Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA MEDIADA POR EL SOFTWARE GEOGEBRA

Cintya Gonzales, Katia Vigo, Nancy Saravia, Elizabeth Advíncula
Pontificia Universidad Católica del Perú – Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas TecVEM – IREM. (Perú)
cintya.gonzales@pucp.pe, kvigo@pucp.pe, nsaraviam@pucp.pe, eadvincula@pucp.edu.pe

Resumen
Diversas investigaciones del concepto de derivada presentan dificultades para los estudiantes, lo cual confirmamos en nuestra práctica docente. El objetivo de este trabajo es realizar actividades que permitan la comprensión de la función derivada tomando en cuenta aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica que nos ayudan a analizar los significados de los estudiantes con respecto a dicho objeto matemático, con el apoyo del software GeoGebra. La metodología que usaremos es cualitativa. El uso del software facilitó la comprensión del concepto de la función derivada pues permitió observar cambios instantáneos de la variable dependiente respecto a la variable independiente.

Palabras clave: derivada, registros, tasa de variación, GeoGebra

Abstract
According to different investigations, students have difficulties to understand the concept of derivative, what we can confirm from our teaching practice. Therefore, we consider it is necessary to understand the processes through which students give it a meaning. The objective of this workshop is to carry out activities to understand the derivative function and some of its applications, taking into account aspects of the Theory of Registers of Semiotic Representation that help us analyze the meanings attributed to such mathematical object with the support of the GeoGebra software. We will use a qualitative methodology since we are interested in describing the phenomena of our researched reality.

Key words: derivative, registers of representation, variation rate, GeoGebra

Introducción

En nuestra práctica docente observamos que los estudiantes presentan dificultades para comprender el concepto de la derivada así como para usarla en la resolución de problemas en los que se requiere el uso de dicho concepto. Ante esta problemática surge la necesidad de conocer cómo los estudiantes le dan un significado a la derivada, cómo la interpretan y representan, y cómo la usan en la resolución de problemas. En nuestro acercamiento a esta problemática, coincidimos con Silva (2012), quien afirma que se puede construir la noción de tasa de variación instantánea a partir de un abordaje intuitivo de la tasa de variación media. Por otro lado, encontramos diversas investigaciones, como la realizada por Ruiz, Córdoba y

Rendón (2014) quienes han elaborado una propuesta didáctica para la comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra; y la de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) para quienes los modos de representación del concepto de derivada influyen en el establecimiento de relaciones lógicas entre los elementos matemáticos necesarios en la resolución de problemas.
Por ello, en este trabajo se proponen dos actividades iniciales que faciliten a los estudiantes la comprensión de la noción de derivada de manera intuitiva, a través de la tasa de variación media e instantánea, luego de la institucionalización de la derivada, proponemos otras dos actividades donde se emplea la derivada en la resolución de problemas, utilizando para ello diferentes registros de representación con énfasis en el registro gráfico. Para cada actividad propuesta se presenta un análisis didáctico.

Aspectos teóricos

Según Duval (2016), el papel de las representaciones semióticas no se reduce a designar objetos o a ser consideradas como objetos sino, cualesquiera que sean las representaciones semióticas utilizadas, estas se pueden cambiar por otras representaciones semióticas sin el apoyo de datos nuevos u observaciones empíricas. Pero eso depende del sistema semiótico dentro del cual se producen las representaciones semióticas.

Además, debemos tener en cuenta las diferencias entre los sistemas de representación semiótica usados para analizar los procesos de pensamiento complejos y específicos que están implicados en la actividad matemática. Como Duval (2016, p.72) expresa: "Lo que interesa para comprender los procesos de pensamiento involucrados en cualquier actividad matemática es enfocarse en el nivel de los sistemas de representación semiótica y no en la representación particular producida".

Para el investigador, existen cuatro tipos muy diferentes de sistemas semióticos, los que denomina registros de representación: Lengua materna, registro algebraico, registro gráfico y registro numérico. Un sistema semiótico es un registro solo si permite tres actividades cognitivas, fundamentales:

La formación de una representación semiótica es basada en la aplicación de reglas de conformidad y en la selección de algunas características del contenido involucrado.
El tratamiento de una representación es la transformación de representaciones que ocurren dentro del mismo registro. El tratamiento es, entonces, una transformación interna en un registro.

Duval (2016) resalta el hecho de que los tratamientos que se realizan dependen especialmente de las posibilidades de transformación semiótica que son específicos para el registro utilizado.

La conversión de una representación es una transformación de esta representación en una representación de otro registro.

Según Duval (2016), la conversión es más compleja que el tratamiento, "La conversión requiere implícitamente siempre que se deban usar juntos, de manera interactiva, dos registros o incluso tres" (Duval, 2016, p. 75). Asimismo, para el investigador disponer de varios registros de representación no es suficiente para garantizar la comprensión. Una segunda condición se hace necesario y es la coordinación de representaciones formuladas en diferentes registros.

