VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ANÁLISIS CRÍTICO DE UN DISPOSITIVO DIDÁCTICO PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Mónica Real, Patricia Sastre Vázquez
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Agronomía, Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería, Instituto de Educación Superior N°2. Instituto de formación técnica superior N°19. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. (Argentina)
pasava2001@yahoo.com.ar, monireal@gmail.com, rodolfoedandrea@gmail.com

Resumen
El lenguaje matemático puede manifestarse de varias formas. El estudiante debe hacer un esfuerzo para interpretar estas variedades propias de los modos de comunicación en Matemática. Interesa el análisis de las prácticas docentes para optimizar secuenciaciones de contenidos para que los estudiantes puedan alcanzar y comunicar adecuadamente sus argumentaciones con lenguaje específico. Se mostrarán diferentes dispositivos didácticos utilizados en cursos universitarios de Matemática, que se analizarán durante el taller y se abrirá un debate entre los asistentes para ver las posibles adecuaciones y modos de implementación.

Palabras claves: lenguaje matemático; formación del profesorado

Abstract
Mathematical language can be expressed in several ways. The student should make an effort to interpret these varieties that characterize mathematical modes of communication. The analysis of teaching practices is of our concern in order to optimize content sequencing so that students could reach and communicate their arguments with specific language adequately. Different teaching devices used in university courses in Mathematics will be shown, which will be analyzed during the workshop and a debate will be opened among the attendees to see the possible adaptations and ways of implementation.

Key words: mathematical language; teacher training

Introducción

Cuando se discute acerca del conocimiento que deben poseer los estudiantes sobre lenguaje matemático, la cuestión no se reduce a un simple tratamiento de símbolos y notaciones. Una adecuada apropiación de este lenguaje requiere que además del conocimiento de los símbolos como un código, se conozca su ‘funcionamiento’. Una inadecuada apropiación puede conducir al síndrome del conocimiento frágil (Perkins, 1995), síndrome que describe al problema que el estudiante presenta en el abordaje y apropiación del conocimiento bajo diversos aspectos.

El objetivo de este taller es el análisis de las prácticas docentes que permiten optimizar secuencias de contenidos para que los estudiantes puedan comunicar adecuadamente en Matemática sus argumentaciones con lenguaje específico.

Se presentó este taller a un grupo de docentes de nivel medio y superior que en su praxis se hace necesario el uso de las argumentaciones y validaciones por parte de los estudiantes con adecuado y específico vocabulario y lenguaje matemático, las cuestiones que el equipo de trabajo notó como relevantes para socializar y poner en acto dentro de secuencias didácticas. Aquí surge una discusión extrapolable sobre los conocimientos que debe poseer el profesor de Matemática, y se enlaza directamente con la formación del profesorado, específicamente en lo referente al lenguaje y la epistemología de Matemática, que forma parte del currículum de estudios desde los primeros años de escolaridad y que se instala con una cadena de símbolos que van penetrando todos los espacios del lenguaje. De esta forma, el sujeto de aprendizaje va accediendo a fórmulas, leyes y algoritmos que determinan conductas matemáticas muy definidas para hallar soluciones y que van desde acciones tales como enumerar, contar, ordenar, clasificar y hasta inferir. El lenguaje formal, constituido por símbolos más que por palabras, es lo que realmente hace que el sujeto que aprende haga verdaderos esfuerzos para comprender el lenguaje matemático, debido a su complejidad. Esto es consecuencia de que el estudiante no logra establecer una clara y adecuada extrapolación entre el lenguaje natural o cotidiano y el formal.

El lenguaje matemático puede manifestarse de varias formas. Puede ser de forma coloquial, a través del lenguaje cotidiano; puede ser de forma gráfica o visual, a través de esquemas, representaciones gráficas o simples esquemas a mano alzada y también puede ser de forma simbólica, a través del lenguaje código que le es propio a Matemática. El estudiante debe hacer un especial esfuerzo para interpretar estas variedades propias de los modos de comunicación en Matemática. Pero el profesor también debe realizar un esmerado trabajo para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje que permita al estudiante poder realizar estos registros comunicacionales y sus respectivos pasajes.

