

# MODELO TECNO-PEDAGÓGICO EN EL AULA DE TRIGONOMETRÍA

John Jairo García Mora, Sonia Jaquelliny Moreno Jiménez  
Instituto Tecnológico Metropolitano. (Colombia)  
jhongarcia54@gmail.com, jaquemj24@gmail.com

## Resumen

La experiencia de aula que aquí se comparte describe cómo los estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial lograron la comprensión y el análisis de las funciones trigonométricas con el apoyo de un OIA con simulaciones de GeoGebra (software matemático interactivo libre que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas y la representación gráfica de las mismas). Dicha experiencia se facilitó mediante la aplicación del modelo Tecno-Pedagógico TPACK que orienta el trabajo en las aulas con actividades apoyadas en tecnología para que el estudiante considere, practique, interprete, produzca, aplique, evalúe y cree nuevas formas para demostrar su apropiación del conocimiento y, el docente se adapte a las nuevas tendencias en pedagogía.

**Palabras clave:** TIC, ecosistema educativo, TPACK.

## Abstract

The classroom experience, that we share here, describes how the students of a Differential Calculus course achieved the understanding and analysis of trigonometric functions with the support of an IOL with simulations by GeoGebra (a free interactive mathematical software that allows the dynamic tracing of geometric constructions and their graphic representation). This experience was facilitated by the application of the TPACK Techno-Pedagogical model which guides classroom work with technology-assisted activities for the students to consider, practice, interpret, produce, apply, evaluate and create new ways to demonstrate their acquisition of knowledge; thereof for the teacher to adapt to the new trends in pedagogy.

**Key words:** ICTs, educational ecosystem, TPACK.

## ■ Planteamiento del problema

Para crear un aula innovadora donde se logren las competencias del currículo en trigonometría tienen que coexistir en mayor o menor grado un buen docente, una excelente perspectiva pedagógica del saber impartido, la preocupación por el aprendizaje de este y, una relación entre los nativos digitales y los inmigrantes digitales. Esos conjuntos de características no las garantizan las Tecnologías de la Información y la Comunicación por sí mismas, según la UNESCO:

En el futuro, las competencias fundamentales comprenderán la capacidad tanto para desarrollar métodos innovadores de utilización de TIC en el mejoramiento del entorno de aprendizaje, como para estimular la adquisición de nociones básicas en TIC, profundizar el conocimiento y generarlo (UNESCO, 2008, p.7).

El diccionario de la Real Academia de la lengua Española define “Ecosistema” como una comunidad de seres vivos que se desarrollan en función de los factores físicos de un mismo ambiente, esta descripción es el fundamento de la teoría “Ecológica” propuesta por Urie Bronfenbrenner en su libro “La ecología del desarrollo humano”, teoría que permite entender la influencia de las TIC en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje y al mismo tiempo como el ser humano transforma esas tecnologías. Expresado de otra forma, en este ecosistema educativo, el ser humano y los recursos digitales del proceso de enseñanza y aprendizaje como actores, se alternan el rol de objeto y de sujeto en el campo educativo (Bronfenbrenner, 1979, p. 26).

Ese cambio de rol facilita la entrada en escena del docente del tercer entorno, definido por Echavarría (2000, p18) como aquél docente que actúa en “un nuevo ámbito social para las interrelaciones humanas... para ser activo en el nuevo espacio social se requieren nuevos conocimientos y destrezas que habrán de ser aprendidos en los procesos educativos”, es aquí donde cobra importancia la labor docente.

El ecosistema educativo donde habita ese docente del tercer entorno lo obliga a participar de diferentes formas, en el ámbito universitario al docente le implica que debe intervenir en una o en varias de las características que le permiten ser un elemento activo del ecosistema educativo modelo siglo XXI. Ese docente participa en diferentes roles generados por las TIC: integrador de contenidos, desarrollador de esos contenidos, elaborar diseños instruccionales, realizar tutorías, brindar soporte a los programas de la dirección, trabajar en la preproducción y producción de contenidos curriculares y de los diseños multimediales.

