enseñanza como profesores.

Los "contenidos matemáticos" y la historicidad de la matemática: un problema pedagógico

La enseñanza técnica de la matemática se basa usualmente en la presentación del conocimiento en forma de "contenidos" encajonados o encapsulados en didácticas y metodologías, base del curriculum escolar. A los "contenidos" se les atribuye el papel principal de informar (una vez que pueden ser colocados en libros llamados "didácticos"), y no el de formar, ellos son cristalizados, sistematizados, formalizados para ser colocados en disciplinas, en áreas.

Entonces, ¿cuál es el sentido pedagógico de los contenidos matemáticos? La palabra "pedagógico" en esa expresión apunta para un movimiento de "conducción dinámica" del conocimiento, a través de los contenidos, para una formación matemática más amplia y no para un mero entrenamiento en técnicas de matemática, y es inspirado en la función originaria del así llamado "pedagogo" de la época de los griegos. El pedagogo era el guía que conducía al niño o al joven en la dirección del conocimiento.

Lo que llamamos el "sentido pedagógico" de los contenidos matemáticos se consigue a través de dos caminos:

1) poniendo en evidencia el origen conceptual de esos contenidos y el camino de su construcción teórica (su génesis, sus mutaciones, su evolución), lo que llamaremos su "historicidad", que solamente se revela en la dinámica del conocimiento. Ella exige incorporar, como veremos, aspectos de la historia y epistemología de la matemática, o mejor conjugadamente, de la historia epistemológica de la matemática;

2) mejorando la sensibilidad y perspicacia sobre formas del pensamiento matemático, las cuales no se reducen a la aplicación de técnicas y algoritmos, no se limitan a la lógica del proceso matemático, pero son importantes para una adecuada formación matemática de un profesor en el camino de la creatividad, con el concurso firme de la intuición y la imaginación.

Como sugerirán los dos ejemplos que veremos a continuación, ejemplos que fueron implementados en cursos específicos de Historia y Filosofía de la Matemática en nuestra universidad, podremos considerar la historicidad de la matemática como un capítulo de la propia matemática y no como un asunto sobre la matemática. La historicidad se constituye como un ver interno de la matemática y no un ver externo. El ver interno no es historia, pero revelará el lado orgánico de la matemática que usualmente queda vedado.

Una versión diferente, aunque próxima, de nuestra noción de "historicidad", puede ser encontrada en Paty (2005). Para Paty (2005) la historicidad torna el objeto de estudio más inteligible en la medida en que permite entender las ampliaciones de racionalidad que posibilitan el progreso del conocimiento.

La historicidad de la matemática traerá un perfil metafísico de la matemática pues envuelve la búsqueda sobre el origen, la génesis, lo que podríamos llamar el *ADN* de los conceptos, la mutación, la evolución, nociones orgánicas que pueden ser asociadas también a una cosmogonía.

La palabra "cosmogonía" proviene de dos términos griegos: *kosmos* (buen orden) y *gonos* (nacimiento). También, "génesis" debe ser entendida como una acción que significa la venida al mundo (al mundo matemático).

En ese contexto caben también, discusiones sobre lo que sería la "fecundidad" de la matemática, que usualmente es entendida de un punto de vista estético.

■ De los conceptos euclídeos a los conceptos cartesianos en geometría, un primer ejemplo

En esta sección discutiremos las concepciones euclídeas de "punto" y "recta" y cómo ellas evolucionaron hacia las definiciones cartesianas correspondientes.

Primero debemos observar que la geometría euclídea, en su forma axiomática material, es considerada como el estudio del espacio natural, el espacio de concretización o materialización de los objetos geométricos. Para teorizar sobre ese espacio los geómetras griegos, especialmente Euclides (2009), definieron los conceptos de "punto" y de "recta" de la siguiente manera:

a) Punto es aquello de que nada es parte.
b) Recta es una línea sin anchura dispuesta "uniformemente" en todos sus puntos.

Más que en la forma de definir debemos reparar en el ímpetu natural de dar concretitud o sustancia al objeto definido, el "objeto-cosa".

La geometría analítica (plana) iniciada por Descartes y Fermat en el siglo XVII crea un espacio artificial para la geometría euclídea: el plano cartesiano. Él se constituye en el nuevo espacio de concretización-visualización de las verdades geométricas transformando intuiciones geométricas en intuiciones numéricas sobre los números reales, aunque el concepto de "número real", como apuntado por Cifuentes (2015), aún no estaba debidamente comprendido y delimitado en esa época, lo que solo se dará en el siglo XIX. Para la geometría cartesiana:

a) Punto es un par ordenado (x , y) de números reales.
b) Recta es el lugar geométrico de los puntos (x , y) que satisfacen una ecuación lineal de la forma $y - b = m(x - a)$, donde (a , b) es un punto dado de la recta.

Esa definición, así consolidada, de "recta" se basa en el concepto de "pendiente" o "inclinación" de la recta que es dada numéricamente por el coeficiente m.

