VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

FORMACIÓN DE PROFESORES EN ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN

Jaime Fonseca González
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
jaimejaimef@hotmail.com

Resumen
Se diseñó, implementó y evaluó un entorno de aprendizaje basado en tareas profesionales de enseñanza de las matemáticas, como el análisis del pensamiento matemático de los estudiantes, desarrollado en Linares (2007). El entorno de aprendizaje se desarrolla en las fases de construcción espontánea, validación social y construcción fundamentada con la tarea de analizar el propio aprendizaje en resolución de problemas. El conocimiento construido por los estudiantes en cada una de estas fases se analizó con el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza de Ball, Thames y Phelps (2008). La articulación de estos referentes teóricos sugiere un modelo de formación en didáctica para profesores de matemáticas basado en resolución de problemas y construcción de conocimiento didáctico simultáneamente con la construcción de conocimiento matemático.

Palabras clave: formación, profesores, didáctica, variación.

Abstract
A learning environment was implemented and assessed, being based on teaching professional tasks as well as on students' mathematical thinking analysis, (developed by Linares, 2007). The learning environment phases are: spontaneous construction, social validation, and construction, supported by the own learning analysis about solving problems. The knowledge built by students along each phase was analyzed by means of Ball's model of mathematical knowledge for teaching. The connections of these theoretical reference frameworks suggest a model of didactic training for mathematics teachers. This model is based on problem solving, and didactic knowledge construction simultaneously with mathematical knowledge construction.

Key Words: teacher training, mathematical knowledge for teaching, didactic training of the variation.

Planteamiento del problema

La Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM), es un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, desarrollado en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en Bogotá-Colombia. En ella se concibe al profesor como "un profesional que investiga su práctica y que reflexiona sobre ella" (LEBEM, 2010, p.17) y coherente con ello, en la misión se ha propuesto construir un modelo de formación de profesores fundamentado en la resolución de problemas, la reflexión y la investigación sobre las prácticas. De este modo, LEBEM plantea un programa de investigación en el que los profesores formadores aportan en la construcción del modelo mencionado. La LEBEM organiza su currículo en cuatro núcleos problemático/temáticos: matemáticas escolares, pensamiento matemático avanzado, práctica en el aula de clase y contextos profesionales; particularmente, los dos primeros núcleos vinculan cada uno, asignaturas de matemáticas y didáctica de las matemáticas, proponiéndose responder a preguntas sobre ¿cómo ha sido, cómo es y cómo pueden ser las matemáticas escolares y el pensamiento matemático avanzado, como objeto de enseñanza, de aprendizaje y como objeto matemático? La asignatura didáctica de la variación se ubica en el núcleo de pensamiento matemático avanzado y tiene entre sus objetivos, construir conocimiento sobre la resolución de problemas de variación como contextos para el aprendizaje de los procesos de cambio y variación, a partir de situaciones problema; de este modo, la noción objeto de estudio se relaciona con objetos matemáticos como el cambio, la medición de cambio en modelos matemáticos representados por curvas, la factibilidad de respuestas y la modelación como pretensión de las matemáticas, que por su transversalidad en el currículo de matemáticas de la escuela resulta pertinente incluirse en la formación inicial de los profesores. Otra característica de la asignatura es que está propuesta para realizarse en quinto semestre, simultáneamente con la asignatura de matemáticas del movimiento I, en la que se estudian los conceptos de función, variación y cambio desde la modelación matemática. De este modo, se concibe que el conocimiento didáctico puede construirse simultáneamente con el conocimiento matemático.

En este contexto, el profesor de las asignaturas de didáctica de las matemáticas en general, y didáctica de la variación en particular, se enfrenta a la tarea de enseñar el conocimiento didáctico desde la resolución de problemas, sin que para ello haya mayores modelos para orientar la formación didáctica de profesores de matemáticas con las características mencionadas. Frente al anterior problema, se propuso un modelo de formación en didáctica bajo la tarea de analizar el propio aprendizaje del conocimiento matemático en el estudiante para profesor. Siguiendo la propuesta de Llinares (2007), se diseñó un entorno de aprendizaje en el que la resolución de problemas es un medio para construir conocimiento didáctico, vincularlo a la teoría y para ganar habilidades para el análisis de procesos de aprendizaje en sus futuras prácticas profesionales. En este sentido, el objetivo del trabajo es proponer y validar un modelo de formación didáctica para profesores de matemáticas fundamentado en la resolución de problemas. Este modelo se desarrolla con el diseño y validación de entornos de aprendizaje y el conocimiento construido por los estudiantes se analiza siguiendo el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza de Ball Thames, Phelps, (2008).

