

# UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS: RESULTADOS DE SU IMPLEMENTACIÓN

LOURDES BRAVO  
JOSÉ JOAQUÍN ARRIETA

## RESUMEN

Numerosos trabajos se han destinado a la elaboración de estrategias didácticas como una forma de enseñanza que favorece la dirección del proceso de aprendizaje de los estudiantes y que reporta mejoras en la enseñanza de cualquier materia. Como una de las dificultades en el aprendizaje de la Geometría en la formación del profesorado de Matemáticas en el currículo cubano se encuentra la realización de demostraciones geométricas, por lo que se hace necesario buscar herramientas metodológicas que conduzcan a ideas novedosas en su enseñanza. En este trabajo se presentan los resultados de la aplicación de una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas en el estudio de la Estereometría.

Al menos desde los tiempos de Aristóteles, el cual la situó como la pieza clave en su idea de ciencia, se ha considerado la demostración como una característica esencial, un concepto clave que forma parte de la esencia de las Matemáticas, cuya importancia traspasa el marco de lo puramente instructivo y se integra también al campo educativo (Ibañez Jalón y Ortega del Rincón, 2002). Por ello está justificada su incorporación en todos los currículos escolares conocidos, siendo uno de sus objetivos fundamentales el de desarrollar la capacidad de realizar demostraciones matemáticas.

Las primeras demostraciones a las que se enfrenta el estudiante en el currículo de las Matemáticas son las demostraciones geométricas, que transcurren desde formas de razonamiento inductivo e empírico en los primeros grados de la enseñanza hasta formas más deductivas en los niveles superiores.

Pese al papel relevante de las demostraciones en la formación cultural de los individuos y a las múltiples investigaciones dedicadas al tema de la enseñanza de

las demostraciones, subsisten aún dificultades en la comprensión y realización de las demostraciones matemáticas, en especial, las geométricas. Estas dificultades toman un carácter más serio cuando se trata de estudiantes en formación para profesores de Matemáticas, pues, ¿cómo van a enseñar a sus discípulos si ellos mismos tienen limitaciones en la resolución independiente de los problemas geométricos de demostración?

La situación anterior nos llevó a plantearnos el siguiente interrogante, al siguiente problema de investigación: ¿cómo desarrollar la habilidad «demostrar» para resolver los problemas geométricos de demostración durante el tratamiento de la Estereometría en los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Especialidad Matemática-Computación?

La búsqueda de la respuesta a la interrogante anterior nos motivó a revisar y estudiar las distintas investigaciones y tesis doctorales realizadas sobre el tema de la enseñanza y aprendizaje de las demostraciones matemáticas, en especial las más recientes de Ibañes Jalón (2001) y Martínez Recio (2000), para, en consecuencia, expresar nuestros puntos de vista según el contexto en que nos encontráramos, así como elaborar e implementar una estrategia didáctica centrada en un sistema de acciones para el desarrollo de la habilidad «demostrar», que contribuya a que los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Especialidad Matemática-Computación resuelvan con independencia los problemas geométricos de demostración, concretamente en la asignatura de Estereometría.

El marco teórico de nuestra investigación se desarrolló desde una perspectiva tanto epistemológica, como psicológica y pedagógica, lo que nos permitió profundizar en torno a las demostraciones geométricas en relación con estas perspectivas y actualizarnos en los últimos estudios realizados sobre la temática.

En nuestro trabajo (Bravo Estévez, 2002) partimos de algunas consideraciones sobre los orígenes de las Matemáticas y la Geometría, y destacamos el significado de las demostraciones matemáticas según distintos contextos, en particular en las instituciones escolares con respecto a sus niveles y el papel que ocupa en los currículos de enseñanza (Godino y Martínez Recio, 1997; Martínez Recio y Godino, 2001). Distinguimos también la demostración de otros instrumentos de validación, interesándonos en los métodos de demostración y los procedimientos heurísticos; centrándonos de forma especial en las funciones de la demostración, proponiendo y fundamentando el valor formativo que éstas encierran (Balacheff, 1987; Arsac, 1990; De Villiers, 1993; Hanna, 2000; Dreyfus, 2000).