Con estos nuevos roles en mente y tomando como referencia los resultados acerca de la enseñanza de las Funciones Circulares en cursos anteriores, surge del cuestionamiento: ¿podemos lograr que los estudiantes de nuestro curso comprendan y analicen este tipo de funciones con la simulación que se puede realizar con GeoGebra inmerso en un OIA?

Aquí asumimos el rol de Diseñadores Multimediales para lograr el objetivo de nuestra experiencia de aula: facilitar el aprendizaje de las Funciones Trigonométricas por los estudiantes desde la óptica de las funciones circulares.

### ■ Indagación bibliográfica

Acerca del estudio de las funciones trigonométricas Ugalde (2013, p23) expresa que una situación de interés son los fenómenos periódicos como:

Las mareas, las fases de la luna, la traslación de la tierra alrededor del sol, las estaciones del año, los días en el calendario, las épocas para siembra, los horarios del autobús, los diferentes tipos de vibraciones; son todas situaciones que presentan comportamientos de tipo periódico, o muy próximos a serlo. Una excelente oportunidad de aprendizaje es combinar actividades de medición, y estudio de estos fenómenos, con el estudio de las funciones trigonométricas.

En este trabajo de nombre “Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje” Ugalde concluye que “el verdadero reto al enseñar el concepto de función radica en como

diseñar actividades para que los estudiantes descubran el concepto de función por sí mismos”, es aquí donde las TIC juegan un papel importante.

Una de las áreas en las que estas tecnologías han estado presentes con mayor fuerza son las ciencias, especialmente las matemáticas pues en este campo se encuentran aplicaciones libres que han impulsado la creación de objetos de aprendizaje que permiten una mejor comprensión de los conceptos matemáticos y, además, como apoyo al desarrollo de la clase en el aula motivan al estudiante para que se apropie de nuevo conocimiento o al refuerzo de las competencias ya adquiridas (Chiape, 2009).

Gutiérrez, Buitrago & Ariza. (2017), apoyan la inserción de las tecnologías de la información y la comunicación TIC en la educación como una posibilidad de aprendizaje que provoca cambios en los procesos de apropiación del conocimiento, en su trabajo “Diseño de una OVA como mediador pedagógico para la enseñanza de la derivada”; inician el trabajo investigativo centrándose en la identificación y caracterización de dificultades en el aprendizaje de la derivada, en la etapa siguiente proponen el diseño de un OVA como mediador pedagógico, y en la tercera etapa realizan la implementación del mismo junto con el análisis del impacto en los estudiantes y en su proceso de aprendizaje. Considerado por los estudiantes el tema de derivadas como un obstáculo para su aprendizaje, a partir de la implementación del OVA, afirmaron tener buenas bases; es necesario antes de la aplicación de este recurso, evaluar las necesidades reales de los estudiantes en la temática específica y de los procesos de aprendizaje, para apoyar los mismos con actividades y recursos que suplan la necesidad. A pesar de que las TIC ha apoyado los procesos en todos los campos de la educación, el proyecto resalta la necesidad de capacitación docente continua en cuanto a su uso, tanto en el diseño como en el uso de recursos digitales.

Al momento de diseñar los OVA es necesario partir de las características de los estilos de aprendizaje, que se definen como las distintas formas en que una persona puede aprender y están descritas como las condiciones bajo las que un estudiante se encuentra en la mejor disposición para aprender, o qué estructura necesita para mejorar el proceso de aprendizaje.

Para los ámbitos Psicológico y educativo, un estilo de aprendizaje permite identificar el comportamiento de una persona a estímulos afectivos, fisiológicos y cognitivos ante la información que se le proporciona para resolver problemas en un entorno de aprendizaje.

Existen 12 estilos (Corbin, 2016) de aprendizaje y uno de ellos es el visual caracterizado porque a él pertenecen los estudiantes que no son buenos leyendo textos, pero, en cambio, asimilan muy bien las imágenes, diagramas, gráficos y vídeos. Suele ser práctico para esos estudiantes el empleo de símbolos o crear una taquigrafía visual al tomar apuntes, es aquí donde cobra importancia el diseño multimedial que caracteriza el ecosistema educativo actual.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como recursos de aprendizaje permiten pasar de un uso informativo y colaborativo a un uso didáctico para lograr unos resultados de aprendizaje que influyen sobre el ecosistema educativo y es aquí donde los modelos de incorporación de las TIC en nuestras clases de Trigonometría apoyan nuestro quehacer docente.