En este taller se analizaron dispositivos didácticos; estos son guías de ejercitación teórico-prácticas construidas con el fin de facilitar la apropiación de vocabulario, lenguaje y contenido necesario para la argumentación y validación en Matemática. Se mostraron diferentes dispositivos didácticos utilizados en cursos de nivel medio y superior de Matemática durante el taller y lo que consecuentemente permitió abrir un debate entre los asistentes de manera que queden expuestas las posibles adecuaciones y modos de implementación.

Marco Teórico

El lenguaje simbólico formal de la Matemática ostenta representaciones lingüísticas que expresan operaciones o transformaciones que hacen referencia a diferentes razonamientos y argumentaciones que son motivadas por estructuras conceptuales específicas. Si se considera a la Matemática como una manifestación semiótica (Radford, 2003) entonces sus elementos generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, el cual podría considerarse equivalente al lenguaje natural de un individuo. El lenguaje matemático está dotado de una simbología y una estructura que le son propias. Es fundamental conocer el significado de sus símbolos para que el estudiante sea capaz de interpretar lo que se quiere decir con ellos. Precisamente la falta de comprensión de los conceptos matemáticos expresados en el lenguaje que le es propio a esta Ciencia, no permite ver como éstos se relacionan y como son utilizados para la resolución de problemas y procesos de validación referentes a su epistemología consistente en la demostración de proposiciones y la búsqueda de ejemplos y contraejemplos, entre otras acciones.

En general, estos conocimientos o son inexistentes o no tienen la suficiente solidez en los docentes tanto a nivel medio como universitario, lo que debilita la formación del profesorado, y es que precisamente, como señala Adúriz-Bravo (2002), el profesor de Ciencias, en general, debe saber no solo de la Ciencia sino que también debe saber sobre la Ciencia, que es lo esencialmente esperado para una profesionalización docente.

Niss (2003) encuadra a la utilización de los símbolos matemáticos, lo que implícitamente se refiere al conocimiento del lenguaje matemático, dentro de las competencias matemáticas que un estudiante debe tener. Su propuesta para definir la competencia matemática queda configurada como la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las Matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extramatemáticas en las que estas juegan o podrían jugar su papel, identificando a tales competencias del modo siguiente: Pensar matemáticamente; Plantear y resolver problemas matemáticos; Modelar matemáticamente; Argumentar matemáticamente; Representar entidades matemáticas (situaciones y objetos); Utilizar los símbolos matemáticos; Comunicarse con las Matemáticas y comunicar sobre Matemáticas; Utilizar ayudas y herramientas (incluyendo las nuevas tecnologías).

El lenguaje formal, constituido por símbolos más que por palabras, es lo que realmente hace que el sujeto de aprendizaje haga verdaderos esfuerzos para comprender Matemática, debido a su complejidad. Como consecuencia, el estudiante no traslada automáticamente el lenguaje natural que utiliza habitualmente al lenguaje matemático.

Pimm (1999) afirma que el uso generalizado que hacen los docentes en el aula del lenguaje formal, tiene consecuencias trascendentes, ya que, en lugar de modelar los usos matemáticos desde su lenguaje informal, enfatiza en el lenguaje formal de forma ostensiva y recurrente, lo que termina por confundir, atribular y disgustar al sujeto de aprendizaje. En relación a esto, es de destacar que D´Andrea, Curia & Lavalle (2012) propusieron una ingeniería didáctica para la comprensión y desarrollo de la argumentación de teoremas matemáticos en estudiantes universitarios postulando como paso inicial la comprensión por parte del estudiante, de la proposición que se quiere probar, desde el lenguaje natural. Por su lado, Fennell (citado por Ruiz, 2003, p.34.) señala que “en la comunicación matemática los símbolos estandarizados y las definiciones de la terminología son necesarios, pero la enseñanza de la matemática en lenguaje muy formalizado, algunas veces, causa una especie de bloqueo en la comprensión”