Marco Conceptual

Llinares (2007), al respecto de la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas, expone la necesidad diseñar “oportunidades” (entornos de aprendizaje) para que ellos puedan desarrollar conocimiento y destrezas que les permitan aprender de la enseñanza de las matemáticas. El diseño de estos entornos de aprendizaje supone la generación y uso de instrumentos técnicos y conceptuales para la realización de tareas profesionales asociadas a la enseñanza de las matemáticas, que se concretan en el desarrollo de “métodos de análisis e interpretación que permitan argumentar iniciativas pedagógicas con fundamentos (razonamiento pedagógico), y - adoptar posiciones críticas sobre la relación entre sus creencias y conocimiento y la perspectivas de acción y práctica generadas” (p.4)

En esta dirección, las tareas propuestas a los estudiantes para profesor constituyen los instrumentos de la práctica que debe ser comprendida y aprendida. En este sentido, las características de las tareas propuestas y las de su implementada son objetos de investigación. En esta perspectiva, Valls, Callejo & Llinares (2008), proponen dos desafíos importantes sobre la formación de profesores de matemáticas:

> (i) crear materiales para ayudar a los futuros maestros y profesores de matemáticas a dotar de sentido y gestionar las ideas de Didáctica de la Matemática que son pertinentes en la conceptualización de la enseñanza de las matemáticas, y (ii) desarrollar entornos de aprendizaje entendidos como oportunidades para que los estudiantes para maestro y profesores puedan desarrollar destrezas que les permitan seguir aprendiendo a lo largo de la vida profesional. (p.89)

Según Linares (2011) algunos de los contextos–problemas de la enseñanza de las matemáticas, son: seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas; interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes; iniciar y guiar el discurso matemático y gestionar las interacciones matemáticas en el aula. Estos constituyen un sistema de actividad en la enseñanza de las matemáticas como una actividad y definen un sistema de contextos-problema vinculados a la enseñanza las matemáticas, como: analizar las producciones de los estudiantes, organizar el contenido matemático para su enseñanza y gestionar la comunicación matemática en el aula

Diseño del entorno de aprendizaje

Se diseñó e implementación de un entorno de aprendizaje para que los estudiantes para profesor conceptualicen la práctica de enseñar la variación como parte del sistema de actividad denominada “Interpretar y analizar el pensamiento variacional de los estudiantes” y se analizó el conocimiento didáctico construido por los estudiantes para profesor. Se partió de la hipótesis de que los estudiantes para profesor, al centrar su atención en su propio aprendizaje, construyen conocimiento necesario para enseñar matemáticas y desarrollar destrezas para generar conocimiento desde la propia enseñanza. Este entorno se describe en cuatro componentes: la tarea propuesta, las fases de implementación, las fuentes de información y las herramientas de colaboración e interacción.

La Tarea propuesta a los estudiantes sobre el aprendizaje de la variación

A los estudiantes para profesor se les propuso la tarea de analizar su aprendizaje de la variación y el cambio en la resolución de un problema matemático. Siguiendo los problemas propuestos en Villa-Ochoa (2011), a los estudiantes se les entregó un archivo de Geogebra con la construcción de un rectángulo WXYZ inscrito en un cuadrado ABCD de lado 5cm, de modo que uno de los vértices del rectángulo (en este caso X) se encuentra animado y se desplaza por uno de los lados del cuadrado. La situación problémica propuesta fue: *En el cuadrado ABCD de 5cm de lado, se encuentra inscrito el rectángulo XYZW. Describir la manera en que varía el área de rectángulo XYZW.*

En general, la tarea propuesta para este modelo es analizar el propio aprendizaje sobre un objeto matemático en la resolución de un problema matemático. Los estudiantes inician la resolución y en los encuentros presenciales con el profesor este asume un rol de orientador en el cual escucha las estrategias de los estudiantes y resuelve los interrogantes surgidos, evitando que ello sesgara el proceso logrado por los estudiantes. Al finalizar la tarea, los estudiantes entregaron un documento escrito que reportaba elementos comunes como las estrategias desarrolladas, la solución alcanzada y las reflexiones sobre su aprendizaje. Estos mismos son socializados ante los demás estudiantes del curso.

