

GENESIS INSTRUMENTAL DE LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA MEDIADA POR GEOGEBRA

Daysi Julissa García-Cuéllar, Mihály Martínez-Miraval, Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Pontificia Universidad Católica del Perú,
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas-TecVEM. (Brasil, Perú)
ra00193072@puccp.edu.br, martinez.ma@puccp.edu.pe, jvflores@puccp.edu.pe

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo analizar la génesis instrumental de la noción de razón de cambio instantánea mediada por el GeoGebra en estudiantes de administración de los primeros ciclos de una universidad particular de Lima-Perú. Como base teórica y metodológica utilizamos aspectos del Enfoque Instrumental y aspectos de la Ingeniería Didáctica, respectivamente. Como resultado de las acciones de los estudiantes, al desarrollar las actividades, se identificaron esquemas de utilización relacionados con la razón de cambio instantánea, lo cual mostró una instrumentalización e instrumentación de dicha noción.

Palabras clave: génesis instrumental, razón de cambio instantánea, GeoGebra

Abstract

This investigation aims to analyze the instrumental genesis of the notion of instantaneous rate of change through GeoGebra in Administration students in their first semester at a private university of Lima-Peru. As theoretical and methodological basis, we used aspects from the Instrumental Approach and aspects of Didactic Engineering, respectively. Resulting from students' actions, when carrying out the activities, schedules of use related to instantaneous rate of change could be identified, which showed the instrumentalization and implementation of such notion.

Key words: instrumental genesis, instantaneous rate of change, GeoGebra

■ Introducción

En el área de Educación Matemática existen investigaciones que muestran la necesidad de realizar estudios sobre la razón de cambio instantánea (Orton, 1983; Dolores, 2007; Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa, 2018), además de esta relevancia, otra de las razones por la que estamos interesados en investigar este contenido es que está presente en los cursos de Cálculo de muchas especialidades a nivel universitario, lo cual evidencia la pertinencia de nuestra investigación.

Artigue (1995) sostiene que, aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático.

En ese sentido, Silvia (2013) señala que por medio de la derivada es posible cuantificar y describir la rapidez de la variación de fenómenos de la naturaleza o de la práctica, no obstante, en el aprendizaje formal, al estudiante le resulta muy complejo entender la razón de cambio. Entonces para identificar cómo esta noción está presente en los libros de texto de cálculo a nivel universitario, presentamos brevemente la revisión de tres libros de textos que se usan en dichos cursos en universidades de Lima – Perú (ver tabla 1).

Tabla 1. Libros de texto usados en la enseñanza del cálculo

| Libro de texto | Autor |
|---------------------------------------|---------------|
| Cálculo de una variable (7° edición) | James Stewart |
| Cálculo de una variable (12° edición) | George Thomas |
| Cálculo 1 (9° edición) | Ron Larson |

Se observó que en los tres libros se presenta la noción de derivada asociada al cálculo de la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función, y la razón de cambio instantánea solo se trabaja como una aplicación de la derivada, como se puede observar en la figura 1, y no se presentan tareas/actividades en las que el estudiante pueda construirla.

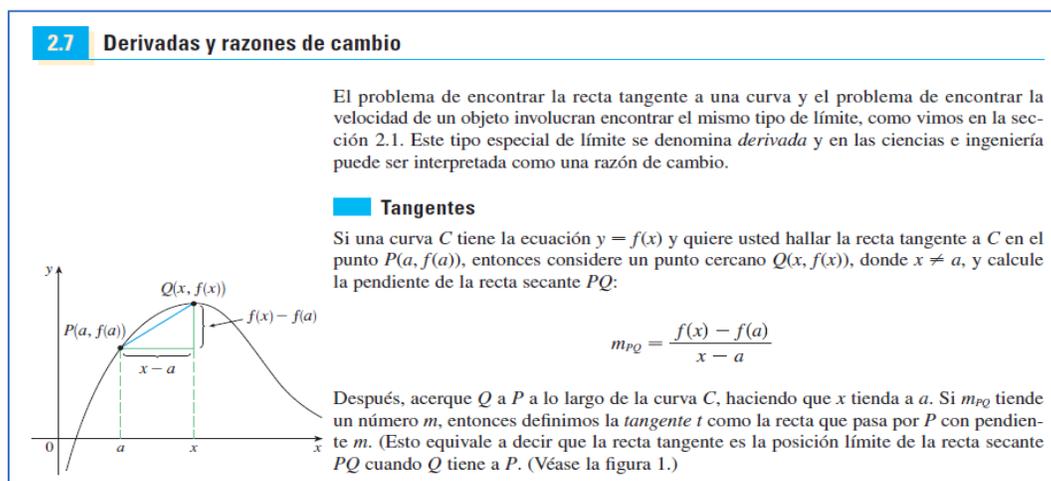


Figura 1. Derivadas y razón de cambio (Stewart, 2011; p. 143)

Por lo anterior, el objetivo de nuestra investigación se centra en analizar la génesis instrumental de la razón de cambio instantánea de una función mediada por el GeoGebra en estudiantes de la carrera de administración en una universidad privada de Lima – Perú.