Método

Nuestro trabajo se sitúa dentro de una metodología cualitativa, que trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones, según lo indica Martínez (2006). En particular la metodología cualitativa descriptiva, según Hernández, Fernández y Baptista (2010), busca especificar las propiedades y las características de cualquier fenómeno que se someta a análisis. En nuestro caso nos interesa describir de manera detallada cómo ocurre la comprensión del concepto de derivada.

Los procedimientos metodológicos seguidos fueron: búsqueda de la literatura, tratando de comprender mejor el tema y/o problema de investigación (comprensión del concepto de la derivada), planteamiento de hipótesis para la reflexión y discusión del tema investigado (diseño de actividades), levantamiento de información recolectada en una realidad observada (observación a participantes), utilización de diferentes instrumentos para colectar la información recogida en la realidad observada (actividades usando el software GeoGebra).

Análisis didáctico de las actividades

En este apartado presentaremos el análisis didáctico de cuatro actividades, para realizar este análisis hemos tomando aspectos de la teoría de registros de representación semiótica. La primera y la segunda actividad han sido adaptadas de Silva (2012), que consisten en una aproximación del paso de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea, y las otras dos actividades hacemos uso de la derivada.

Actividad 1

Se observa que inicialmente el volumen del agua en un tanque es de 100 litros. Este es abastecido por un caño cuyo flujo de agua es constante e igual a 10 litros por minuto y, simultáneamente, su contenido se vacía por un sumidero, cuyo flujo de agua es controlado a razón constante de 15 litros por minuto.

a) Exprese, por medio de una expresión matemática, el volumen de agua v después de t minutos.
b) Usando las herramientas del software GeoGebra, represente gráficamente la expresión $y = 100 - 5x$. Luego realice las siguientes acciones:
   i. En el gráfico marque un punto cualquiera en el eje x, renombra ese punto con la letra A, trace una recta perpendicular al eje x pasando por A y determine su intersección con la gráfica de la recta.
   ii. Renombre esa intersección con la letra B y trace una recta perpendicular al eje y pasando por B, a continuación, mueva el punto A y responda:
      - ¿Qué puede afirmar si las variables de la ecuación de la recta dada ahora representan las variables consideradas en el ítem a)? Indique los valores que puede asumir t en el contexto de esta actividad.
      - Cuando los valores de x aumentan una unidad, ¿cuántas unidades varían los valores correspondientes a y?
   iii. Seleccione la herramienta “pendiente”, haga click sobre la recta que representa gráficamente la función v. Calcule la razón entre las medidas del segmento vertical y el segmento horizontal. ¿Qué se puede observar entre esa razón y la variación del volumen de agua del tanque cuando los valores del tiempo aumentan una unidad?

Análisis Didáctico

La actividad tiene como propósito que los estudiantes perciban la tasa de variación de $v(t)$ en relación a t, cuando los valores de t aumentan una unidad en cualquier instante. Además, por medio de la representación gráfica de la función v, que el estudiante afirme que la tasa de variación corresponde a la pendiente de la recta.

En el ítem a) esperamos que los estudiantes determinen la relación de dependencia entre las magnitudes dadas, realizando una conversión de la representación de la función volumen del registro en lengua natural al algebraico.

En el ítem b) se espera en primer lugar, que el estudiante teniendo la representación gráfica de la ecuación $y = 100 - 5x$ conciba una correspondencia entre las variables x, y con t y v respectivamente, para luego determinar la restricción del modelo. En segundo lugar, por medio de tratamientos en dicho registro el estudiante perciba que al hacer variar los valores del tiempo una unidad, los valores del volumen disminuyen en cinco unidades, y que dicha variación es constante. Finalmente, se espera que el estudiante determine la tasa de variación de y en relación a x por medio del cociente entre las medidas de los catetos del triángulo obtenido por la herramienta "pendiente", y perciban intuitivamente que la tasa de variación de $v(t)$ en relación a t corresponde a la pendiente de la recta $y = 100 - 5x$.

Actividad 2

En un circuito de carreras de motos se realizó una prueba de velocidad a fin de verificar si se encuentra en condiciones óptimas. Se constató que su movimiento, en un intervalo de tiempo relativamente pequeño, obedece la función $s(t) = -\frac{1}{t}$, s en metros y t en segundos.