Fases de implementación de entorno de aprendizaje

El entorno de aprendizaje se planeó e implementó en tres fases secuenciales denominadas: construcción espontanea, validación social y construcción fundamentada las cuales son descritas a continuación:

- Fase 1. Construcción espontánea. Análisis del estudiante en torno a su propio aprendizaje desde las categorías o componentes del proceso que considera relevantes y con los conocimientos previos que dispone. Se destinan tiempos intermitente o en paralelo para resolver el problema didáctico y el problema matemático.
- Fase 2. Validación Social. Momento en el que los pequeños grupos socializan en plenaria los resultados de la resolución de problemas y las reflexiones sobre su propio aprendizaje. En esta fase se busca recopilar el conocimiento construido en cada grupo y discutir resultados encontrados en cada grupo con las experiencias de otros.
- Fase 3. Construcción Fundamentada. Para esta fase, al estudiante se le proponen documentos que caractericen procesos, conceptos o habilidades relacionados con el aprendizaje o la enseñanza de los objetos matemáticos vinculados con la tarea propuesta. Luego, revisan su proceso de aprendizaje a la luz de los fundamentos presentados y obtienen nuevos resultados. Finalizado este procedimiento, se realiza nuevamente la fase 2 y se complementan los resultados alcanzados en las fases 1 y 2.

Las fuentes de información
Las fuentes de información para la fase 3 son artículos científicos en revistas especializadas, capítulos de libro, o memorias de investigadores reconocidos en el área. Para este entorno de aprendizaje se propuso la lectura de Posada y Villa-Ochoa (2006) en el que aborda el concepto de función desde una perspectiva variacional e involucra los registros de representación de la derivada, el incremento y la tasa promedio de cambio.

Herramientas de colaboración e interacción
La resolución del problema matemático y el análisis de propio aprendizaje se realizan en pequeños grupos, aunque hay periodos de discusión y socialización en el grupo entero. Inicialmente los estudiantes centran su atención en la resolución de problema matemático y dedican periodos a la reflexión sobre su aprendizaje. Con la finalización del periodo de resolución, se realizan socializaciones ante el grupo entero, con la oportunidad de discutir sobre los conceptos matemáticos y el aprendizaje. Hay periodos de discusión sobre el contenido de la lectura propuesta y de los resultados del análisis del aprendizaje de cada grupo.

Resultados

Para analizar el conocimiento construido por los estudiantes frente a la implementación del entorno de aprendizaje, se empleó el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza de Ball, Thames, & Phelps (2008), el cual divide el conocimiento en dos grandes categorías:

1. Conocimiento del contenido, relativo al conocimiento matemático, el cual se subdivide en: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático.
2. Conocimiento pedagógico del contenido, relativo al conocimiento para la enseñanza del conocimiento matemático, de igual forma se subdivide en: conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo.

Este modelo se emplea para el análisis del conocimiento construido en cada una de las fases de implementación de entorno de aprendizaje y es de esta manera como a continuación se presentan los resultados.

Fase de construcción espontánea

Conocimiento común del contenido. Es el conocimiento matemático que posibilita al profesor resolver correctamente los problemas o tareas matemáticas; no son exclusivos de la enseñanza, sino que son utilizados en una amplia variedad de contextos. Respecto a este conocimiento los estudiantes construyen nociones de incremento y tasa promedio de cambio. Identifican que la tasa promedio de cambio se modifica al variar el tamaño del intervalo, pero que converge a un número. Vinculan la variación con el límite de la razón de cambio, pero no la logran matematizarla. Encuentran o usan técnicas matemáticas para la construcción de representaciones algebraicas de una función.

