

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN HACIENDO USO DE LA VISTA GRÁFICA 3D DEL GEOGEBRA

José Carlos León Ríos, Lutzgardo Saavedra Sánchez Dávila, Ronald Quesada Córdova
Universidad de Lima. Instituto de GeoGebra (IGUL). (Perú)
jleonr@ulima.edu.pe, lsaavsan@ulima.edu.pe, rquesada@ulima.edu.pe

Resumen

Las habilidades básicas que inciden en el conocimiento matemático relativo al espacio y forma, como la construcción, manipulación e interpretación de vistas tridimensionales desde diferentes perspectivas, es un objetivo incluido en los programas curriculares por sus aplicaciones en la creación de imágenes mentales. En este documento mostramos diversos procesos de construcción de un sólido de revolución, específicamente aquellos sólidos que se construyen a partir de la rotación de regiones planas en torno a un eje, con el objetivo de facilitar la interpretación de las perspectivas de objetos tridimensionales y conjeturar algunas propiedades, haciendo uso de la vista gráfica 3D del programa GeoGebra. El uso de un programa en geometría dinámica nos permitió interpretar las perspectivas de los objetos tridimensionales haciendo uso del comando rotación y secuencias. De esta forma, logramos comparar los objetos en múltiples perspectivas, reconocer sus propiedades invariantes, y propiciar el razonamiento específico matemático.

Palabras clave: visualización, sólido de revolución, GeoGebra

Abstract

The basic skills that influence mathematical knowledge regarding space and form, such as the construction, manipulation, and interpretation of three-dimensional views from different perspectives are included within the objective of the curricular syllabi, due to their application in the creation of mental images. In this workshop we show different processes for the construction of solids of revolution, specifically those solids that are constructed from the rotation of plane regions around an axis, in order to facilitate the interpretation of three-dimensional object perspectives and to speculate on some properties, by using the 3D graphic view of the GeoGebra program. Using a program in dynamic geometry allowed us to interpret the perspectives of three-dimensional objects through the rotation and sequences command. Thereby, we can compare objects in multiple perspectives, recognize their invariant properties, and encourage specific mathematical reasoning.

Key words: visualization, solids of revolution, GeoGebra

■ Introducción

La visualización de los sólidos geométricos es una de las habilidades, como muestran los reportes de investigación en didáctica, que engloban una serie de relaciones y transformaciones de sus elementos. En ese sentido estamos de acuerdo con Gonzalo, Fernández y Díaz (2011) cuando señalan que “visualizar

y orientar un objeto, sujeto o espacios no solamente incluye la habilidad de verlos, sino también la de reflexionar sobre ellos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes y de examinar sus posibles transformaciones de rotación, sección y desarrollo” (p.100). Estos autores proponen una clasificación de tareas y describen una serie de ejemplos para la adquisición de habilidades de visualización y orientación espacial.

Basándonos en dicha clasificación, describimos las acciones y respuestas que deben elaborar un grupo de estudiantes para adquirir ciertas habilidades de visualización, que incluye reconocer las propiedades de un objeto en un sistema bidimensional y tridimensional, rotar dicho objeto, propiciar rotaciones mentales e interpretar sus propiedades intrínsecas desde diversas perspectivas.

■ Marco teórico

Nuestro trabajo está enfocado en algunos aspectos de del desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial que proponen Gonzalo et al. (2011). Los autores proponen tres actividades para propiciar la visualización y la orientación espacial:

- Orientación estática del sujeto y de los objetos.
- Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales.
- Finalmente, la orientación del sujeto en espacios reales.

Nos enfocamos en la segunda de las tres actividades, la cual incluye acciones como la de reconocer y cambiar puntos de vista, interpretar representaciones planas de objetos tridimensionales, interpretar perspectivas de objetos, rotar mentalmente dichos objetos.

De acuerdo con este marco teórico, para lograr la visualización espacial y la intuición geométrica, hemos identificado las principales tareas como mostramos en la tabla 1: el estímulo inicial, las principales acciones que se elaboran para cumplir con el objetivo y la respuesta que demande las tareas.