Para analizar este fenómeno utilizamos como marco teórico aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y como marco metodológico, aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995), que presentamos a continuación.

■ Aspectos del Enfoque Instrumental y de la Ingeniería Didáctica

El Enfoque Instrumental aborda la dimensión tecnológica de la educación matemática, articulando los aspectos importantes de la integración tecnológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Salazar (2009), en su investigación, presenta las nociones claves de este Enfoque que son las siguientes:
Esquema: Es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.

Artefacto: Es un objeto material o simbólico, destinado a dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de un cierto tipo de tarea.

Instrumento: Es lo que un sujeto construye a partir del artefacto (figura 2); es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción.

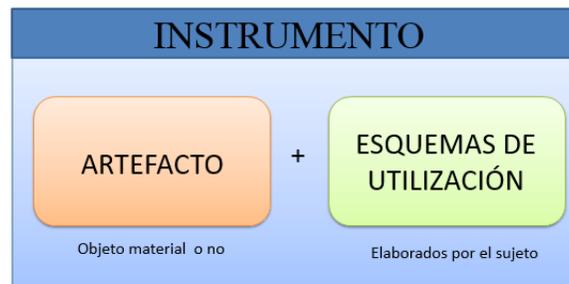


Figura 2. Componentes de un instrumento. Adaptado de García-Cuéllar (2014)

Así, de acuerdo a Rabardel (1995), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso Génesis Instrumental. El autor considera tres polos importantes en la Génesis instrumental, estos son: el sujeto, que puede ser un usuario, operario, trabajador o agente; el instrumento, que se refiere de la herramienta, máquinas, sistemas, utensilio, etc.; y el objeto, al cual va dirigida la acción con ayuda del instrumento, este puede ser la materia prima, objeto de la actividad o trabajo.

El investigador sostiene que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, como medio para la misma. En nuestro caso, el artefacto simbólico es la razón de cambio instantánea. El autor señala que el artefacto pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes.

En cuanto a la génesis instrumental, esta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.

Los procesos de instrumentalización están dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc. [...] los procesos de Instrumentación están relacionados con el sujeto: con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 1995, p. 215).

Por lo anterior, las dos dimensiones de la Génesis Instrumental dependen de su orientación:

La instrumentalización está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta del enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto.

La instrumentación está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

En ese sentido, Trouche (2016) sostiene que estas dos dimensiones de la Génesis Instrumental no son independientes una de la otra, sino que son entrelazadas. Pero, para distinguirlos en el análisis, se puede focalizar por un lado en el estudiante (¿En qué medida la integración de un nuevo artefacto modifica la forma de su actividad?), y por otro lado, en el artefacto (¿En qué medida este aporta al vestigio de la actividad del estudiante, de su poder creativo?).

El Enfoque Instrumental se basa en la noción de esquema de Vergnaud (1996), para este último un esquema:

- Es una organización invariante de la actividad para una clase de situación dada.
- Está formado necesariamente por cuatro componentes:
 - ✓ Un objetivo, sub-objetivo y anticipaciones
 - ✓ Reglas de acción, formada de informaciones y control
 - ✓ Invariantes operatorios (reglas de acción y teoremas en acción)
 - ✓ Posibilidades de inferencias en una situación

Rabardel (1995), a partir de esta noción de esquema, define los esquemas de utilización como el conjunto estructurado de las características generalizables de la acción que permiten repetir la misma acción o aplicarlas en nuevos contextos. Estos esquemas, a la vez, pueden ser clasificados en esquemas de uso (dirigidas a tareas secundarias), esquemas de acción instrumentada (dirigidas a la tarea principal o primaria) y esquemas de acción colectiva instrumentada (cuando el colectivo comparte el mismo instrumento o trabaja con la misma clase de instrumento, buscando alcanzar una meta en común). En nuestro estudio nos centraremos en los esquemas de uso y de acción instrumentada.

En cuanto a nuestra metodología, utilizaremos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Al igual que un ingeniero, la autora sostiene que el

profesor concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un contenido matemático determinado por un grupo específico de estudiantes.