Conocimiento especializado del contenido. Se concibe como un conglomerado de “conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza” (Ball, Thames, Phelps, 2008, p. 400). Al respecto, los estudiantes relacionan matemáticamente la variación con la razón entre dos magnitudes y el cambio con la diferencia entre dos cantidades de una magnitud. Vinculan el contexto de la variación geométrica con otras situaciones de variación como de la temperatura durante el día o la estatura de una persona a lo largo de su vida. Ofrecen explicaciones basadas en analogías para describir el movimiento. Tratamiento de situaciones de variación en ausencia del registro algebraico. Se aceptan descripciones cualitativas y mixtas del movimiento.

El conocimiento en el horizonte matemático. Se concibe como una toma de conciencia del panorama matemático en el que se sitúan la experiencia y la instrucción presentes. Respecto a este conocimiento, los estudiantes conciben el estudio del movimiento como una situación potencial para la enseñanza de las matemáticas y en el que los conceptos del cálculo toman significado. Comprenden que la solución de un problema matemático puede ser un conjunto articulado de objetos y resultados, más que un número u objeto matemático específico. Notan que, en libros de texto consultados, la enseñanza del cálculo está centrada en lo algoritmo y dividida en secciones no articuladas, lo que constituye una dificultad para el resolutor de problemas.
Conocimiento del contenido y de los estudiantes. Es el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre cómo los estudiantes piensan, conocen o aprenden este contenido particular. Los estudiantes identifican en su actividad matemática, estrategias de resolución de problemas, fases del proceso, errores y dificultades, soluciones parciales al problema, tanto por el nivel de complejidad, como por concentrarse en puntos o intervalos del movimiento y no en el movimiento completo.

Conocimiento del contenido y la enseñanza. Este tipo de conocimiento combina el conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento sobre las matemáticas. Al respecto, los estudiantes para profesor identifican potencialidades del software Geogebra en la resolución del problema, pero también obstáculos en la generalización de procedimientos. Además, identifican variaciones del problema propuesto para poder ser aplicado en diferentes niveles de la educación. Esta incluye acotar la descripción del movimiento en un intervalo o alrededor de un punto y aceptar descripciones cualitativas. Consideran prudente considerar movimientos periódicos en la enseñanza de la trigonometría.

Fase de Validación Social

Conocimiento común de contenido. Aparecen dos significados atribuidos por los estudiantes a la derivada 1) de la ecuación de la curva a la que convergen las sucesivas curvas asociadas a las tablas que expresan el cambio entre dos magnitudes cuando las particiones en que se divide el intervalo de variación de la variable independiente se hacen infinitamente pequeñas. 2) la razón de cambio entre dos magnitudes cuando una de las cantidades de la variable independiente se acerca infinitamente a la otra.

Conocimiento especializado del contenido. Los estudiantes realizan cálculos algebraicos con límites y sucesiones para calcular la derivada en un intervalo y en un punto. Además, concretan definiciones matemáticas de objetos matemáticos:

- Dada una función $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, continua en (a, b), se define:
- El incremento de y a z. Dados $y, z \in (a, b)$, denotado Δx, como la diferencia de y a z, es decir Δx = z – y
- El incremento de y_0 a y_1. Dados $y_0,\ y_1 \in Rang_f$, denotado Δy, como la diferencia de y_0 a y_1, es decir Δx = $y_1 - y_0$
- La tasa promedio de cambio. Dados $x_0,\ x_1 \in [a, b]$, denotado y su imagen por *f*, $f(x_0),\ f(x_1)$, se define como razón entre los incrementos Δx y Δy, es decir $\Delta y : \Delta x :: (y_0 - y_1) : (x_0 - x_1)$
- La tasa instantánea de cambio es la tasa promedio de cambio entre dos particiones consecutivas cuando la diferencia entre las dos abscisas es infinitamente ($n\Delta x$ y $n\Delta x - \Delta x$). Así, se obtiene $\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{A(n\Delta x) - A(n\Delta x - \Delta x)}{\Delta x}$

Conocimiento del contenido y los estudiantes. Respecto a este conocimiento, los estudiantes para profesor listan errores cometidos: simplificar las unidades en la razón entre las magnitudes área y longitud ($cm^2 : cm = cm$), usar aproximaciones numéricas en lugar de pensar en los cálculos exactos impide generalizar o algebrizar los cálculos. Identifican que un obstáculo es discretización de la situación, y amplían el uso de la razón a un instante y no en un intervalo.