Con los avances de la cibercultura creada por las Tecnologías de la Información y la Comunicación-TIC, surgieron los términos de nativo digital y el de inmigrante digital acuñados por Marc Prensky en el año 2001, para él, los nativos digitales son personas jóvenes o niños que van desarrollándose al ritmo de los

videojuegos, usan con facilidad la computadora, el E-mail, las redes sociales y los teléfonos celulares, ello requiere conocer la forma de introducir recursos TIC en el aula bajo un modelo.

El modelo EAAP es el acrónimo de Estilos de Aprendizaje y Actividades Polifásicas presentado por Cacheiro (2011) y fundamentado en los estilos de aprendizaje Activo (A), el estilo Pragmático (P), el estilo Teórico (T) y el estilo Reflexivo (R). Es de resaltar que la zona donde convergen los cuatro estilos de aprendizaje requiere que el docente tenga los suficientes conocimientos para crear páginas web con contenidos multimedia, videos interactivos, Objetos Virtuales de Aprendizaje y quizá lo más importante: saber diseñar la evaluación de este tipo de recursos digitales.

Producto de esa búsqueda bibliográfica surge el modelo propuesto por *Rubén Puentedura*, que establece cuatro niveles de inserción de la tecnología en el aula: Sustitución, Ampliación, Modificación y Redefinición, de sus siglas en inglés surge el acrónimo del modelo SMAR: *Substitution, Augmentation, Modification, Redefinition* y se refiere al proceso de integración de TIC en el diseño de actividades y se justifica desde la necesidad de mejorar la calidad de la enseñanza y garantizar un sistema de promoción social que garantice la equidad y su implementación en el aula se realiza en dos etapas: una denominada perfeccionamiento y otra llamada transformación y cada una de ellas involucra dos procesos:

En la etapa de perfeccionamiento entra en escena el proceso de sustitución donde la tecnología permite el cambio de la tiza y el tablero a pizarras a base de bits y por otro lado el proceso denominado ampliación donde se realizan algunas mejoras al proceso anterior, la tecnología es un sustituto que permite ver más allá de una pizarra, pero los conceptos teóricos son los mismos que se trabajase sin esa tecnología.

La etapa de transformación del modelo de *Puentedura* se inicia con un proceso de modificación caracterizado porque la tecnología es utilizada para crear asignaciones en las que el uso de las tecnologías es determinante para poder llevarlas a cabo y, por último, el proceso de redefinición donde las tareas asignadas solo pueden lograrse a través del uso de la tecnología.

Un tercer modelo de inserción denominado TPACK es el acrónimo de la expresión “*Technological Pedagogical Content Knowledge*” (Conocimiento Técnico Pedagógico del Contenido) y que fue desarrollado entre el 2006 y 2009 por los profesores Punya Mishra y Matthew J. Koehler, de la Universidad Estatal de Michigan, se describe como un modelo que identifica los tipos de conocimiento que un docente necesita dominar para integrar las TIC de una forma eficaz en la enseñanza que imparte (Koehler, 2012).

El modelo TPACK se centra en la importancia del Conocimiento (*K-Knowledge*) sobre el Contenido (*C-Content*), la Pedagogía (*P-Pedagogy*) y la Tecnología (*T-Technology*), así como los conocimientos sobre las posibles interrelaciones entre ellos.

