

ESTUDIO TEÓRICO SOBRE LA VARIACIÓN EN CONTEXTOS DETERMINISTAS, CAÓTICOS DETERMINISTAS Y ESTOCÁSTICOS

Enrique Hernández-Zavaleta, Angélica Moreno-Durazo, Cristian Paredes-Cancino, Rodolfo Fallas-Soto

Cinvestav. (México)

jesus.hernandezinvestav.mx, gamoreno@cinvestav.mx, cristian.paredes@cinvestav.mx, rfallasinvestav.mx

Resumen

En este escrito se presentan estudios que tienen como objetivo caracterizar el estatus de la variación en sistemas con dinámicas deterministas, erráticas o caóticas y estocásticas, enmarcadas en la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional de la socioepistemología. Los aspectos teóricos que se ponen a discusión son la transversalidad de los *niveles de constantificación* y *el carácter estable del cambio* como elementos que conjugan la triada *variable, variación, predicción* en la construcción de argumentos que permitan realizar o aumentar la certidumbre en la predicción.

Palabras clave: variación, sucesiva, prácticas predictivas, socioepistemología

Abstract

This paper shows studies aimed to characterize the status of variation in systems with deterministic, erratic or chaotic, and stochastic dynamics within the research line of the Variational Language and Thinking of the socioepistemology approach. We discuss the transversal process of the *levels of invariability* and *the stable nature of change* as elements that make up the triad: *variable, variation and prediction* in the construction of arguments that allow developing or increasing the prediction certainty.

Key words: successive, variation, predictive practices, socio-epistemology

■ Introducción

Diversas investigaciones interesadas en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo han reportado dificultades en la significación sobre los objetos de las matemáticas del cambio, relacionandolas con la ausencia de argumentos e ideas variacionales en el tratamiento escolar (Nemirovsky y Rubin, 1992; Cantoral y Farfán, 1998; Carlson et al, 2002; Dolores, 2004). Incluso actualmente se realizan

investigaciones que abordan estas dificultades desde enfoques teóricos específicos o considerando fenómenos típicamente no escolares (Jonhson, 2015; Lingefjärd y Farahani, 2017).

Frente a esta problemática, la postura desde la socioepistemología fue que la mejora educativa requiere de acciones más allá de enlistar las deficiencias de los estudiantes o los profesores sobre el manejo de cierta noción, sino que, se interesó por explicar la naturaleza de nociones matemáticas en difentes escenarios, fijándose en cuáles son las prácticas y argumentos detrás de su uso y cómo los individuos se apropian de estas nociones; para de esta manera tener elementos para un rediseño del discurso matemático escolar.

El Pensamiento y Lenguaje Variacionla (PyLV) se consolida como una línea de investigación, cobijada bajo la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, que se interesa por el estudio y la tipificación de los *usos de la variación sucesiva en escenarios con naturaleza predictiva* diversa (Cantoral, 2013). La noción de variación sucesiva surge en las primeras investigaciones del grupo, cuando Cantoral (1990) la reconoce en la expresión $f(x + h) - f(x)$ más allá que la sola diferencia de estados, asumiéndola como una relación simbiótica entre una noción con valor de uso predictivo y su operatividad mediante la articulación de órdenes de variación $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ (Ver Figura 1); a tal articulación la denominamos variación sucesiva. Donde la consideración de un orden de variación superior otorga información cada vez más específica del comportamiento del fenómeno.

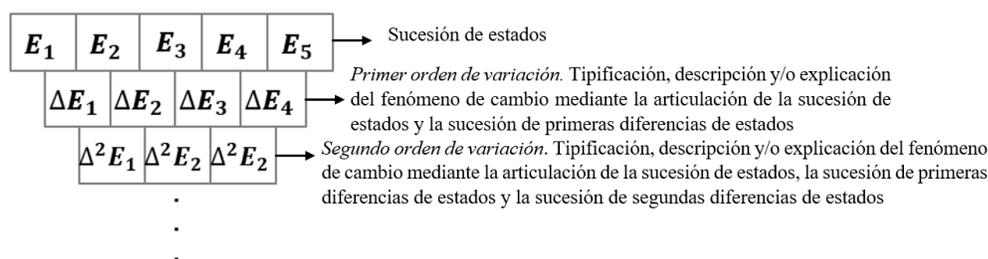


Figura 1. Órdenes de variación

Entonces, entendemos que la noción de variación se construye y reconstruye al seno de comunidades en la necesidad de cuantificar cambios durante el desarrollo de prácticas predictivas. En este sentido, nos interesa analizar en escenarios diversificados, desde el determinismo hasta el comportamiento errático en el caos determinista, pasando por lo estocástico, en los que la variación se significa para dar lugar a elementos propios en el desarrollo de prácticas predictivas.

Las investigaciones en PyLV mayormente se ha desarrollado en escenarios deterministas, en este reporte retomamos los resultados de la problematización del teorema de existencia y unicidad (Fallas y Cantoral, 2016), presentamos las investigaciones en contexto no determinista a través de los resultados de la problematización del uso de la variación en la práctica médica (Moreno–Durazo y Cantoral, 2017) y en el estudio de dinámicas erráticas (Hernández y Cantoral, 2017); además, la investigación en desarrollo de Cristian Paredes sobre lo estocástico, la problematización del Teorema de Bayes.

En este reporte mostramos el análisis que han realizado los autores sobre los elementos que conforman el siguiente esquema de la intervención de las nociones de variable, variación con fines predictivos.

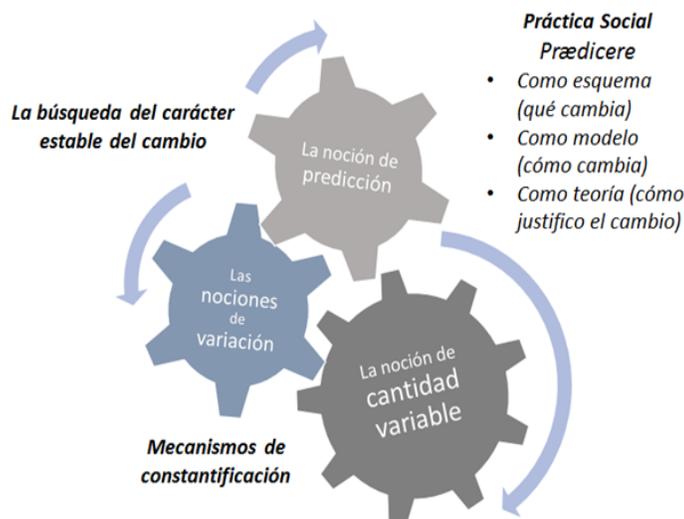


Figura 2. Intervención de las nociones elementales en el estudio de fenómenos dinámicos

La unidad mínima de análisis para el estudio de fenómenos dinámicos con fines predictivos requiere de la vinculación de las nociones de variable y variación (Figura 2). Cantoral (1990) exhibe cómo la vinculación – variable, variación y predicción – se desarrolla mediante los *niveles de constantificación*, el primero radica en la selección de las variables intervinientes en el fenómeno que lo describan de buena manera y el segundo refiere a la selección de las variaciones suficientes para llevar a cabo predicciones; entonces, es el proceso de *constantificar* lo que articula las nociones de variable y variación. Este proceso sustenta la *identificación del carácter estable del cambio*, ligado a la búsqueda de las leyes que rigen el cambio identificando lo invariante en él, lo cual conduce al establecimiento de predicciones en el fenómeno (Cantoral, 2013). Aunado a esto, se encuentra un sistema de análisis de prácticas normado por la evolución de la práctica social del *Prædicere*, que en su fase de esquema responde a la pregunta *¿qué cambia?*; en su fase de modelo se responde a *¿cómo cambia?*, y, finalmente, como teoría se refiere a la *justificación formal del cambio*.

Escenarios para el estudio de la noción de variación

La variación acotada en el Teorema de Existencia y Unicidad de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En éste estudio se obtuvo evidencia sobre las prácticas variacionales que se ponen en juego para justificar, por un lado, la existencia y por otro, quizá más complejo, la unicidad respecto al Teorema de Existencia y Unicidad (TEU) de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Fallas y Cantoral, 2016).

El hallazgo más importante del trabajo es que la *variación acotada* lo que permite garantizar la existencia y unicidad de la solución, lo cual se obtuvo con base en una problematización sobre las obras originales de matemáticas de Cauchy & Moigno (1844), Lipschitz (1868, 1880) y Peano (1973), lo cual determinó que estos trabajos ayudan a comprender la génesis y evolución del teorema, desde la práctica de referencia del matemático que deseaba plasmar sus descubrimientos y conocimientos en las obras con fin didáctico o divulgativo que realizaban. Dicho de otra forma, fue la búsqueda de una formalización de la demostración del teorema y la determinación de la mínima cantidad de hipótesis que garantice la existencia y la unicidad los dos hechos que dieron pie a la génesis y explicación de este problema.

Se encontró que el método de las quebradas de Euler, si bien en ocasiones ausente en los textos de Ecuaciones Diferenciales, sobrevivió en los textos de métodos numéricos, este método formó parte del argumento para la explicación e interpretación de la solución en general del TEU, puesto que se basa en analizar la *variación infinitamente pequeña* de la condición inicial y la comparación local y global (en el estudio de la unicidad).

Adicionalmente, dimos respuesta a las preguntas iniciales referidas al problema inverso de la tangente y de los diversos ejemplos que están presentes en el discurso Matemático Escolar (dME), pero esta vez con apoyo de una multiplicidad de recursos: lo variacional, lo numérico, lo analítico y lo visual, haciendo del teorema un modelo predictivo. Hemos determinado que las estrategias variacionales de *comparación*, *seriación*, *estimación* y *predicción* estuvieron presentes al analizar la postulación y demostración de la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales.

Lo estocástico desde el PyLV

A partir de las investigaciones en PyLV se proponen directrices de análisis para el estudio de la variación, mediante los cuestionamientos: ¿qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? En relación con lo estocástico se observan tres aspectos, el primero relacionado con la identificación de las variables aleatorias que están en juego en la situación, el segundo es la manera en que reconocemos la forma de variación de las variables, esto puede darse mediante las distribuciones de probabilidad como se muestra en la figura 3. El desarrollo del concepto de *variación* va más allá del simple reconocimiento de su existencia y requiere de cierto tipo de comprensión del concepto de distribución, ya que la distribución se convierte en una representación de la variación de los datos (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2009).

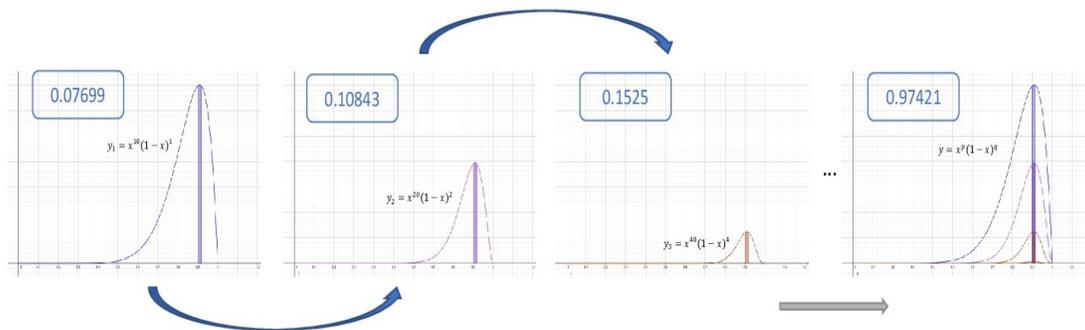


Figura 3. Distribuciones de probabilidad

El tercer aspecto considerando que las distribuciones de probabilidad nos permiten determinar *qué y cómo están cambiando las variables*, la *cuantificación de la incertidumbre* está asociado a la determinación de la probabilidad, que nos permitirá evaluar nuestra conjetura y realizar afirmaciones con cierto grado de confiabilidad sobre nuestra situación, es decir, poner en juego *la inferencia como práctica predictiva en lo estocástico* (figura 4).

		Probabilidades		
		Menos que 9 a 1	Entre 9 a 1 y 11 a 1	Mayor que 11 a 1
Relación: Blancos y Premios	10 blancos y 1 premio	0.6589	0.07699	0.2641
	20 blancos y 2 premios	0.584	0.10843	0.30757
	40 blancos y 4 premios	0.527	0.1525	0.3205
	100 blancos y 10 premios	0.44109	0.2506	0.3082
	1000 blancos y 100 premios		0.7953 – 0.9405	
	10000 blancos y 1000 premios		0.97421	

Figura 4. Inferencia como práctica predictiva

La variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardíacas

Nos preguntamos ¿cómo el médico identifica el padecimiento que sufre su paciente?, ¿cómo bosqueja el plan de tratamiento que permita el acercamiento al estado de salud?, en otras palabras, ¿cómo el médico trata con el cambio y la variación con fines predictivos? A la luz de esto es que se identificó del uso de las prácticas de comparación, seriación y estimación en la interpretación de electrocardiogramas, a través el estudio sistemático de la morfología de las ondas, los segmentos y los intervalos. También apreciamos que, es en el lenguaje empleado en la caracterización de las enfermedades cardíacas que observamos claramente el uso de la *variación con fines predictivos*, por ejemplo, la interpretación del electrocardiograma de la figura 5.

Las características electrocardiográficas del bloqueo aurículo-ventricular (AV) Mobitz I recurren a expresiones como *prolongación progresiva del intervalo PR*, lo que refiere a un comportamiento creciente en el tiempo que tarda en realizarse (intervalo PR) para cada ciclo cardíaco; además, especifica en el apartado b) que *este crecimiento del intervalo sufre una disminución progresiva*, es decir, el intervalo PR durante este tipo de bloqueo AV tiene un crecimiento cada vez menor (Moreno-Durazo y Cantoral, 2017)



Figura 5. Electrocardiograma de un paciente con bloqueo AV Mobitz I

Vemos en el diagnóstico de enfermedades cardíacas el dinamismo de la triada *variable, variación y predicción* (Figura 2) a través de discursos y prácticas socialmente compartidas. El uso de un orden de variación superior (orden dos), cambio del cambio, para la identificación de la regularidad (*el crecimiento del intervalo PR sufre una disminución progresiva y la ausencia de la onda P*).

La variación en la ecuación logística

En los sistemas dinámicos que exhiben comportamientos caóticos conviven lo determinista y lo aleatorio como partes antagónicas que entretengan formas de razonamiento, sobre el cambio, explicativas y predictivas ante la presencia de umbrales de transición que llevan a disposiciones inesperadas. *La búsqueda del carácter estable del cambio* se articula con los *niveles de constantificación* para dar lugar a prácticas de comparación y estimación de los estados globales del mismo sistema al cambiar su naturaleza. Este cambio permite dar cuenta de estados erráticos que requieren de encontrar puntos de transición y, posteriormente, del análisis de las diferencias entre las dinámicas que se generan.

Uno de los casos más estudiados, en el ocurren el tipo de transiciones mencionadas, es el de la ecuación de crecimiento poblacional logístico en diferencias dada por $X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$, su iteración (la composición reiterada de ella misma) exhibe trayectorias periódicas (totalmente predecibles) para algunos valores del parámetro a que hace cambiar su dinámica, cuando $a=4$ la cantidad de periodos que conviven hace imposible su predicción, a esto se añade la sensibilidad a las condiciones iniciales presente en este régimen. El diagrama de bifurcaciones (Figura 6), propuesto por May (1976) muestra el número de periodos dependientes del valor de a , esta es una producción derivada de *la búsqueda del carácter estable del cambio* que da una explicación a las configuraciones, en algún momento, no esperadas en el sistema.

En esta situación existe el cambio de la variable población y el parámetro a (¿qué cambia?), el cambio en la población es periódico o estable y conforme el parámetro va creciendo existe un incremento de periodos que en algún momento imposibilita la predicción (¿cómo cambia?), el incremento de formas de repetición se hace en orden creciente en potencias de base dos (¿cómo se repite?). Finalmente, *el cambio de la naturaleza del problema* mediante los parámetros; en otras palabras, al saber cómo se repite cada ciclo entonces podemos tener un panorama general y poder distinguir las franjas de valores que permiten la predicción de las que no (¿cuánto se repite cada ciclo?). La identificación de estos estados produce la emergencia de formas de razonar que se alejan del determinismo y se acercan a lo estocástico; por ejemplo, el uso de histogramas que proveen medidas invariantes para grandes cantidades de datos.

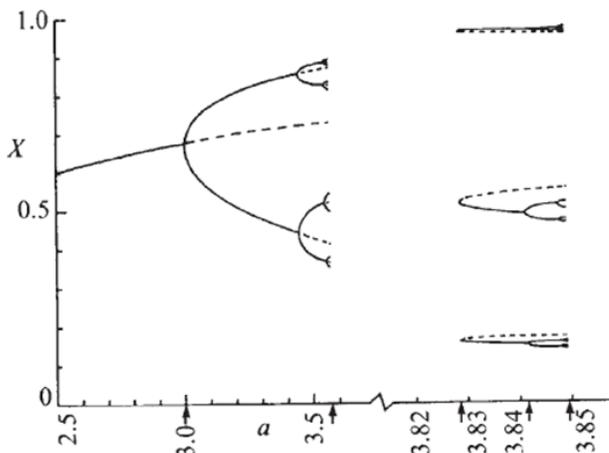


Fig. 4 This figure illustrates some of the stable (—) and unstable (---) fixed points of various periods that can arise by bifurcation processes in equation (1) in general, and equation (3) in particular. To the left, the basic stable fixed point becomes unstable and gives rise by a succession of pitchfork bifurcations to stable harmonics of period 2^n ; none of these cycles is stable beyond $a = 3.5700$. To the right, the two period 3 cycles appear by tangent bifurcation: one is initially unstable; the other is initially stable, but becomes unstable and gives way to stable harmonics of period 3×2^n , which have a point of accumulation at $a = 3.8495$. Note the change in scale on the a axis, needed to put both examples on the same figure. There are infinitely many other such windows, based on cycles of higher periods.

Figura 6. Diagrama de bifurcaciones propuesto por May (1976) para ilustrar el número de periodos que generan los puntos de equilibrio. En el valor 3.83 se muestra el triciclo que da lugar a ciclos de todos los periodos.

■ Reflexiones finales

Como se ha mostrado la variación juega un papel fundamental en el estudio del cambio, los ejemplos tratados muestran su papel transversal; por un lado, en investigaciones que tratan tópicos matemáticos que hoy juegan un papel fundamental en la escuela y por otro en situaciones extraescolares, que debido a este eje conductor (la variación), son ejemplos que dan indicios de formas de razonamiento necesarias para todo individuo y que ahora no son parte del ámbito escolar. Así el grupo se propone a realizar una problematización robusta de la variación y su transversalidad en escenarios intra y extraescolares.

Los aspectos teóricos que se ponen a discusión son la transversalidad de los *niveles de constantificación* y *el carácter estable del cambio*, como elementos que conjugan la triada *variable, variación y predicción*. Hasta el momento su expresión se verifica en *prácticas predictivas*, y los elementos que se evidencian están relacionados con la noción de variable y su elección, con lo que varía y cómo lo hace para elaborar argumentos que permitan predecir o aumentar la certidumbre; de esta forma se deben mostrar más ejemplos que muestren la articulación de estos elementos para aproximarse a una forma de razonamiento propia del cambio y la variación.

Finalmente, hemos presentado un primer acercamiento sobre el objetivo que el grupo de PyLV persigue sobre un robustecimiento en la caracterización sobre la variación como una noción fundamental que permite conducirse ante prácticas predictivas diversas, bajo la postura de ampliar el tipo de escenarios en los que se estudia el PyLV.

■ Referencias bibliográficas

- Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría Elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y predación entre las nociones de “el Prædicere” y “lo Analítico”*. Tesis Doctoral. México: Cinvestav
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* 42, 353 – 369
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352 – 378
- Cauchy, A., & Moigno. (1844). *Lecons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral*. Paris: Librairie de École Polytechnique.
- Dolores, C. (2004). Acerca el análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 7(3), 195-218
- Fallas, R. y Cantoral, R. (2016). Estudio socioepistemológico del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Revista de História da Educação Matemática* 2(3), 256-280.
- Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2009). La idea de variación en la educación estadística. En C. Rojas (Comp.). *Memorias VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística* (pp. 1-10). Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

- Hernández, J. y Cantoral, R. (2017). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1009 – 1017. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
- Johnson, H. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics* 88, 89 – 110.
- Lipschitz, R. (1868). Disamina della possibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 2(2), 288–302.
- Lipschitz, R. (1880). *Lehrbuch der Analysis*. Bonn, Deutschland: Verlag Von Max Cohen & Sohn.
- Lingefjård, T. & Farahani, D. (2017). The elusive slope. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI 10.1007/s10763-017-9811-9.
- May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. *Nature*, 459-467.
- Moreno–Durazo, A. & Cantoral, R. (2017). El uso de los órdenes superior de variación en la interpretación clínica del electrocardiograma. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 927 – 935. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
- Nemirovsky, R. y Rubin, A. (1992). Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative. *TERC communications*, Cambridge.
- Peano, G. (1973). Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* 21 (1885-1886): 677-685. *Hamburger Which Was Reprinted in Peano 1957-1959.*, 1, 74–81.