Tabla 1. Acciones y respuestas de la tarea.

Esímulo inicial	Acción (ejecutar/imaginar)	Respuesta
Presencia del objeto físico: Polígono en el plano XOY	Cambiar de representación un mismo objeto, del sistema bidimensional al tridimensional.	Construcción y cambio de perspectiva con apoyo de las Vistas 2d y 3d
	Rotar el polígono alrededor de un eje de rotación con diversos ángulos	Cambio de perspectivas. Uso de deslizadores
	Convertir una representación plana en representación tridimensional	Construcción con apoyo del comando Secuencias
	Relacionar espacialmente algunas propiedades invariantes de los objetos.	Interpretación haciendo uso de las Vistas del Programa

Por ese motivo, hemos dividido la construcción de un sólido de revolución a partir de una región plana en dos grupos: el primero, que es el proceso de construcción o dibujo, y la segunda la tarea que corresponde a la identificación o interpretación de las propiedades de dicho sólido.

Las principales acciones que propiciamos involucran:

- Cambiar la presentación, es decir llevar un objeto de una representación en el sistema bidimensional a una en el sistema tridimensional (perspectiva isométrica). Para ello hacemos uso del comando rotar del GeoGebra y a la Vista Gráfica en 3dimensiones que ofrece el programa.
- Rotar un polígono considerando un eje y un ángulo de rotación. Se consideran múltiples ángulos de rotación, gracias al deslizador del programa. La información visual contribuye al pensamiento geométrico, imágenes mentales, gestos y movimientos corporales por los cambios de perspectivas.
- Convertir una representación plana en una tridimensional. Por ejemplo, a partir de un cuadrilátero que rotal alrededor de un eje, y con el uso del comando Secuencias del programa GeoGebra, se podrá obtener un sólido de rotación. Este comando nos facilita la obtención de uno o más elementos de rotación, para formar el sólido, o viceversa, a partir del sólido obtener una de sus partes.
- Relacionar espacialmente algunas propiedades invariantes de los objetos.

Las respuestas que demandamos involucran:

- El proceso de construcción en el sistema tridimensional, lo que involucra el conocimiento del programa de geometría dinámica GeoGebra.
- La representación del sólido en diferentes vistas: vista frontal plano XZ, plano YZ, plano YX, los cuales podrán realizarse haciendo uso de la Dirección de la Vista del programa.
- Interpretación, para explicar las tareas propuestas, que se consigue articulando expresiones propias de la estructura específica matemática.

■ Metodología

Nuestra investigación es cualitativa, de orden descriptivo y las actividades están dirigidas a estudiantes de secundaria y pregrado. Está basado en la observación de actitudes y comportamientos, interpretación de significados. El taller está programado para dos sesiones de hora y media cada uno.

La actividad se inicia con la presencia de un objeto físico, en este caso el de un polígono cuyas coordenadas sobre el plano XOY están controladas por deslizadores, lo que las convierte en coordenadas cuyas componentes podemos ir variando, y como consecuencia también la forma del polígono.

En las actividades que realizamos en el taller, mostramos que, gracias a las coordenadas variables del polígono, se obtiene la transformación de dicho polígono en rectángulos, trapecios, y su respectiva traslación sobre el eje de abscisas, propiciando las rotaciones mentales con el uso de imágenes mentales, dibujos, gestos y movimientos corporales. Para el cálculo y las mediciones, se identificaron algunos elementos geométricos, como la altura, área de las bases circulares y se interpretaron formas elípticas a circulares, desde la perspectiva tridimensional.