## ■ Metodología

Debido a las dificultades observadas en el aprendizaje de las funciones de variable real (la conceptualización previa a las funciones circulares) de los treinta y cinco estudiantes del curso presencial de la asignatura Cálculo Diferencial de un programa de ingeniería, se les consultó acerca del uso de la tecnología para su trabajo independiente empleando los denominados Objetos Virtuales de Aprendizaje-

OVA, los vídeos lección y los Objetos Interactivos de Aprendizaje-OIA. El resultado de esa indagación mostró que esos recursos cuando son empleados pueden llegar a superar la dificultad abstraer los conceptos matemáticos, por ello, se optó por aplicar un OIA en ese tema específico: las funciones circulares con el objetivo de los estudiantes se apropiasen del ese conocimiento. Luego de analizar los modelos de inserción de la tecnología en el aula antes descritos: EAAP, SMAR y TPACK optamos por este último por las siguientes razones:

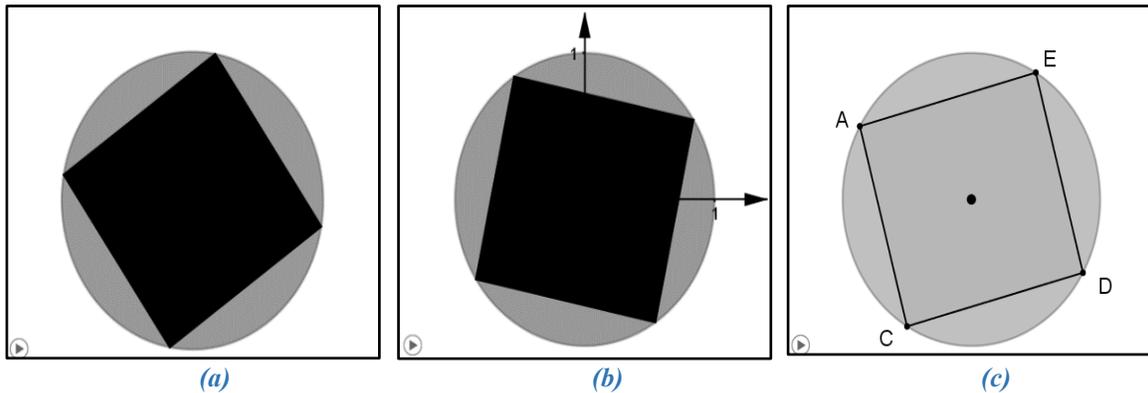
- Admite diseñar actividades sin requerimientos tecnológicos sofisticados.
- Permite aplicar los diseños instruccionales desde diferentes ópticas: con o sin recursos digitales.
- Facilita el fomento de actividades para modelos de trabajo digital o no digital.
- Es ideal para procesos de enseñanza y aprendizaje con modelos Híbridos.
- Orienta simulaciones que ofrecen entornos para la observación, exploración y la experimentación.
- Es útil para evaluar permanentemente la práctica profesional y reflexionar sobre ella para llevar a cabo labores de innovación y mejora continuas o permanentes.

En la aplicación de un OIA con el apoyo del modelo TPACK en la enseñanza de las funciones circulares tomamos como punto de partida de que esas funciones fueron creadas con el fin de extender las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo a todos los números reales y, que bajo este modelo aparecen sus posibles intercepciones: el conocimiento y la pedagogía, la instrucción y la tecnología, el conocimiento y la tecnología y el conocimiento con la pedagogía y la tecnología como observaremos en la aplicación que compartimos.

La pedagogía de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo, través de la historia de la trigonometría pasó del estudio de los ángulos de un triángulo rectángulo a una abstracción de gran utilidad con el estudio de las razones entre los lados de este tipo de triángulo, luego fueron extendiéndose luego a otro tipo de triángulos, de allí conocemos las razones denominadas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Son estas razones del triángulo rectángulo la base de las funciones circulares.

Esa pedagogía tradicionalmente implica el dibujo de un triángulo con un ángulo recto y la aplicación de la nomenclatura para ángulos agudos, catetos e hipotenusa, implica, además, la habilidad de analizar o desglosar las partes que permitan encontrar patrones. Una clase de trigonometría magistral o virtual permitirá: a) Reconocer las Razones Trigonométricas (seno, coseno, tangente) con ángulos y pendientes, b) Manifestar coherencia al realizar cambios de registro en forma oral y escrita de las razones trigonométricas y c) Realizar conjeturas y formular relaciones entre ángulos y la pendiente en un triángulo rectángulo.