■ Experimento y análisis

Con base en aspectos de la Ingeniería Didáctica y del Enfoque Instrumental diseñamos e implementado *applets* en GeoGebra en base a deslizadores y algunas propiedades de arrastre propias del software. La parte experimental se desarrolló con 10 estudiantes del curso de matemática de la carrera de administración, en un laboratorio con computadoras.

Las actividades se realizaron en dos encuentros. La actividad 1 contiene 5 subactividades y la actividad 2, contiene 3 subactividades.

A continuación presentamos los análisis a priori y a posteriori de dos subactividades de cada una de las actividades propuestas.

Actividad N° 1:

Abra el archivo Actividad_1.ggb. En la vista gráfica del programa, se han dibujado la función f cuya regla de correspondencia es $f(x) = 0,25x^2 + 2$, y una recta L que pasa por los puntos A y B que pertenecen a la gráfica de f . Asimismo, se ha diseñado el deslizador D que permite mover el punto B.

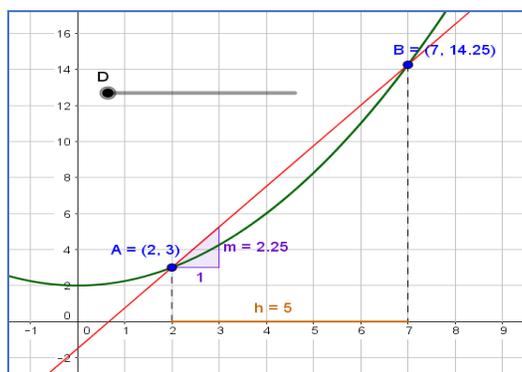


Figura 3. Imagen del archivo Actividad_1.ggb: Función f , recta secante y pendiente. Elaboración propia.

Manipule el deslizador D y complete la tabla.

| Abscisa del punto A (x_A) | Abscisa del punto B (x_B) | h | m | Razón de cambio promedio de f cuando x aumenta de x_A a x_B |
|-------------------------------|-------------------------------|-----|-----|---|
| 2 | 4,001 | | | |
| 2 | 3,001 | | | |
| 2 | 2,101 | | | |
| 2 | 2,001 | | | |

- a) Según los datos de la tabla, indique a qué valor cree usted que se aproxima la razón de cambio promedio de f cuando h tiende a 0, es decir, en el punto A. Explique.
 b) ¿cuál es el valor de la pendiente “m” cuando el valor de h es cero?

A priori, consideramos que los estudiantes movilizarían esquemas preexistentes como son las nociones de pendiente de recta secante, de funciones y razón de cambio promedio (RCP). Luego, al manipular el deslizador D, se esperaba que generaran esquemas de uso de la aproximación de m y RCP, cuando el parámetro h tiende a cero; asimismo, que generaran esquemas de acción instrumentada de la razón de cambio instantánea como la pendiente de recta tangente a la gráfica de una función.

De acuerdo a lo previsto, mostramos el análisis a posteriori de uno de los estudiantes que denominaremos como Sebastián. Al completar la tabla correctamente, se pudo observar que el estudiante movilizó esquemas como pendiente de recta secante, de funciones y razón de cambio promedio (RCP).

Respecto a la pregunta a, el estudiante respondió:

A medida que el punto B se aproxima al punto A, la recta L es tangente.
 El valor $y=1$ se aproxima a la razón de cambio promedio de f cuando h se acerca a 0.

Figura 4. Respuesta del estudiante Sebastián en su ficha de trabajo. Elaboración propia.

Como se muestra en la figura 4, Sebastián al manipular el deslizador D, moviliza esquemas de uso, recta tangente, razón de cambio promedio, coordenadas de un punto. Al responder que la recta L es tangente a la curva a medida que el punto A se aproxima a B, nos da indicios de que ha generado el esquema de acción instrumentada de la razón de cambio instantánea como la pendiente de recta tangente a la gráfica de una función.

Actividad N° 2:

El dueño de una tienda calculó su utilidad U (en miles de soles) en cada uno de los 11 meses que estuvo la tienda operativa, y la representó mediante el siguiente modelo matemático $U(x) = 0,05x^3 - 0,9x^2 + 4,05x + 1$, donde x es el número de meses que transcurrieron desde su apertura. Abra el archivo Utilidad.ggb y desarrolle la siguiente actividad.