Este tipo de situaciones deben ser manipuladas diligentemente por el docente, que puede considerar que el estudiante comprende los conceptos matemáticos aunque, en el momento de evaluar, se evidencian debilidades en la adquisición y comprensión de estos. Debe destacarse que la transmisión y comprensión del lenguaje matemático, en la medida de lo posible, debe ser un conocimiento introductorio. Es decir, que tanto a nivel universitario como a nivel medio debería formar parte del currículum del primer curso de Matemática de la carrera escogida o el primer año de estudios del estudiante secundario. Si esto no fuese posible, es fundamental que el profesor luego de un test diagnóstico que determine los conocimientos existentes acerca del lenguaje matemático en el grupo de estudiantes, instruya a estos de acuerdo a los resultados obtenidos. Sastre Vázquez y D´Andrea (2011) observaron que una de las dificultades que enfrentan los estudiantes, es precisamente desconocimiento del lenguaje matemático. Este desconocimiento es causante de la producción de numerosos errores de construcción y de interpretación, lo que dificulta inexorablemente el acceso a la incorporación de nuevas estructuras conceptuales. Consecuentemente, los estudiantes no son capaces de asociar los conceptos con sus definiciones y menos aún son capaces de ejemplificar. Es decir, que no pueden utilizar el lenguaje matemático de una forma ‘concreta’ ni tampoco de una forma ‘abstracta’, los conceptos serían para ellos palabras carentes de significación matemática en sentido estricto.

Este tipo de situaciones deben ser manipuladas diligentemente por el docente, que puede considerar que el estudiante comprende los conceptos matemáticos pero sin embargo, a la hora de evaluar, se evidencian debilidades en la adquisición y comprensión de estos. González (1998), señala las consecuencias negativas del enfoque tradicional de la enseñanza de la matemática en donde no se hace énfasis en la transferencia y comprensión del lenguaje formal, por lo que los procesos comunicacionales son unilaterales, prevaleciendo la transmisión de la información, que es adquirida por el estudiante de forma mecánica y ritual.

Actividades sustentadas en el marco teórico

Los resultados obtenidos de las investigaciones llevadas a cabo por Sastre Vázquez y D´Andrea (2011) generaron la necesidad de considerar acciones que permitieran interactuar con otros niveles del sistema educativo, empleando la extensión como estrategia. Con esas acciones se pretendió realizar un aporte para la divulgación del conocimiento científico en un marco de integración. Las mismas estuvieron dirigidas a Profesores de Matemática del ciclo medio y estudiantes del último año del Profesorado de Matemática. Ellas pretendieron aportar una mejora a la formación del profesorado, extrapolando didácticamente los resultados obtenidos de diferentes trabajos de investigación, surgiendo de ahí, un espacio que posibilitara la reflexión sobre la importancia y las estrategias didácticas para la inclusión del lenguaje matemático, la argumentación y la demostración entre los contenidos de la enseñanza media y terciaria. Estos espacios devinieron en talleres sobre el lenguaje matemático y talleres sobre la demostración matemática. De este modo se intentó construir un puente de articulación entre Escuela Media, Profesorado y Universidad. Consecuentemente surgió la posibilidad de analizar el desempeño y evolución de estudiantes universitarios durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático. Para el logro de estos objetivos, durante los años 2009 a 2012 y en un curso anual de Álgebra y Geometría para Carreras de Ingeniería se introdujo a los estudiantes en el conocimiento del lenguaje matemático de la forma siguiente.

Durante los dos primeros años de este estudio: 2009/10, se instruyó a los estudiantes en el conocimiento del lenguaje matemático bajo un paradigma tradicional, utilizando estrictamente contenidos de Lógica tradicional o aristotélica y Lógica simbólica. Se le mostraron los contenidos aproximadamente del modo siguiente. Primero se los instruyó en el conocimiento formal de las estructuras esenciales de la lógica tradicional: concepto, juicio y razonamiento. Luego se los introdujo en el concepto de proposición y luego los diferentes conectivos proposicionales tales como la conjunción; negación; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación. La presentación de estos conectivos se hizo desde las clásicas tablas de verdad. Posteriormente se los encuadró en el conocimiento de las estructuras conceptuales de función proposicional y su proceso de cuantificación; los métodos de demostración y otras cuestiones epistemológicas asociadas. En los dos años siguientes del estudio, el diseño instruccional sobre lenguaje matemático se enfocó desde un paradigma basado en la construcción de los contenidos a partir de ejemplos extraídos de la Matemática y orientados específicamente a cuestiones de notación y epistemología que hacen al lenguaje y método de esta Ciencia, evitando por completo en el discurso, terminología específica de la Lógica tradicional y simbólica. El desempeño y la evolución se evaluaron por medio del rendimiento académico reflejado en las calificaciones obtenidas en exámenes parciales y finales. Los resultados obtenidos mostraron que los estudiantes que recibieron una instrucción en el lenguaje matemático desde un paradigma basado en la construcción, tuvieron una mejor predisposición y desempeño en el manejo del lenguaje matemático. Además, para estos grupos se observó un mayor rendimiento en la capacidad de producir una transposición desde el lenguaje natural hacia el lenguaje simbólico.