También estudiamos los fundamentos psicológicos de nuestra propuesta, basados en las siguientes teorías:

- La teoría de Vigotsky (1985), en la relación que establecimos entre aprendizaje y desarrollo caracterizando el estado real y actual de nuestros estudiantes, con respecto al desarrollo de la habilidad «demostrar» y sus potencialidades para aprender con ayuda de mediadores instrumentales y sociales (zona de desarrollo potencial).
- La teoría de la Formación por Etapas de las Acciones Mentales de Galperin (1986), en la caracterización del sistema de acciones (Base Orientadora para

- la Acción) para el desarrollo de la habilidad «demostrar» como un sistema generalizado, completo y elaborado independientemente.
- El Modelo de los Van Hiele (1986, Hoffer, 1983), para el desarrollo de los niveles de razonamiento (inductivo-deductivo) y las fases de aprendizaje con el enfoque de la actividad centrado en la resolución de problemas, jugando la comunicación un papel decisivo.
  - La teoría de Piaget (1973), relacionada con el período de las operaciones formales para las demostraciones geométricas con carácter deductivo y formal.

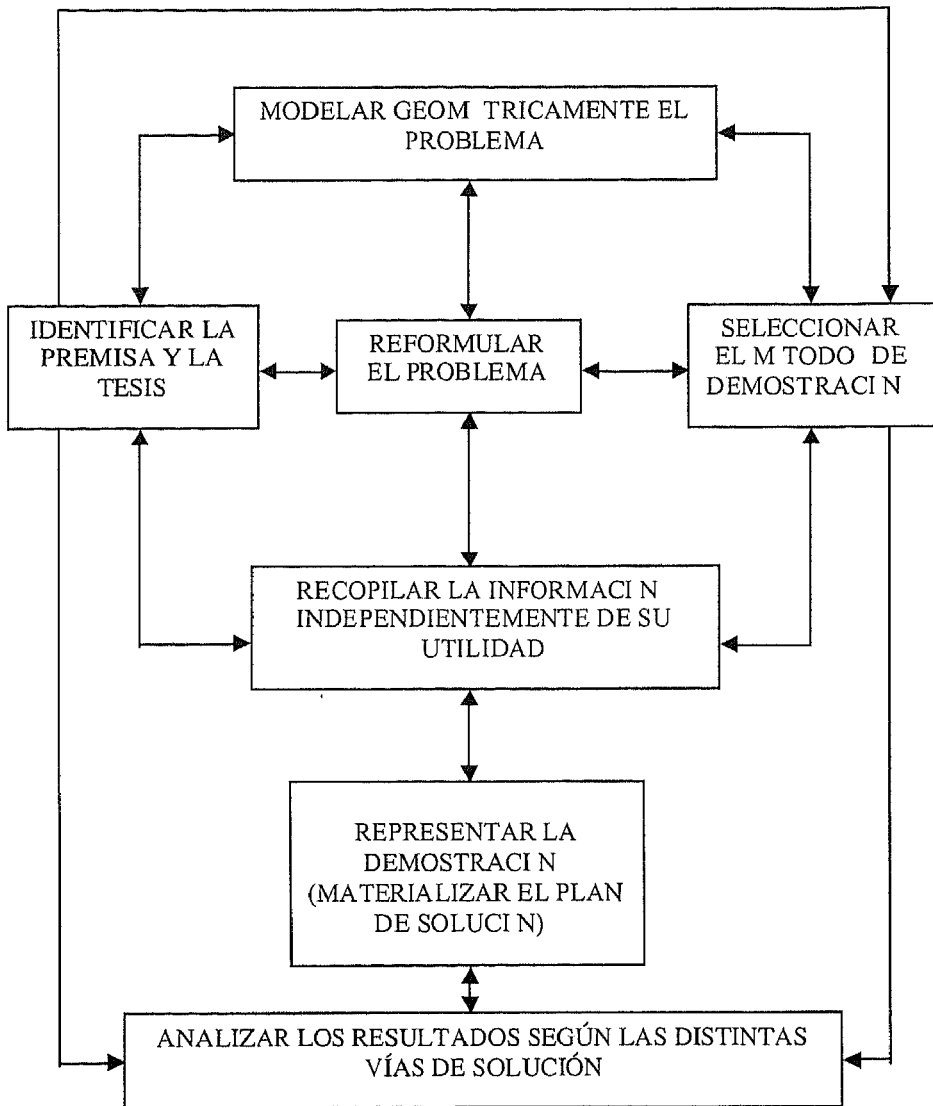
Por otra parte, destacamos tres capacidades matemáticas estrechamente relacionadas con las demostraciones geométricas: la de razonamiento, la de visualización y la de imaginación espacial, cuyo pobre desarrollo de las mismas está íntimamente ligado a las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de los problemas geométricos de demostración, explicando de forma particular cómo influye el desarrollo de la capacidad de imaginación espacial en la realización de tales problemas.