¿Cuál es, entonces, la historicidad del concepto de "recta cartesiana"? Esa historicidad debe explicitar de qué manera se llegó del concepto euclídeo de recta al de recta cartesiana. La historia de ese concepto está presente en algunos libros didácticos situando cronológicamente su surgimiento y trayendo ya una definición acabada de recta cartesiana colocada en determinado momento histórico. Sin embargo, la historicidad nos debe revelar cuál fue su génesis teórica, cómo ella se desenvolvió.

Si volvemos a la definición griega, mencionada anteriormente: "recta es una línea dispuesta uniformemente en todos sus puntos", veremos que la dificultad en su comprensión reside en el trecho "uniformemente en todos sus puntos". A pesar de eso, ahí está (creemos, como un ejercicio de interpretación) la raíz de su conceptualización por Descartes. Él entendió "uniforme" como teniendo la misma inclinación en todo su trayecto, lo que tradujo matemáticamente a través del concepto de "pendiente" que geométricamente significa la tangente del ángulo de inclinación de la recta a respecto del eje x: la pendiente del segmento formado por los puntos (x , y) y (a , b) es el valor del cociente $(y - b)/(x - a)$. Si ese valor es una constante m para todos los puntos (x , y) de una línea, manteniendo el punto (a , b) fijo, entonces, esa línea es una recta. De ahí resulta la ecuación lineal de la recta dada anteriormente.

En este caso la definición dada por Euclides podría ser considerada una parte del "*ADN* conceptual" de la idea cartesiana de recta, o sea, un inicio, un origen que puede contener el todo necesario para su desarrollo teórico.

Así, pues, la concepción cartesiana de recta tiene su razón histórica y epistemológica en la concepción euclídea de recta. Ese movimiento de ideas es que llamamos "historicidad".

La teoría de grupos como base epistemológica para la constitución de la geometría moderna y sus raíces euclídeas, un segundo ejemplo

La geometría es importante en la formación (matemática) de los profesores por diversas razones, destacándose, primero, el hecho de ser ejemplo del poder de sistematización de una teoría por el método axiomático, también por introducir formas de pensamiento matemático que van desde lo empírico a lo lógico-formal, por su carácter epistemológico y, en el campo de la "experiencia matemática", por su capacidad de visualización, importante también en la enseñanza de la matemática (Cifuentes, 2010).

La geometría de Euclides admite, en su forma axiomática, ciertos procedimientos no formales de naturaleza intuitivo-experimental como, notoriamente, el de "superposición de figuras" para establecer su "igualdad" o congruencia. El uso de ese procedimiento es regido por uno de sus axiomas llamados comunes que dice: "dos cosas que se ajustan una a la otra (es decir, que coinciden cuando son superpuestas) son iguales entre sí". Desde el punto de vista intuitivo, el procedimiento de superposición puede ser entendido como la realización, en el espacio natural, de un movimiento (no necesariamente físico, y hasta podría ser instantáneo) de figuras para establecer su coincidencia.

Una consecuencia importante de la posibilidad de esos "movimientos" es que, para Euclides, la geometría plana no es independiente de la geometría espacial, ya que uno de los movimientos admisibles es la reflexión a respecto de una recta.

A partir del siglo XIX, y como consecuencia del advenimiento de la geometría cartesiana, la geometría (euclídea o no) puede ser estudiada por los efectos que diversos "movimientos", traducidos ahora a través de transformaciones geométricas, producen sobre las figuras geométricas: por ejemplo, los movimientos rígidos que dejan invariantes las distancias entre puntos se llaman isometrías y fundamentan la llamada "geometría euclídea métrica" (Lima, 1992). Estas son las traslaciones, las rotaciones, las reflexiones y sus combinaciones. Todas ellas son formuladas usando el concepto de función introducido en la geometría solo en el siglo XIX y usado extensivamente, como observado por Miorim (1998), por Felix Klein (1849-1925) y David Hilbert (1862-1943), entre otros.

Así como las isometrías permiten el estudio formal de la congruencia de figuras, dando significado matemático al procedimiento intuitivo de superposición, las llamadas "transformaciones de semejanza", como por ejemplo las homotecias, permiten el estudio de las propiedades de semejanza de figuras, fuertemente matematizada por relaciones de proporcionalidad (Lima, 1992).

Los grupos de transformaciones geométricas y sus raíces euclídeas

En ese nuevo contexto de la geometría, desarrollada en el siglo XIX y con el auxilio de técnicas provenientes de la geometría cartesiana, es que aparece el concepto "natural" de grupo, especialmente el de "grupo de transformaciones geométricas". Creemos que los grupos deben ser introducidos, en la formación de profesores, como grupos de transformaciones geométricas o grupos de movimientos, para así desarrollar la geometría con ese enfoque, inclusive las geometrías no-euclídeas.

El mismo concepto de "simetría de una figura" adopta un nuevo significado en la teoría de grupos de transformaciones, a saber: una simetría de una figura es un "movimiento" (transformación) que deja invariante la figura (Arnstrong, 1988).

Lo que es más sorprendente es que la teoría de grupos de transformaciones, bajo una cierta interpretación, ya aparece en la obra de Euclides(!) De hecho, los axiomas llamados comunes con que se inicia la geometría de Euclides pueden ser considerados precursores de los axiomas de la teoría de grupos cuando son “interpretados” como propiedades de la congruencia de figuras: el grupo de las isometrías.