Conocimiento del contenido y la enseñanza. Respecto a este tipo de conocimiento, los estudiantes analizan las características del problema matemático propuesto y notan que, para el caso de la variación, la descripción de un movimiento es una situación más amplia, abarcadora y retadora para la enseñanza de la variación. Comprueban que Geogebra permite simular situaciones de variación y tomar datos, pero estos no deben tomarse ciegamente, pues deben identificarse los procesos de cálculo para alcanzar su generalización. Amplían la noción mirada sobre las soluciones de problemas matemáticos al aceptar que la descripción de la variación puede matematizarse desde distintos niveles. Reconocen la necesidad de dar la libertad para acercarse a la solución y evitar sesgarla.

El conocimiento en el horizonte matemático. Los estudiantes reconocen que la resolución de problemas de variación amplios, les permite a los estudiantes experimentar situaciones cuya solución no es un número, función o un solo objeto matemático; una respuesta. Mostrando que las matemáticas más que "ciencia de los números y las formas" es el estudio de situaciones empleando objetos matemáticos. Destacan que saber matemáticas y aprender matemáticas no es solo saber de objetos y teoremas, sino poder aplicarlos en la matematización del mundo.

Fase de construcción documentada

Conocimiento del Contenido y los estudiantes. Al respecto, los estudiantes proponen la existencia de un nuevo registro de representación de la función y de la variación: el registro de representación gestual, que se caracteriza por el uso del lenguaje corporal y los movimientos de las manos o gestos faciales, con los que se denota el cambio o la variación en la resolución de problemas de variación; reconocen que el lenguaje gestual es una forma de expresar de alguna manera, aquellas ideas de las que no se tienen palabras para enunciar. El registro de representación prealgebraica, caracterizada por el uso de conjuntos de pasos de un procedimiento, en el que las operaciones son específicas y se mantienen invariantes; este registro se encuentra entre el registro del lenguaje natural y el algebraico.

Conocimiento del contenido y la enseñanza. Los registros de representación de la función y de la derivada son aplicables a la organización de la enseñanza de la variación en los diferentes niveles de la educación básica, media y superior. Reconocen relaciones entre distintos registros de representación, la existencia de reglas para el tratamiento de cada registro de representación, y la coordinación entre registros para solución el problema.

Conclusiones

Se propuso un modelo de formación en didáctica para profesores de matemáticas fundamentado en la resolución de problemas basados en la realización de tareas del profesor. La planeación de la formación se realiza con entornos de aprendizaje según las orientaciones y desarrollos sobre tareas del profesor desarrollados por Llinares (2011), que incluyen competencias del profesor. Bajo la tarea de analizar el propio aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos, los entornos de aprendizaje se desarrollan en tres fases: construcción espontánea, validación social y construcción fundamentada. Los aprendizajes de los estudiantes sobre conocimiento didáctico y matemático, se puede analizar mediante el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza de Ball Thames y Phelps (2008). En el caso particular de la tarea de analizar del propio aprendizaje de las matemáticas, favorecen espacios de reflexión sobre la propia práctica matemática del estudiante y pensar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este conocimiento construido resulta significativo para el profesor, pues es la modelación de su propia experiencia y la de otros en la realización de una tarea de profesor.

Referencias bibliográficas

Ball, D.L., Thames, M.H., Phelps, G.C. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education 59(5)*, 389-407.

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (2010). *Documento de re-acreditación con fines de renovación de la acreditación de alta calidad. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá*. Colombia: Documento no publicado.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Memorias de la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Granada: Universidad de Alicante. Recuperado el 05 de mayo 2017 de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/853/1/llinares-jaem-granada07.pdf.

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas 78*, 5-16.

Posada, F.A., Villa-Ochoa, J.A. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En F.A. Posada, G. Obando, (Eds.), *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico* (pp.127-163). Medellín, Colombia: Gobernación de Antioquia.

Vall, J., Cellejo, M.L., Llinares S. (2008) Dialécticas en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el área de Didáctica de la Matemática. *Publicaciones - Facultad de Educación y Humanidades Campus de Melilla, Universidad de Granada 38*, 89-103.

Villa-ochoa, J.A. (2011) *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.