Asimismo, en nuestro trabajo estudiamos algunas aportaciones teóricas sobre estrategias didácticas junto al importante papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las Matemáticas (Polya, 1966, 1982). Además, resumimos los antecedentes de investigaciones en torno al tema de las demostraciones matemáticas, en particular, las relacionadas con las acciones de la habilidad «demostrar» para la resolución de los problemas de demostración (Acosta Fuerte, 1996), y reflexionamos sobre la importancia de incorporar los temas históricos como elemento de motivación al estudio de las demostraciones, así como la utilización de la informática para su enseñanza como factor de actualidad y de interés, sin perder de vista el propósito que se aspira a lograr en los estudiantes con la resolución de los problemas geométricos de demostración.

Sustentándonos en las aportaciones reseñadas con anterioridad, así como otras muchas extraídas de distintas páginas web (ver referencias bibliográficas) elaboramos detalladamente nuestra estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas con sus principios y sus fases, centrada en un sistema de acciones (ver gráfico adjunto) para el desarrollo de la habilidad «demostrar» y un conjunto de consideraciones didácticas como base para la resolución de los problemas geométricos de demostración, cuya implementación se desarrolló con los estudiantes del segundo año de la carrera Licenciatura en Educación Especialidad Matemática-Computación en el Instituto Superior Pedagógico de Cienfuegos a lo largo de dos cursos consecutivos (99-00 y 00-01).

Dicha estrategia la definimos como el conjunto de actividades previamente organizadas que ejecutará el profesorado junto a sus estudiantes en un momento determinado, para la enseñanza de las demostraciones geométricas. Está fundamentada en dos principios, la atención a la diversidad y su carácter integrador de lo académico, lo laboral y lo investigador, y está secuenciada mediante un sistema de siete acciones independientes, interrelacionadas, ordenadas y completas.

## SISTEMA DE ACCIONES PARA LA HABILIDAD «DEMOSTRAR»



Al aplicar la propuesta a lo largo de los cursos 99-00 y 00-01 utilizamos para su evaluación tres métodos cuantitativos de investigación educativa: uno basado en el criterio de expertos, recurriendo al método Delphi; otro, en base a un diseño Cuasiexperimental del tipo «grupo de control no equivalente», que nos exigió aplicar las pruebas de U Mann-Whitney y la Wilcoxon, y, por último, una encuesta al alumnado. El desarrollo de la investigación nos permitió arribar a las cinco conclusiones generales siguientes:

1. La estrategia didáctica que se desarrolló y se implementó para la enseñanza de las demostraciones geométricas centrada en un sistema de acciones para el desarrollo de la habilidad «demostrar», acompañada de un conjunto de consideraciones didácticas en la disciplina Geometría, de la carrera Licenciatura en Educación Especialidad Matemática-Computación, quedó integrada al programa de la asignatura Geometría III: Estereometría. Los tres elementos mencionados: la estrategia didáctica, el sistema de acciones y las consideraciones didácticas se caracterizaron por:
  - La estrategia didáctica se concibió con carácter integrador desde lo académico, laboral e investigativo, y en cada actividad primó la atención a la diversidad.
  - Las acciones para el desarrollo de la habilidad «demostrar» se estructuraron de forma sistémica y se basaron en el principio desarrollador de la imaginación espacial y del carácter generalizador; y en las funciones orientadora, ejecutora y de control. Los componentes del sistema se identificaron en las acciones de la habilidad «demostrar» con un conjunto de requisitos, para la que es necesario conocer su estructura, acciones y operaciones.
  - Este sistema de acciones no significa una «llave mágica» que todo lo puede abrir por sí solo, no es aplicarlo por aplicarlo, sino que debe sustentarse en un esmerado trabajo de conducción por parte del profesorado de forma que utilice un conjunto de consideraciones didácticas caracterizado, entre otros aspectos, por la presencia de la diversidad y la actuación personalizada del profesor o profesora para con los estudiantes, la estimulación al éxito y la creatividad, así como un trabajo cooperativo.