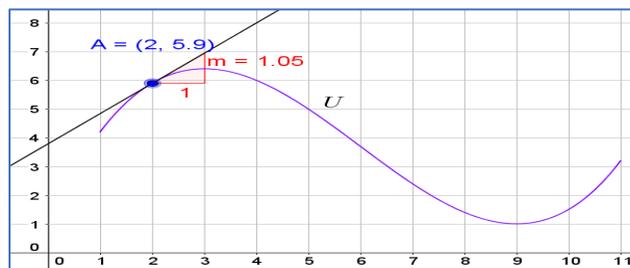
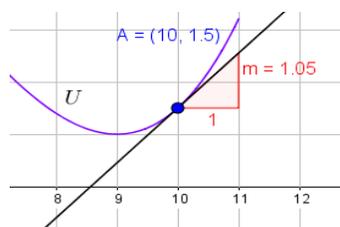


Figura 5. Imagen del archivo Utilidad.ggb: Utilidad en función del tiempo. Elaboración propia.

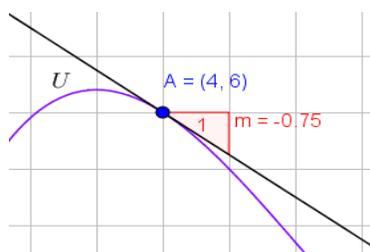
- ¿Se puede afirmar que cuando han transcurrido diez meses de la apertura de la tienda, la utilidad aumenta a razón de 1,5 miles de soles por mes? Justifique.
- ¿Luego de cuantos meses desde la apertura de la tienda, la utilidad disminuyó a razón de 0,75 miles de soles por mes? Justifique.

A priori, se esperaba que al realizar el arrastre del punto A, los estudiantes reconocieran lo que representa la pendiente de la recta trazada y las coordenadas de dicho punto, en el contexto de la situación, movilizando los esquemas de uso, pendiente de recta, función, coordenadas de puntos; y el esquema de acción instrumentada, razón de cambio instantánea. Se esperaba que los estudiantes indiquen en la primera pregunta que la afirmación es falsa porque luego de diez meses la utilidad aumenta a razón de 1,05 miles de soles por mes y que asocien en la segunda pregunta, el término disminuir con una razón de cambio instantánea negativa, es decir, $m = -0,75$.

A posteriori, en las acciones de Sebastián, se apreció que el estudiante utilizó la pendiente de una recta tangente de la función utilidad para dar respuesta a las preguntas, movilizando el esquema de acción instrumentada razón de cambio instantánea como se puede apreciar en sus respuestas en la figura 6.



No, la utilidad aumenta en 1.05 miles de soles por mes.



En el cuarto mes la utilidad disminuyó a razón de 0.75 miles soles por mes.

Figura 6. Respuestas de Sebastián en la actividad 2. Elaboración propia.

■ Conclusiones

La transformación del artefacto simbólico razón de cambio instantánea en instrumento puede ser constatada cuando los estudiantes resuelven las actividades propuestas sobre el artefacto en estudio. El análisis realizado sobre la forma como fueron movilizados los esquemas de utilización permite verificar cómo se da el proceso de Génesis Instrumental.

Es importante destacar que en la Génesis instrumental, el estudiante (Sebastián) maneja desde ya un repertorio de esquemas y que estos son acomodados o generalizados al nuevo artefacto para atribuirle un cambio de significado. Por ejemplo, en esta investigación, los esquemas como función, tangente y razón de cambio promedio son parte del repertorio que movilizan los estudiantes para atribuirle un significado a la razón de cambio instantánea.

El GeoGebra contribuyó en el aprendizaje de la razón de cambio instantánea por las características de sus herramientas, especialmente, el arrastre y los deslizadores.

■ Agradecimientos

Agradecemos al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por el apoyo en el fortalecimiento del grupo y línea Tecnologías y Visualización en Educación Matemática: TecVEM-IREM y TecVEM-MEM.

■ Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México D.F: Ediciones Díaz de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.
- García-Cuéllar, D. J. (2014) *Simetría axial mediada por el GeoGebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/307466908_Simetria_axial_mediada_por_el_GeoGebra_un_estudio_con_estudiantes_de_primer_grado_de_educacion_secundaria
- Larson, R. y Bruce, H. (2010). *Calculo I*. México D.F.: Mc Graw Hill.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instrumentns contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics* 14 (3), pp.235-250.
- Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.
- Silvia, A. (2013). *Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico*. Recuperado de: www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO9.pdf
- Stewart, J. (2011). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas*. México, D. F.: Thomson Editores.
- Thomas, G. (2010). *Cálculo de una variable*. Décimo segunda edición. México, D. F.: Pearson
- Trouche, L. (2016). *Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático*. I LADIMA, Bonito, Brasil.
- Vergnaud, G. (1996). *A teoria dos campos conceptuais*. En Jean Brun (org), *Didáctica das matemáticas*. (pp. 155-189). Lisboa: Horizontes pedagógicos.
- Villa-Ochoa, J., González-Gómez, D. y Carmona-Mesa, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria* 11(2), 5-34. DOI. 10.4067/S0718-50062018000200025