a) En GeoGebra, construya el gráfico de la ecuación $y = -\frac{1}{x}$, que representa la función que describe el movimiento de la moto, luego:
- Ubique en el gráfico de la ecuación las coordenadas de un punto fijo A que tiene abscisa igual a 1. Para fijar el punto haga click izquierdo sobre el punto, seleccione propiedades y luego marque objeto fijo. Determine la ordenada del punto A.
- Grafique un punto P cualquiera sobre el gráfico, luego trace la recta AP. Para esto, haga click en el ícono 
- Trace una recta, L_1, perpendicular al eje Y que pasa por el punto P. Luego, trace la recta L_2 perpendicular a L_1 por el punto A. Indique el punto de intersección de las rectas anteriores. Renombra a este punto con la letra B. En seguida, calcule la razón entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{PB}$. *Esta razón representa la variación media entre la medida de dichos segmentos*.
- Seleccione la herramienta "*pendiente*" y haga click sobre el gráfico de la recta AP. ¿Qué relación existe entre el valor hallado en iii) y la medida de esta pendiente?
- Deslice el punto P sobre la curva en dirección al punto A, ¿a medida que el valor de *x* se acerca cada vez más a *1* cómo varía la medida del segmento $\overline{PB}$?

b) Denota la medida del segmento $\overline{PB}$ por Δt, ¿qué significa Δt?

c) Considere el intervalo de tiempo [1; 1+Δt], determine la expresión matemática que representa la velocidad media de la moto en ese intervalo de tiempo. Si Δt se acerca a 0, ¿a qué valor se aproxima la velocidad media?
d) Escriba la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto $A(1,-1)$ y tiene como pendiente el valor de la velocidad media hallado en c).
e) En GeoGebra, grafique la recta *r*, encuentre su pendiente usando la herramienta respectiva. Compare su resultado con el hallado en d).

Análisis Didáctico

Esta actividad tiene como propósito que los estudiantes identifiquen la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $s(t) = -1/t$ en el punto A(1,-1) como la tasa de variación instantánea de $s(t)$ en el instante *t=1*.

Esperamos que en el ítem (a) los estudiantes relacionen la pendiente de la recta secante con la medida de la variación media. Para esto, mediante tratamientos en el registro gráfico los estudiantes conjeturan propiedades que los lleva a afirmar la relación deseada.

El estudiante en el ítem (b) podría percibir que Δt es la longitud de un intervalo de tiempo cuando *x* se acerca a *1*. En el ítem (c) esperamos que el estudiante utilice la representación de la función en el registro gráfico para encontrar la variación media en el intervalo dado. Además, suponemos que el estudiante determina el valor aproximado de la velocidad en *t=1*. Además, esperamos en el ítem (d) que el estudiante en el registro algebraico determine la representación de la recta r y en el ítem (e) podría relacionar el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en *t=1* con la velocidad instantánea en ese punto.

Actividad 3

Considere la función $f(x) = \sqrt{x}$.
a) Usando la vista gráfica del software GeoGebra grafique f.
b) Ubique el punto $A(1,1)$ sobre la gráfica de f y grafique la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$.
c) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente representada por L_1 que aparece en vista algebraica?
d) Grafique un punto P cualquiera sobre el gráfico de f. Trace una recta L_2 perpendicular al eje x que pase por el punto P y localice Q punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2.
e) Deslice el punto P sobre la gráfica de la función f e indique qué sucede con la longitud del segmento $\overline{PQ}$ cuando se aproxima al punto A.
f) Use la herramienta propiedades para mostrar las coordenadas del punto Q, luego ubique el punto cuando la abscisa del punto es 1.17. ¿Cuál es la ordenada en ese valor?
g) ¿Qué significa la ordenada hallada en el ítem anterior?

Análisis didáctico

En esta actividad se pretende que el alumno observe que alrededor del punto de tangencia, las representaciones gráficas de la recta tangente y de la función se encuentran próximas para puntos cercanos a dicho punto. Usando esta idea, podemos obtener algunos valores aproximados de la función utilizando la recta tangente.

En los ítems a) y b) se pretende usando la vista gráfica que el alumno grafique la función raíz cuadrada y su recta tangente en el punto $A(1,1)$.

El ítem c) tiene por finalidad que el alumno conozca la regla de correspondencia de la función recta tangente usando la vista algebraica.

En el ítem d) pretendemos localizar un punto cualquiera sobre la curva, trazar la recta L_2 que pase por dicho punto y sea perpendicular al eje x para luego determinar el punto de intersección entre la recta L_2 y la recta tangente obtenida en b). El ítem e) tiene por finalidad que el alumno al desplazar el segmento $\overline{PQ}$ note que la longitud de este segmento se aproxima a cero cuanto más cerca está del punto A. En el ítem f) se espera que el estudiante haga zoom para localizar el punto Q, y concluya que la ordenada de Q cuando su abscisa es 1.17 es 1.09. En el ítem g) se espera que el alumno interprete el valor de la ordenada hallado en el ítem f) y que concluya que dicho valor es una aproximación de $\sqrt{1.17}$ ya que al haber usado zoom se debe haber dado cuenta que siempre hay una distancia entre la recta y la curva por más mínima que sea.