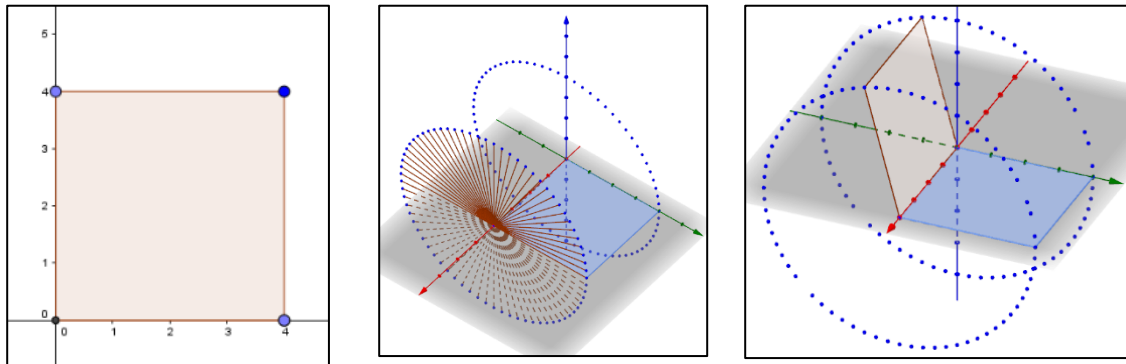


Figura 1. Rotación de un polígono y las trazas correspondientes. (Elaboración propia)

La figura 1 que mostramos en la parte superior, presenta la rotación del polígono y sus rastros correspondientes incluyen la puesta en práctica de un comando con múltiples ángulos de giro y que permite la presencia secuencial de otros polígonos, en la formación de otros sólidos de revolución, y las interpretaciones de perspectivas de objetos tridimensionales.

A partir de dicho polígono y con ciertas herramientas del GeoGebra, se obtiene el sólido de revolución al que le agregamos un rastro.

■ Desarrollo de la actividad

Dividimos al taller en dos episodios. El primero considerando la rotación de un objeto en dos dimensiones y el segundo, considerando la rotación en tres dimensiones. En este artículo, hemos seleccionado tres ejemplos del segundo episodio, porque el objetivo de este documento es mostrar los diversos procesos de construcción de un sólido de revolución

Hemos tomado como referencia a Larson, Hostetler y Edwards (1999), para definir un sólido de revolución “Si una región plana se hace girar en torno a una recta, el sólido resultante es un sólido de revolución y esa recta se llama eje de revolución o eje de giro” (p.472).

Ejemplo 1

Rotemos el polígono1 formado por $A = (0; 0), B = (4; 0), C = (4; 4)$ y $D = (0; 4)$

- En torno al eje X con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.
- Rota [polígono1, $\pi /2$, Eje X]

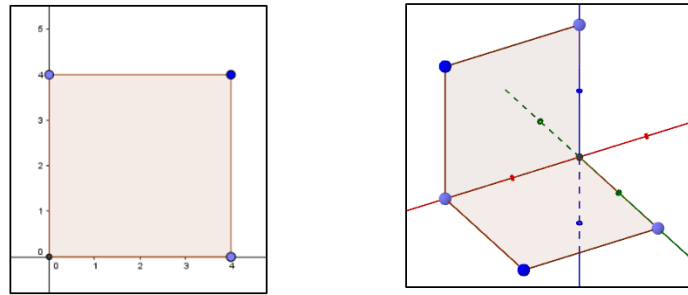


Figura 2. Representación inicial y rotación final. (Elaboración propia)

De acuerdo con la figura 2, observamos que existe de por medio el estímulo inicial, en este caso un polígono, que los participantes logran representar muy fácilmente. Se observan dos acciones: la primera el cambio de presentación, del sistema de dos a tres dimensiones y la segunda la rotación de dicho polígono. Sobre la primera acción, observe en ambas figuras como el cambio de perspectiva genera una serie de respuestas en torno a las propiedades invariantes del polígono. El uso del comando Rota [polígono1, $\pi/2$, Eje X] permite verificar algunas de las conjeturas de las imágenes mentales que podemos solicitar como respuesta.

Ejemplo 2

Rotemos el polígono 1 con múltiples ángulos de giro. Deslizador ángulos.