La estrategia didáctica, su sistema de acciones para el desarrollo de la habilidad «demostrar» y sus consideraciones didácticas se caracterizaron de forma general por propiciar un clima de debate y reflexión en los modos de actuación tanto del profesorado como del alumnado para tratar de convertir la resolución de los problemas de demostración en una actividad significativa.
2. Los resultados del estudio de campo pusieron de manifiesto que la estrategia didáctica, por sus características, permite el logro de un desarrollo significativo de la habilidad «demostrar», en cuanto a los recursos que estimulen el desarrollo de la capacidad de imaginación espacial, actualización de los conocimientos geométricos y la discusión de las distintas vías de solución, lográndose un ambiente excelente de satisfacción por la resolución de los problemas geométricos de demostración y de aceptación por el estudio de la Geometría de forma general. Los resultados de la validación de la estrategia didáctica se obtuvieron desde tres vertientes diferentes: el criterio de expertos, la fase experimental y la encuesta de los estudiantes, arribando a las cuestiones siguientes:
  - En una primera parte, por la descripción, análisis y discusión del criterio de expertos, se constató que tuvieron concordancia de criterios preferen-

ciales en relación a las características de la estrategia didáctica en lo que respecta a su concepción centrada en el sistema de acciones para el desarrollo de la habilidad «demostrar», a su proyección de trabajo integrador desde lo académico-laboral-investigativo y al componente de imaginación espacial, como un medio de contribuir por una parte a la enseñanza de las demostraciones geométricas y, por otra, a la resolución de forma independiente de los problemas geométricos de demostración.

- En la descripción, análisis y discusión de la fase experimental, se constató que en los grupos donde se aplicó la estrategia centrada en el sistema de acciones como herramienta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las demostraciones geométricas, se obtuvo un desarrollo significativo de la habilidad «demostrar» resolviendo de forma independiente los problemas geométricos de demostración, lo que condujo a un rendimiento académico superior en los estudiantes, con relación a los que no se le aplicó, lo que puede constituir un elemento para una mejor preparación geométrica en sentido general.
- La última parte, se dedicó a la descripción, análisis y discusión de los resultados de la encuesta a los estudiantes sobre la estrategia didáctica, cuyos resultados reportaron un considerable ascenso a niveles superiores del grado de aceptación por el estudio de la Geometría y de la satisfacción al resolver los problemas geométricos de demostración.

Al comparar los resultados obtenidos en las tres direcciones anteriores podemos concluir que la estrategia didáctica, por sus características, propició cambios significativos en el desarrollo de la habilidad «demostrar» en los estudiantes, así como elevó la motivación e interés por el estudio de la Geometría, en particular de los problemas geométricos de demostración.

3. La estrategia didáctica centrada en un sistema de acciones para el desarrollo de la habilidad «demostrar» creó un marco donde se interrelacionaron el alumnado y el profesorado en un contexto geométrico que proporcionó:
  - Al alumnado: un medio de aprendizaje para la resolución de problemas geométricos de demostración de forma independiente.
  - Al profesorado: métodos y procedimientos en la enseñanza de las demostraciones geométricas, útiles para el diagnóstico, la ejecución y el control de las acciones dirigidas al desarrollo de la habilidad «demostrar», válidos no sólo para la Geometría, sino para las Matemáticas en general, e incluso para otras disciplinas que desarrollan esta habilidad.
  - Al diseño de la disciplina Geometría: ampliar las orientaciones didácticas con formas novedosas y útiles de enseñanza, que contribuyen a elevar la calidad del proceso docente-educativo.
4. La estrategia didáctica con su sistema de acciones para el desarrollo de la habilidad «demostrar» permite adaptarse a cualquier proceso de enseñanza-aprendizaje de las demostraciones, no necesariamente matemáticas.