Actividad 4

Abra el archivo Actividad 4.ggb. En la vista gráfica 3D se muestra un cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto de 6 cm de altura y 3 cm de radio de su base. Además, en la vista gráfica se muestra un deslizador h que permite modificar la altura del cilindro inscrito.
Manipule el deslizador h en la vista gráfica y responda lo siguiente:
a) ¿Qué valores puede tomar la altura h del cilindro inscrito? Explique.
b) ¿Qué valores puede tomar el volumen V del cilindro inscrito? Explique.
Observe la vista gráfica 2 donde se muestra un plano cartesiano con eje horizontal h y eje vertical V, y un punto P de coordenadas (h, V). Active el rastro del punto P, manipule el deslizador h y responda lo siguiente:
c) Describa la trayectoria que recorre el punto P.
d) Observando las distintas posiciones que toma el punto P, ¿es posible determinar el máximo valor que puede tomar V? Si es posible, diga para qué valor de h ocurre esto. Explique.
e) En la vista gráfica 2, trace la gráfica de la función f definida por $f(x) = \pi\left(\frac{6-x}{2}\right)^2 x$ y describa la relación que existe entre esta gráfica y la trayectoria que describe el punto P.
f) Determine la función volumen V en términos de la altura h. Luego, haga el cambio de variable $h = x$ y trace la gráfica de la función V en la vista gráfica 2. Responda lo siguiente:
   f1) ¿Es posible trazar una recta tangente a la gráfica de V que sea horizontal? Si es posible, trace dicha recta y denote el punto en qué ocurre con la letra T.
   f2) Explique la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente trazada en el ítem anterior y la derivada de la función V en la abscisa del punto T. ¿Qué ocurre en dicho punto?
   f3) Indique cuál es el máximo valor que puede tomar V y para qué valor de x ocurre este máximo. Justifique.

Análisis didáctico

Esta actividad tiene como propósito que los estudiantes utilicen el concepto de derivada para determinar el volumen máximo de un cilindro circular recto inscrito en un cono de dimensiones constantes. En el ítem (a) esperamos que determinen los posibles valores que puede tomar la altura h. En el ítem (b) esperamos que los estudiantes determinen los posibles valores que puede tomar el volumen V. En el ítem (c) esperamos que apoyados de la opción rastro del GeoGebra identifiquen la trayectoria que describe el punto P, cuyas coordenadas relacionan la altura h y el volumen V del cilindro inscrito. En el ítem (d) esperamos que de manera exploratoria descubran el volumen máximo del cilindro inscrito y para qué valor de h ocurre esto. En el ítem (e) esperamos que tracen una función dada y reconozcan que dicha gráfica contiene a los puntos descritos por el punto P. En el ítem (f) esperamos que determinen la función volumen V en términos de la altura h tomando en cuenta las restricciones del problema dado. Luego, esperamos que hagan el cambio de variable indicado para que puedan graficar en GeoGebra la función volumen V en términos de x. En el ítem (f1) esperamos que tracen una recta tangente horizontal a la gráfica de V y reconozcan de manera gráfica que en este punto de tangencia ocurre el máximo volumen. En el ítem (f2) esperamos que expliquen la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente horizontal y la derivada de la función V en la abscisa del punto de tangencia. Asimismo, esperamos que reconozcan que en el punto de tangencia de la recta horizontal se da el volumen máximo del cilindro inscrito. En el ítem (f3) esperamos que indiquen el volumen máximo que puede tomar el cilindro inscrito y el valor de la altura donde ocurre dicho volumen. En conclusión, esperamos que los estudiantes comprendan y usen el concepto de la primera derivada para optimizar, en nuestro caso, para hallar el volumen máximo de un cilindro inscrito circular recto en un cono circular recto de dimensiones constantes.

Consideraciones finales

Durante el desarrollo del taller observamos que los participantes se familiarizaron con el concepto de derivada a partir de representaciones gráficas, relacionándola con la interpretación de la pendiente de la recta tangente y con la razón de cambio instantánea; además, usaron el concepto de la derivada en aplicaciones relacionadas con la aproximación lineal y con la optimización, realizando en primer lugar manipulaciones en el registro gráfico y luego en el registro algebraico.

Por otro lado, el uso del GeoGebra facilitó la visualización de los objetos matemáticos involucrados con la interpretación del concepto de la derivada debido a su dinamismo y flexibilidad para realizar cambios de manera inmediata y para verificar conjeturas.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval y Sáenz-Ludlow (Eds.) *Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas*, Capítulo 2, p. 61-94. Colombia.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación* (5ª Ed.). México: McGraw Hill Educación.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI*, 9, 123-146.

Ruiz, K; Córdoba, Y. y Rendón, C. (2014). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *1(1),* 125-130.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.

Silva, E. (2012). *Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no Ensino Médio*. Tesis de maestría no publicada, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.