Mientras que los estudiantes instruidos en el lenguaje matemático desde un paradigma tradicional sostenido por contenidos más formales de lógica mostraron poseer dificultades para la comprensión de nuevas estructuras conceptuales. Se especula que esto podría explicarse por el enfoque didáctico adoptado. Se observó también, en base a esta especulación, que los estudiantes instruidos en un discurso más constructivo pudieron abordar procesos de validación desde una mirada significativa y comprensiva.

Reflexiones que salieron a la luz en el marco del taller

La epistemología de la Ciencia Matemática tiene como pilares fundamentales el razonamiento y la abstracción. El diseño de un curso cabal de Matemática no puede soslayar su epistemología y para poder ponerla en acción, se requiere conocer su lenguaje. Un paradigma tradicional de aprendizaje de tipo normativo, es decir, centrado en los contenidos de aprendizaje que esté direccionado al proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático, puede inducir a una forzada e inadecuada apropiación.

Los avances tecnológicos en los alrededores de fines del Siglo XX y principio del Siglo XXI junto con las nuevas corrientes didácticas ponen en juicio las actividades que se sustentaban en el paradigma tradicional. Atento a esto es que D'Andrea y Sastre Vázquez (2013) proponen un cambio radical en la educación del lenguaje matemático con secuencias didácticas renovadas que hacen mas amable la aspereza del aprendizaje del lenguaje formal de la Matemática, naturalizando su uso.

Los participantes del taller reconocieron que un proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático sustentado un paradigma constructivo desde una perspectiva intuicionista, permite un aprendizaje mucho más ágil y dinámico en los estudiantes de las estructuras proposicionales, muy alejado de las tradicionales tablas de verdad. A través de ejemplos simples pero matemáticos, los estudiantes pueden llegar a ver que una conjunción de un número finito de proposiciones es verdadera cuando es verdadera cada una de las proposiciones que constituyen a esa conjunción. Mientras que una conjunción de un número finito de proposiciones es falsa cuando por lo menos es falsa alguna de las proposiciones componentes. Asismismo, con la disyunción inclusiva introduciendo ejemplos similares a los utilizados en la conjunción, pero considerando primero un ejemplo coloquial que permita que el estudiante vea que se trata de una opción inclusiva. Un ejemplo adecuado para el logro de este objetivo puede ser el siguiente: *'El coche arranca si hay uno que lo maneja. María o Pedro o Susana o Juan. ¿Cuántos tienen que subir al coche para que arranque?'*

De esta forma, los estudiantes guiados por el docente pueden construir el valor de verdad de una disyunción inclusiva a través de una discusión conjunta. Luego, de forma similar se introduce a la disyunción exclusiva empleando un ejemplo del tipo: *'A las diez de la noche, voy al cine o al teatro'*. Con este ejemplo u otro de estructura similar, se pretende que el estudiante pueda caracterizar el valor de verdad de una disyunción exclusiva que a diferencia de los conectores anteriores es binario. Si bien, la disyunción inclusiva es de un uso común en Matemática, y la exclusiva ni se menciona, se la introduce a los efectos de que el estudiante pueda comprender totalmente el carácter inclusivo de la disyunción que lleva este nombre por comparación con el comportamiento extremo que reviste la disyunción exclusiva. La implicación o condicional, sin duda es el momento clave de este proceso, ya que es un conector que no es simple de comprender para el estudiante y es el específico de Matemática ya que por lo general todas las proposiciones matemáticas poseen la estructura de una implicación o doble implicación. El único caso que el estudiante puede entender rápidamente es el más elemental y es el caso de antecedente y consecuente verdadero. La introducción del ejemplo: *'Si apruebo el examen, entonces te presto el apunte'* (Rojo, 1994) y su análisis caso por caso, lleva de acuerdo a la discusión generada con el estudiante a repensar nuevos ejemplos, de forma de llegar a concluir la caracterización del valor de verdad de este conector.