Uno de nuestros diseños aprovecha la simulación del cuadrado giratorio y se invita a los estudiantes a plantear conjeturas para ese movimiento (figura 1a), simulacro realizado con tecnología.



*Figura 1. Secuencia para demostrar la conjetura acerca del giro del cuadrado*  
Fuente: Creación propia realizada con GeoGebra 5

Luego de escuchar las conjeturas

A continuación, se detiene la simulación y el observador puede distinguir el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas cuya intercepción coincide con el centro de un círculo unitario, lo que presenta pistas para demostrar la conjetura planteada.

### ■ Resultados o avances

Con el resultado positivo (evidenciado en las notas evaluativas del concepto) obtenido con el recurso diseñado y el voto favorable de los estudiantes a través de una encuesta, pensamos que es necesario crear una nueva realidad que se adapte a las necesidades de aprendizaje tan diversas en la era de los nativos digitales y responder al cuestionamiento de si es o no es conveniente crear pedagogías emergentes para potenciar el “Aprender a aprender”, por ello proponemos la estrategia que aparece en la tabla 1 fundamentada en la propuesta de Grandgenett, Harris & Hofer (2011) acerca de los elementos de aula para considerar una demostración, para practicar, interpretar, producir, aplicar, evaluar y crear actividades de aprendizaje.

*Tabla 1. Propuesta de actividades para el aula*

Actividad estudiantil	Criterios guía al estudiante	Recursos
<b><u>Género: Considerar</u></b> <b>Presenciar una demostración</b>	Se adquieren conceptos cuyo origen puede ser una presentación, un video, una animación o una interactividad	Video Escena interactiva creada con Descartes JS o con GeoGebra
<b><u>Género: Considerar</u></b> <b>Leer texto</b>	Extraer información acerca de los conocimientos previos, del saber teórico u otros materiales recomendados en el OIA diseñado.	Documentos en formato *.pdf Documentos en formato *.doc Video interactivo

<b><u>Género: Considerar</u></b> <b>Investigar un concepto</b>	Explorar o investigar un concepto usando Internet u otras fuentes de investigación.	Guía Enlaces desde el OIA diseñado Buscadores como Google, Firefox, Opera y Microsoft Edge entre otros
<b><u>Género: practicar</u></b> <b>Realizar cálculos</b>	Emplear estrategias digitales basadas en computadora usando procesamiento numérico o simbólico.	Evaluación interactiva del OIA Recursos de GeoGebra.org Recursos de Descartes JS.org Ejercicios propuestos
<b><u>Género: interpretar</u></b> <b>Plantear una conjetura</b>	Desde la interactividad con OIA se plantea una conjetura que permita establecer relaciones	Evaluación interactiva del OIA Recursos de GeoGebra.org Recursos de Descartes JS.org
<b><u>Género: producir</u></b> <b>Describe matemáticamente un concepto</b>	Asistido por la tecnología en el proceso de descripción o documentación, se produce una explicación matemática de su objeto o concepto.	Guía Enlaces desde el OIA diseñado Buscadores como Google, Firefox, Opera y Microsoft Edge entre otros
<b><u>Género: aplicar</u></b> <b>Elige una estrategia de solución</b>	Revisa o selecciona una estrategia relacionada con el tema del Cálculo Diferencial aplicado a un contexto particular o aplicación, con base en ejercicios resueltos.	Recursos de GeoGebra.org Recursos de Descartes JS.org Guía Enlaces desde el OIA diseñado Buscadores como Google, Firefox, Opera y Microsoft Edge entre otros
<b><u>Género: evaluar</u></b> <b>Comprobar conjetura</b>	Del planteamiento de una conjetura específica y examina la retroalimentación de resultados interactivos para refinar la conjetura.	Recursos de GeoGebra.org Recursos de Descartes JS.org
<b><u>Género: evaluar</u></b> <b>Evaluar una aplicación</b>	Evaluar un trabajo matemático a través de la retroalimentación de pares o asistida por computadora.	Guía Enlaces desde el OIA diseñado Como GeoGebra, Derive o Mathematica entre otros
<b><u>Género: crear</u></b> <b>Expone su trabajo</b>	Prepara y expone los resultados de su estudio acerca de un concepto matemático, estrategia o problema particular.	Redes sociales E-mail Aula física Foros de discusión

*Fuente:* creación propia fundamentada en la propuesta de Grandgenett, N., Harris, J., & Hofer

Como resultado de apropiación del concepto de las funciones circulares mediante el OIA diseñado, los estudiantes del curso crearon en GeoGebra versión 5.0 una interactividad que les permitió visualizar las

transformaciones de una función como son su alargamiento, sus desplazamientos horizontales y verticales y, las reflexiones de una gráfica de una función circular.