Aunque la confección de la estrategia didáctica fue concebida para la enseñanza de las demostraciones en Geometría, por lo que se utilizaron para su confección conocimientos geométricos, puede adecuarse a cualquier otra rama de las Matemáticas u otra disciplina, teniendo en consideración el objetivo que se persiga lograr.

5. La estrategia didáctica constituye una herramienta metodológica de apoyo para la realización de otras investigaciones pedagógicas relacionadas con la enseñanza de las demostraciones geométricas. La estrategia didáctica puede continuar enriqueciéndose y servir de sostén a otras investigaciones sobre el desarrollo de la habilidad «demostrar».

## BIBLIOGRAFÍA

- Acosta Fuerte, I. G. (1996). Una estrategia metodológica para el desarrollo de la habilidad demostrar proposiciones matemáticas en los grados 10-12 del subsistema de enseñanza de EGPL. Tesis doctoral, Instituto Superior Pedagógico de Ciego de Ávila. (Cuba).
- Arsac, G. (1990). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9/3, 247-280.
- Azcárate Giménez, C. (2001). Definiciones, demostraciones, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo? 10mas Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. En: <http://www.unizar.es/ice/jaem/programa.html>
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving processus and situations for validation). *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.
- Bravo Estévez, M. L. (2002). Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas. Tesis doctoral inédita. Universidad de Oviedo.
- Coriat, M. (1999a). Convicción y demostración. Reflexiones en torno a la demostración. Recopilación de textos preparados por miembros del Grupo de Trabajo «Aprendizaje de la Geometría» de la SEIEM. En: <http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html>
- Coriat, M. (1999b). Réplica al documento anterior. Reflexiones varias. Documentos presentados por miembros del Grupo de Trabajo «Aprendizaje de la Geometría» de la SEIEM. En: <http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html>
- De Guzmán, M. (1995). Capítulo 2: Demostración matemática. En: <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm>
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Revista Epsilon*, 26, 15-30.
- Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó, S. L., 125-133.
- Escudero, I. (2000). Debate sobre Geometría y Demostración. Reflexiones en torno a la demostración. Recopilación de textos preparados por miembros del Grupo de Trabajo «Aprendizaje de la Geometría» de la SEIEM. En: <http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html>
- Fiol, M. L. (2001). Demostración. Reflexiones en torno a la demostración. Recopilación de textos preparados por miembros del Grupo de Trabajo «Aprendizaje de la Geometría» de la SEIEM. En: <http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html>

- Galperin, P. (1986). Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales intelectuales. En Galperin, P. *Antología de la psicología pedagógica y de las edades*. La Habana: Pueblo y Educación, 114-117.
- Godino, J. D. y Martínez Recio, A. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. En: <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/981112.html>
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 5-23.
- Hoffer, A. (1983). Van Hiele-Based Research. En Lesh, R. y Landau, M. (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, 206-226.
- Ibañes Jalón, M. J. (2001). Aspectos Cognitivos del Aprendizaje de la Demostración Matemática en los Alumnos de Primer Curso de Bachillerato. Tesis doctoral, Universidad de Valladolid. (España).
- Ibañes Jalón, M. J. y Ortega del Rincón, T. (2002). La demostración en el currículo: una perspectiva histórica. *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 39, 53-61.
- Martínez Recio, A. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83-99.
- Martínez Recio, A. (2000). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. Tesis doctoral, Universidad de Granada. (España).
- Piaget, J. (1973). Comments on mathematical education. En Howson, A. G. (Ed.). *Developments in mathematics education*. Cambridge: University Press, 79-87. Traducción española (1978). En Hernández, J. (Comp.). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza, S. A.
- Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas*. 10ma reimpresión. México: Trillas, S. A.
- Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos, S. A.
- Recio, T. (2001). La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. En: <http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html>
- Reid, D. A. (2002). What is proof? En: <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/02Ete/WhatIsProof.pdf>
- Van Hiele, H. P. (1986). *Structure and insight*. New York: Academic Press
- Vigotsky, L. (1985). *Interacción entre enseñanza y desarrollo*. La Habana: Pueblo y Educación.