Veamos. El axioma que dice “dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí”, puede ser traducido, cuando la igualdad es interpretada como el resultado de aplicar una isometría, de la siguiente manera: “la composición de dos isometrías es una isometría”. También, el axioma (implícito) que dice “si una cosa es igual a otra, la segunda es igual a la primera”, se traduce como “cada isometría tiene una inversa que es también una isometría”. Análogamente “cada cosa es igual a sí misma” significa, en esa interpretación, que “existe la isometría trivial”. Otro de los axiomas dice “si son adicionadas cosas iguales a cosas iguales, los resultados son iguales”, lo que puede ser traducido por “las isometrías preservan la adición de figuras”, y así en adelante.

Se observa, entonces, que en el siglo XIX se pasa de una geometría de las formas estáticas a una geometría de las formas en movimiento. Se pasa de lo sensible y experimental (basado en el procedimiento euclídeo de superposición) a lo formal y racional (basado en la noción de “transformación”).

Poincaré (1948) atribuía extrema importancia a los “grupos de movimientos”. Para Kant, a fines del siglo XVIII, las nociones de espacio y tiempo son capacidades innatas del ser humano. Para Poincaré, la capacidad más primitiva del ser humano es la que se refiere a la noción de grupo, es a partir de ella que el espacio y el tiempo adquieren significado. Posteriormente Piaget recupera las ideas de Poincaré para explicar el desarrollo sicológico del niño sobre su “percepción” del espacio y del tiempo (Piaget y Beth, 1980).

Conclusión

Este artículo ilustra, en primer lugar, que es posible “hacer matemática”, en una concepción ampliada: más como una forma de pensar que como una forma de saber, por el camino de su historicidad. Para mí, más importante que saber matemática, en el sentido de tener un conocimiento organizado y sistematizado, es saber pensar matemáticamente movilizando el conocimiento en la floresta matemática rumbo a la creación o recreación de diversos conceptos matemáticos.

De hecho, diversos aspectos de la floresta matemática relacionados con la historia, filosofía y metodología de la matemática (no de la enseñanza de matemática) atraviesan los contenidos en forma transversal tejiendo conexiones inesperadas entre esos contenidos matemáticos. El dinamismo del conocimiento matemático reside en las diversas formas de pensamiento y razonamiento matemáticos involucrados y sus interconexiones, como el pensamiento avanzado y el elemental, el pensamiento visual, el raciocinio por analogía, etc.

Esas diversas formas de pensamiento, debidamente desarrolladas, nos dan acceso a la “experiencia matemática”, es decir, a aspectos de la matemática que no dependen solo de la razón y de la lógica, sino también de la sensibilidad, de la intuición y de la imaginación, formas de acceso a la floresta matemática y fuentes para la creatividad.

Referencias

Arnstrong, M. A. (1988). *Groups and Symmetry*. New York: Springer-Verlag.

Chyczy, L. (2014). *A Historicidade da Matemática: subsídios para a (re)construção de um conceito e suas implicações nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Tesis de Maestria no publicada, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Universidade Federal do Paraná – UFPR, Brasil.

Cifuentes, J. C. (2010). Do Conhecimento Matemático à Educação Matemática: uma "odisséia espiritual". Em S. M. Clareto, A. R. Detoni y R. M. Paulo (Eds.), *Filosofia, Matemática e Educação Matemática: compreensões dialogadas* (pp. 13-31). Juiz de Fora, Brasil: Editora UFJF.

Cifuentes, J. C. (2015). O Mito da Análise Real na Formação conceitual do Professor de Matemática sobre os Números Reais e a Análise Matemática. En M. A. Kalinke y L. F. Mocrosky (Eds.), *Educação Matemática: pesquisas e possibilidades* (pp. 95-115), Curitiba, Brasil: Ed. UTFPR.

Cifuentes, J. C. (2016). Dos conteúdos de ensino à dinâmica do conhecimento: uma aventura pedagógica na "Floresta Matemática". *REVEMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática 11(Edición especial)*, 46-65.

Euclides. (2009). *Os Elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP.

Howard, D. (2006). *Albert Einstein como filósofo da ciência*. Recuperado el 01 de julio de 2015 de http://criticanarede.com/cie_einstein.html.

Lima, E. (1992). Transformações geométricas. En E. L. Lima, *Coordenadas no Plano*. 2ª edição (pp. 135-216), Rio de Janeiro: SBM.

Miorim, M. (1998). *Introdução à História da Educação Matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Ed. Atual.

Paty, M. (2005). Inteligibilidade racional e historicidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, 19(54), 369-390.

Piaget, J. y Beth, E. (1980). *Epistemología, Matemática y Psicología. Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Trad. Victor Sánchez de Zavala. Barcelona: Ed. Crítica.

Poincaré, H. (1948). Los fundamentos de la geometría. En J. Rey Pastor (Ed.), *H. Poincaré – A. Einstein, Fundamentos de la Geometría* (pp. 15-100), Buenos Aires: Ed. Ibero-Americana.