Conclusiones

El enfoque tradicional de la educación matemática, con procesos de comunicación unilaterales y donde no se hace énfasis en la transmisión y comprensión del lenguaje formalizado, trae aparejadas consecuencias negativas. El lenguaje matemático tiene su propia sintaxis la que, en general, no coincide con la del lenguaje común o natural, y es importante tener en cuenta que no existen razones valederas para admitir que el estudiante descubrirá tal sintaxis por sí mismo y sin ningún tipo de apoyo al respecto. La adquisición del dominio de este lenguaje no se logra de forma espontánea, sino que se requiere del ejercicio de acciones mentales que deberían ser desarrolladas en actividades propuestas al estudiante por el docente. Los docentes deberán reflexionar y ser conscientes de la importancia de este lenguaje. El estudiante tiene fuertes creencias sobre una Ciencia Matemática que consiste según su propio lenguaje 'en hacer ejercicios' en el peor de los casos; y en el mejor, que permite resolver problemas que tienen que ver con la cotidianeidad, pero sea como sea, su epistemología es algo muy lejano y hasta inexistente.

La formación del Profesorado es trascendente para el logro de aprendizajes definidos en la comprensión y aplicación del lenguaje matemático ya que no basta con que el profesor de Ciencias en general y de Matemática en particular conozca muchísimos contenidos sobre la ciencia sino que conozca más allá de tales contenidos y comprenda a estos desde la filosofía, la historia y la didáctica específica de la matemática, pudiendo entonces realizar una verdadera extrapolación áulica desde "*un saber sabio a un saber enseñado*" (Chevallard, 1998). En el siglo IV A.C., Aristóteles, manifestaba que la naturaleza estaba escrita en lenguaje matemático, además de afirmar que el lenguaje cotidiano estaba saturado de ambigüedades, por lo que el lenguaje de la ciencia había que diferenciarlo del cotidiano. Precisamente, gran parte de la importancia que posee la simbología matemática es la carencia de ambigüedades, por lo que las ideas que comunica son de una precisión rigurosa.

El estudiante tiene una idea muy ingenua de la Ciencia Matemática, una idea que actualmente parece anclada en las primeras ideas del niño que adquiere en el ciclo primario, como si el paso por el ciclo medio no existiese. Esta conciencia de la realidad cognitiva de los estudiantes del ciclo medio y de los ingresantes universitarios es la que llevó a una larga y profunda reflexión que desembocó en el proceso de investigación que resultó el marco teórico de este taller.

Referencias bibliográficas

Adúriz – Bravo, A. (2002). Un Modelo para Introducir la Naturaleza de la Ciencia en la Formación de los Profesores de Ciencias. *Pensamiento Educativo*, *30*, 315 – 330

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: AIQUE.

D´Andrea, R.E.; Sastre Vázquez, P. (2013). Desempeño de estudiantes universitarios en el uso del lenguaje Matemático. En M.E. Ascheri; R.A. Pizarro; N. Ferreyra. (Ed.). *Actas del III Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología/5° Congreso de Educación en Ciencia y Tecnología.* (pp.132 – 133). Catamarca: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca.

D´Andrea, R.E., Curia, L., Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios*. Alemania: Editorial Académica Española.

González, F. (1998). *La Investigación en Educación Matemática*. Jornadas de Reflexión sobre la Enseñanza de la Matemática. Valencia, Venezuela.

Niss, M. (2003). The Danish KOM Project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (eds.). *Educating for the future. Proceding of an international symposium on matematics teacher education*, (pp.179 – 192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente.* Barcelona: Gedisa.

Pimm, D. (1999). *El Lenguaje Matemático en el Aula*. Madrid: Morata

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics* 52(2), 123–150.

Rojo, A. (1994). *Álgebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

Ruiz, D (2003). *El Lenguaje en Clases de Matemática*. Mérida: Universidad de Los Andes.

Sastre Vázquez, P.; D´Andrea, R.E. (2011). *Análisis del lenguaje matemático en estudiantes ingresantes a Carreras de Ingeniería.* En Santos, N.; Acosta, G.; Aguado, J.L. (Ed.). *Actas del XVI EMCI Nacional y VIII Internacional*. Olavarría: Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.