### ■ Reflexiones

Las estrategias cognitivas en el proceso de aprendizaje permiten relacionar la nueva información con la ya existente, organizan esa nueva información y, además, logran procesar la información nueva y la existente, son clasificadas por Rodríguez, Piñeiro & Regueiro (2017) en cuatro grupos: memorizar, selección, organización y elaboración. Para nuestra experiencia de aula se realizaron:

- Estrategias para memorizar conceptualización, a través de sopas de letras y crucigramas.
- Estrategias de selección de esa información, motivadas por la generación de la participación en clase.
- Estrategias para organización a través de la observación de demostraciones.
- Estrategias de elaboración como la creación de mapas conceptuales como técnica de estudio.

La metacognición es considerada como la teoría de la mente y se centra en el aprendiz mismo y en las operaciones que le permiten conocerse y regular sus procesos de aprendizaje, quizá la destreza más importante desde esta teoría es fortalecer el aprender a aprender. De las estrategias metacognitivas que se impulsaron en el aprendizaje de las funciones circulares podemos citar:

- Variables personales como la motivación y el cambio de actitud frente a las matemáticas generando curiosidad con videos motivadores.
- Variables que determinan los alcances de la tarea a realizar en el interior del aula y fuera de ella y proporcionadas por enlaces a conocimientos complementarios.
- Selección de estrategias de estudio promocionando la selección del trabajo cooperativo, el trabajo colaborativo y o el aprendizaje combinado como la ideal para su estilo de aprendizaje.

Consideramos que fue una experiencia enriquecedora resumida en la expresión de uno de los estudiantes: “Al fin pude entender como relacionar las relaciones trigonométricas del triángulo rectángulo con el círculo unitario y de donde salen los valores de seno y coseno que me da la calculadora”.

### ■ Referencias bibliográficas

- Bronfenbrenner, U. (1979). *La ecología del desarrollo humano*. Barcelona, España: Paidós.
- Cacheiro, M. (2011). Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje. *Pixel-Bit Revista de Medios y Educación* (39), 69-81.
- Corbin, J. (2016). *Psicología educativa y desarrollo: 12 estilos de aprendizaje ¿en qué se basa cada uno?* Recuperado de <https://psicologiamente.net/desarrollo/estilos-de-aprendizaje>
- Chiappe, A. (2009). *Objetos de Aprendizaje 2.0: una vía alternativa para la re-producción colaborativa de contenido educativo abierto*. Cali: Pontificia Universidad Javeriana.
- Echavarría, J. (2000). Educación y tecnologías telemáticas. *Revista Ibero Americana de Educación*, 24, 17-36. Recuperado de <http://rieoei.org/rie24f.htm>

- Grandgenett, N., Harris, J., & Hofer, M. (2011). *Mathematics learning activity types*. Recuperado de <http://activitytypes.wmwikis.net/file/view/MathLearningATs-Feb2011.pdf>.
- Gutiérrez M. L., Buitrago A. M. & Ariza, N. L. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, 15 (20)
- Koehler, M. (2012). *What is TPACK?*. Recuperado de <http://www.tpack.org>
- Rodríguez, S., Piñeiro, I., Regueiro, B., Estevez, I., & Val, C. (2017). Estrategias cognitivas, etapa educativa y rendimiento académico. *Revista de Psicología y Educación*, 12(1), 19-34.
- Ugalde, W. J. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 14(1).
- UNESCO. (2008). *Estándares en competencias TIC para docentes*. Recuperado de <http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf>