

# LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA COMO HERRAMIENTA DE ENSEÑANZA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR: MODELOS LINEALES EN ECUACIONES DIFERENCIALES

Luis Jaimes, Efrén Baquero, Margarita Rey

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. (Colombia)

luis.jaimes@escuelaing.edu.co, efren.baquero@escuelaing.edu.co,

margarita.rey@escuelaing.edu.co

## Resumen

Este trabajo presenta la forma como la herramienta “descomposición genética”, definida desde la teoría APOS, favorece la comprensión de objetos matemáticos utilizados en cursos de matemáticas universitarias. Lo anterior como parte de un proyecto de investigación, desarrollado en la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, con el objetivo de identificar las formas de comprender la ecuación diferencial lineal de segundo orden que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado; dentro de los resultados se presentan algunas dificultades para comprender el objeto de estudio y la necesidad de diseñar instrumentos de recolección de información que complementan las observaciones de los docentes en clase.

**Palabras Clave:** sistemas masa – resorte, teoría APOS, descomposición genética

## Abstract

This paper presents the way in which the tool "genetic decomposition", defined from the APOS theory, favors the understanding of mathematical objects used in university mathematics courses. The previous as part of a research project, developed in the Colombian School of Engineering Julio Garavito, with the objective of identifying the ways to understand the linear differential equation of second order that models a spring mass system with free motion damped; Within the results there are some difficulties to understand the object of study and the need to design information collection instruments that complement the observations of teachers in class.

**Key words:** mass-spring system, APOS theory, genetic decomposition

## ■ Planteamiento del problema

La investigación en educación matemática, continuamente aporta al fortalecimiento de las prácticas educativas, para que estas, no se limiten a métodos de enseñanza tradicional, basados en la memorización de algoritmos o fórmulas que en algunos casos pueden carecer de significado para el estudiante. Trabajos relacionados con la enseñanza del cálculo, y particularmente de las ecuaciones diferenciales (ED), indican que en estos cursos predomina el enfoque algebraico (Morales y Salas, 2010), y que objetos o conceptos matemáticos se ocultan mediante fórmulas o algoritmos que impiden su comprensión (Nápoles, González, Brundo, Genes, y Basabilbaso, 2004), lo que puede representar que la asignatura reste importancia para un estudiante en relación a su programa de formación, dado que no es perceptible su interacción con otros

ejes de formación. Así mismo, cabe destacar que aunque los aportes de la investigación en educación matemática tengan como objetivo mejorar la forma de comprender los objetos matemáticos, el probar un nuevo modelo de enseñanza, que privilegie su comprensión, sobreponiéndolos a procesos algebraicos o logarítmicos, implica encontrar nuevas dificultades, por ejemplo, en el caso de las ecuaciones diferenciales, dichas dificultades están asociadas con el planteamiento de la ecuación diferencial en determinado modelo matemático, antes que con el proceso algebraico para resolverla (Jaimes, Chaves y Hernández, 2015).

Los elementos anteriores han sido considerados, para realizar una propuesta de enseñanza, basada en una teoría de enfoque cognitivo, que busca describir las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que un estudiante desarrolla para comprender un objeto matemático. El objeto de estudio, son los sistemas masa resorte, particularmente, la ecuación diferencial que modela estos sistemas cuando se considera la fuerza de amortiguamiento que afecta el movimiento. La elección del objeto de estudio, radica en su aplicación en diferentes campos de la ingeniería, por ejemplo, publicaciones relacionadas con aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, evidencian que en la ingeniería biomédica, los sistemas masa – resorte pueden ser utilizados en el estudio de la otosclerosis (Fragoso, Magalhães, Las Casas, Santos, Rabelo Y Oliveira, 2014), y en la ingeniería mecánica, para modelar el sistema de suspensión de un vehículo.

#### ■ Antecedentes

Al realizar una exploración bibliográfica tanto en artículos y publicaciones, se han encontrado investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, resaltando que todas estas, independiente del enfoque teórico que utilizan, tienen el propósito de fortalecer su comprensión, que ha estado limitada a registros algebraicos y algorítmicos (Guerra, 2003; Dullius, 2009; Napóles, 2009; Chaves y Jaimes, 2014). Así mismo, se hizo una revisión en libros de ecuaciones Diferenciales que generalmente se utilizan como texto guía, para identificar la forma como es construida y presentada la ecuación diferencial que modela un sistema masa – resorte con movimiento libre amortiguado. De esta revisión se resaltan los textos de Zill y Kullen (2008) y, Edwards y Penney (2009) quienes utilizan constructos diferentes para presentar la ecuación diferencial. Por ejemplo, mientras que en el libro de Zill y Kullen (2008), cada una de las fuerzas implicadas en el movimiento de un sistema masa resorte amortiguado, son justificadas desde leyes físicas (Ej. Ley de Hooke, segunda ley de Newton, etc.) que hacen parte de currículos previamente vistos, en el libro de Edwards y Penney (2009), se trata de presentar al lector mediante un razonamiento “lógico” cada uno de los componentes de la ecuación diferencial. Sin embargo, se encontró que ninguno de los autores explica el por qué la fuerza amortiguadora que se considera en este tipo de movimiento, es proporcional a la velocidad y actúa en dirección opuesta; fenómeno físico explicado por la ley de Stokes.

#### ■ Marco teórico

Esta investigación se desarrolla desde la perspectiva de una teoría cognitiva llamado APOS, cuya sigla corresponde a la forma como se escriben en inglés las palabras Acción–Proceso–Objeto–Esquema, fue desarrollada por Ed. Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores del Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC). Se basa en la Abstracción Reflexiva; idea introducida por

Piaget, y se extiende a nociones matemáticas avanzadas, que describe las construcciones mentales y mecanismos de construcción que un estudiante desarrolla para comprender un concepto u objeto matemático, y se sintetiza en lo que desde la teoría se conoce como *descomposición genética*.

Las construcciones mentales corresponden a diferentes niveles de comprensión de objetos matemáticos. En la teoría APOS las construcciones mentales que se consideran son: acciones, procesos, objetos y esquemas. Una *acción* es cualquier actividad mental o física que transforma de alguna manera un objeto matemático, son algorítmicas por naturaleza y permiten realizar un primer contacto con los objetos matemáticos; esto se logra a través de las experiencias del estudiante al tratar con el objeto. Un nivel de comprensión *proceso* se presenta si una acción es interiorizada por su repetición y el reflejo de la misma. Si un estudiante puede reflexionar de manera más general sobre un proceso particular, y lo concibe como una totalidad y si puede efectuar transformaciones sobre el mismo, se dice que ha encapsulado el proceso y alcanzado un nivel de comprensión de *objeto* (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros y Weller, 2014).

En relación a lo anterior, la descomposición genética de un objeto matemático parte de un análisis que identifica las construcciones mentales previamente mencionadas, que un estudiante puede requerir en su aprendizaje. En este análisis los investigadores plantean desde su experiencia como docentes del curso de ecuaciones diferenciales una descomposición genética preliminar del objeto de estudio. Luego, producto de la misma investigación se refina de modo que se presente de mejor forma lo que hacen los estudiantes cuando trabajan con él.

## ■ Metodología

La investigación se desarrolló con 26 estudiantes de la Escuela Colombiana de Ingeniería inscritos en un curso de ecuaciones diferenciales; cabe resaltar que a estos cursos, asisten estudiantes de diferentes programas de ingeniería (Civil, eléctrica, industrial, electrónica, mecánica, biomédica y ambiental). Se siguió el marco metodológico propuesto por la teoría APOS, bajo los tres componentes planteados en el ciclo de investigación:

Inicialmente se realiza un *Análisis teórico*, que implica la elaboración de una descomposición genética preliminar, la cual describe las construcciones mentales que deben realizar los estudiantes para comprender la ecuación diferencial lineal de segundo orden (EDLO2) que modela sistema de masa resorte con movimiento libre amortiguado. Posteriormente se elabora un *Diseño e implementación de enseñanza*, en este segundo componente se escogen ciertas actividades basadas en la descomposición genética preliminar, estas actividades pueden ser: entrevistas, observaciones en clase, revisión de los libros de texto, estudios epistemológicos e históricos, exámenes, entre otros (Arnon, et al, 2014). Finalmente el tercer componente que es *la recolección y análisis de datos* que tienen como base las actividades elaboradas en el componente anterior. Seguido de este análisis de datos, se realiza un nuevo análisis teórico, repitiendo; de ser necesario, el ciclo anterior para refinar la descomposición genética preliminar, indicando las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que un estudiante realiza para comprender el objeto en cuestión.

### ■ Algunos Ejemplos

Dentro, del trabajo realizado con los estudiantes, se encontraron elementos que evidencian dificultad para comprender la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte, tanto en el planteamiento, como en el significado de la misma.

Dentro de las actividades mencionadas en el segundo componente del ciclo de investigación, se diseñó y aplicó un taller que permitiera observar:

- La forma como los estudiantes identifican la información dada en el enunciado de un problema y la aprovechan para plantear su solución
- El reconocimiento de las características propias de la ecuación diferencial que modela un sistema masa – resorte amortiguado, y de las soluciones de su ecuación característica.
- El paso del registro algebraico a lenguaje natural, dada una ecuación diferencial y condiciones iniciales, que se ajustan a un sistema masa – resorte amortiguado.
- Los alcances de la ecuación característica y sus soluciones para determinar el tipo de movimiento.

En relación al inciso a) se dio el enunciado de un problema masa – resorte, y se plantearon preguntas relacionadas con la información extraída del problema, al plantear la ecuación. Se encontró que algunos estudiantes confunden la información dada para determinar la constante de resistencia con una condición inicial del problema, incluso confunden el nombre de ley física que están utilizando; ley de Hooke con ley de Stokes (Figuras 1 y 2).

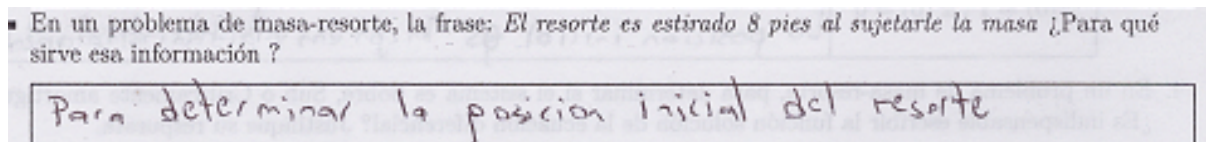


Figura 3. Reconocimiento de la información en el enunciado del problema. Elaboración propia.

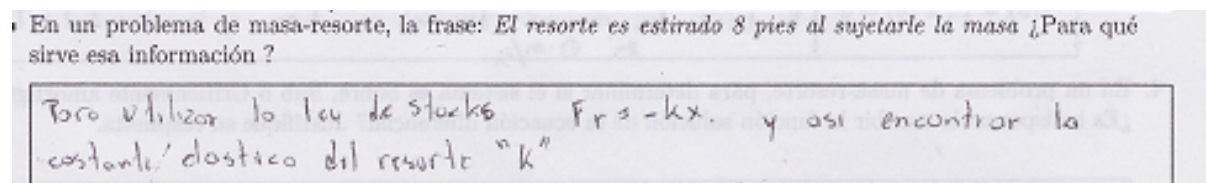


Figura 4. Reconocimiento de la información en el enunciado del problema. Elaboración propia.

Sobre el inciso b) En la ecuación diferencial  $mx'' + \beta x' + kx = 0$ , toda solución real, o también parte real de una solución imaginaria debe ser negativa, dada la naturaleza de los coeficientes de la ecuación. Partiendo de esto, se dio una lista de posibles raíces para una ecuación diferencial de segundo orden, y ellos debían seleccionar las que cumplieran con esta condición, pero se evidencia que algunos estudiantes toman cualquier tipo de raíz, la escriben como factor, resuelven, expresan la ecuación característica, y su respectiva ecuación diferencial sin importar el signo de los coeficientes (Figura 3).



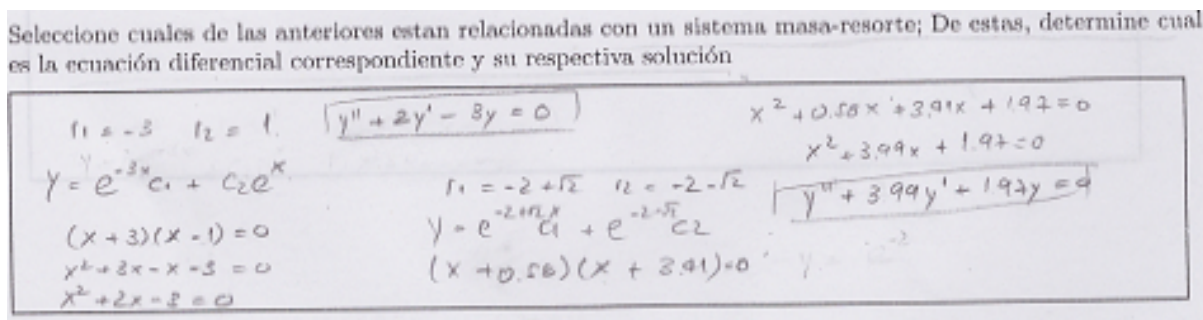
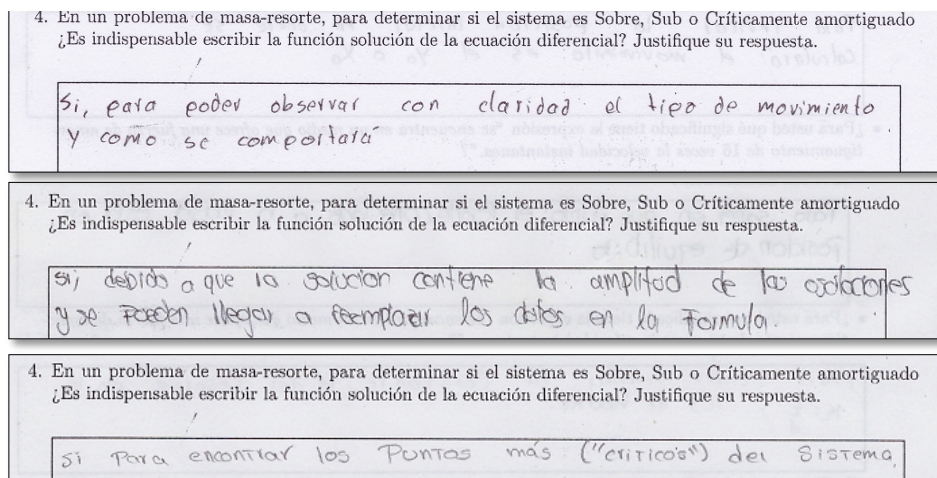


Figura 5. Considerar raíces positivas en la solución de la ecuación característica. Elaboración propia.

En el paso del registro algebraico a lenguaje natural, indicado en el inciso c) Confunden la naturaleza del problema o su relación con las soluciones, por ejemplo, si la solución de la ecuación característica, es irracional pero negativa, esta puede ser la solución de un sistema masa resorte, pero se tiende a confundir valores imaginarios de la forma  $\alpha \pm i\beta$ , con números irracionales que se escriben de la forma  $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ , con  $\beta > 0$ .

Finalmente, en el inciso d), relacionado con los alcances de la ecuación característica y sus soluciones para determinar el tipo de movimiento, manifiestan que es indispensable resolver la ecuación diferencial para determinar si el sistema es sobre, sub o críticamente amortiguado. Es decir, se puede deducir que están pensando en la gráfica de la función para determinar el comportamiento de la misma, desconociendo que ese análisis se puede realizar utilizando el discriminante de la ecuación característica (Figura 4).

Figura 6. No consideración del discriminante para identificar el tipo de movimiento. Elaboración propia.



### ■ Análisis de Resultados

Al realizar un análisis de la información recopilada, se plantea que al solucionar un problema de sistemas masa – resorte, los niveles de comprensión o construcciones mentales parten de la desencapsulación del modelo mediante acciones como:

- Relacionar la ecuación característica con la ecuación diferencial
- Extraer las condiciones iniciales del enunciado del problema

- Realizar las conversiones de unidades requeridas para dar tratamiento a las variables del problema. Así mismo, la coordinación de algunos procesos relacionados con:

- la identificación y comprensión de variables y constantes dadas de forma explícita o implícita en el enunciado del problema.
- La comprensión de las leyes de la naturaleza que hacen parte del sistema.
- Interpretación de la ley de Hooke, la información que aporta sobre la característica del resorte.
- Interpretar la ley de Stokes, como una justificación a que la fuerza amortiguadora sea proporcional a la velocidad.

Además, se hace necesaria la interiorización de los procesos que

- Relacionan el discriminante de la ecuación característica con el tipo de movimiento del sistema.
- Establecen la solución de la ecuación diferencial, diferenciando las funciones solución, correspondientes a cada raíz de la ecuación característica.

Las construcciones mentales anteriormente descritas, junto con los mecanismos de desencapsulación, coordinación e interiorización, pueden favorecer la comprensión y del objeto ecuación diferencial  $mx'' + \beta x' + kx = 0$ , que modela un sistema masa resorte.

## ■ Conclusiones

Aunque los libros de texto proporcionan las ecuaciones diferenciales que modelan ciertos fenómenos físicos, y en particular la que modela un sistema masa – resorte, no es clara la forma como se deben construir estos objetos, partiendo inicialmente de que cada autor, construye o presenta la ecuación diferencial desde justificaciones físicas que si bien convergen a la misma ecuación, no son coherentes, pero en este trabajo se han encontrado de forma preliminar niveles de comprensión o construcciones mentales, que por medio de mecanismos de construcción como la desencapsulación, coordinación, e interiorización, permiten la comprensión de estos objetos, sin depender del texto guía utilizado.

Identificar la forma como se comprenden algunos objetos matemáticos, son estrategias que pueden mejorar los métodos de enseñanza-aprendizaje, y de esta forma presentar alternativas a los modelos de enseñanza tradicional, la cual como mencionan algunos autores, en ocasiones solo se basa en la forma como los comprende el profesor del curso (Alvarenga, 2006).

La triangulación de la información para diseñar una descomposición genética es una de las tareas que enriquece los conocimientos de quienes la están construyendo y gesta un marco de referencia para formar a los profesionales que la deseen utilizar.

Identificar y utilizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes al comprender un objeto, son estrategias que pueden cambiar la práctica profesional docente e impulsar un cambio en la enseñanza tradicional del cálculo.

La teoría APOS y su elemento principal; la descomposición genética, puede considerarse como un punto de convergencia de diferentes profesionales cuya labor está relacionada con la enseñanza del cálculo, y deseen mejorar sus prácticas de enseñanza, o aportar a la investigación en educación matemática.

## ■ Referencias bibliográficas

- Alvarenga, K. (2006). *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios*. (Tesis Doctoral). Instituto Politécnico Nacional. México.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer New York.
- Chaves, R. y Jaimes, L. (2014). *Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas*. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer Netherlands.
- Dullius, M. (2009). *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico*. Tesis Doctoral. Universidad de Burgos. España. En línea <http://hdl.handle.net/10259/110>
- Edwards, C. H., y Penney, D. E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación.
- Fragoso, L., Magalhães, M., Las Casas, E., Santos, J., Rabelo, A., y Oliveira, R. (2014). A mass-spring model of the auditory system in otosclerosis. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, 30(3), 281-288.
- Guerra, M. (2003). Esquemas del Concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en un Contexto Curricular Tradicional. *Matemática, Educación e Internet*, 4(1). En línea <http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2343>
- Jaimes, L., Cháves, R., y Hernández, C. (2015). Planteamiento de una ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas: Una dificultad en la movilización entre registros de representación, lengua natural y algebraico. *Elementos*, 5(5), 23-31.
- Morales, Y., y Salas, O. (2010). Incorporación de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las ED ordinarias. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6, 155-172.
- Napóles, J. (2009). La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 163-181. Recuperado de <http://aprendeonline.udea.edu.co>
- Nápoles, J., González, A., Brundo, M., Genes, F., y Basabilbaso, F. (2004). El enfoque histórico problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Acta Scientiae*, 6, 41-59.
- Peña, M. A. L., García, S. F., y Porras, S. T. *Enseñanza-Aprendizaje De Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. 4º Congreso Internacional de Investigación CIPITECH 2011. Área 6: Matemáticas y Física.
- Zill D. y Cullen M. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol 1. Ecuaciones diferenciales Tercera Edición*, Editorial McGraw-Hill.