- Insertamos un deslizador para el ángulo: $0 \leq \alpha \leq 2\pi$
- Rota [polígono1, α , EjeX]

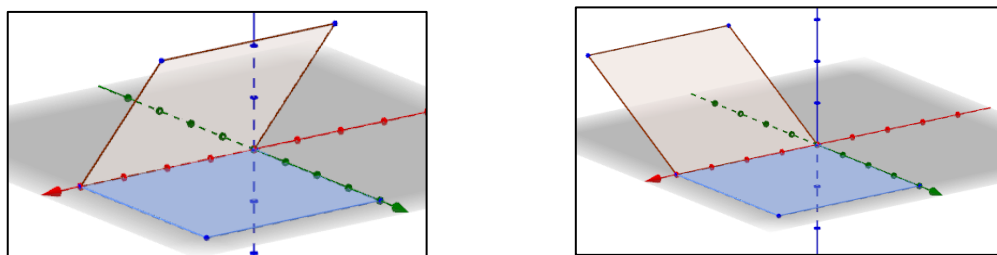


Figura 3. Uso del deslizador, múltiples ángulos de giros. (Elaboración propia)

- Use el comando **Rastro** en los vértices y en los lados del cuadrado rotado

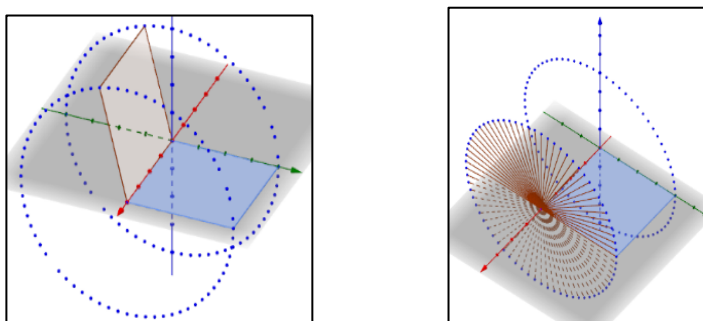


Figura 4. Uso de la traza. Imágenes mentales. (Elaboración propia)

De acuerdo con la figura 3 y 4, observamos la rotación de un polígono considerando un eje y un ángulo de rotación. Se consideran múltiples ángulos de rotación, gracias al deslizador del programa que ofrece el GeoGebra. Para ello consideramos un deslizador cuyo ángulo varía de acuerdo con la inequación $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Esta situación, conduce a llevar información visual al pensamiento matemático. Se observan dos acciones: la rotación y el proceso de conversión de una representación plana a una representación espacial. Se puede indagar por la imagen mental que arrojan estas rotaciones y que conduce finalmente a la de un cilindro.

Ejemplo 3

Rotemos el polígono1 $A = (0,0,0), B = (4,0,0), C = (4,4,0)$ y $D = (0,4,0)$

lista1 = Secuencia [Rota [polígono1, $2\pi(\frac{i}{n})$, EjeX], i, 1, n]

Este ejemplo está basado en el de Carrazedo S., y Vieira C. (2017), que toman un ángulo de rotación similar al que mostramos.

- ¿Qué valores toma el ángulo $2\pi(\frac{i}{n})$
-

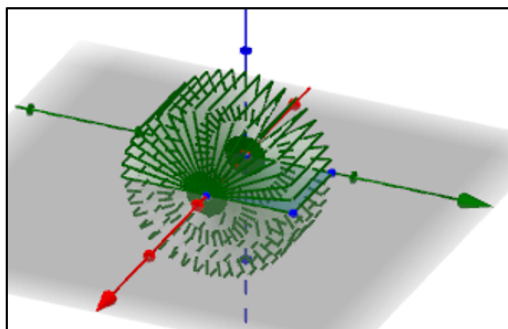


Figura 5. El sólido como secuencia de polígonos. (Elaboración propia)

- Si $n = 1$, se crea una lista de 1 polígono rotado 360° .
- Si $n = 2$, se crea una lista de 2 polígonos rotados 180° y 360° .
- Si $n = 3$, se crea una lista de 3 polígonos rotados 120° , 240° y 360° .
- Si $n = 4$, se crea una lista de 4 polígonos rotados 90° , 180° , 270° y 360° .
- Si $n = 5$, se crea una lista de 5 polígonos rotados 72° , 144° , 216° , 288° y 360° ; y así sucesivamente.

De acuerdo con la figura 5, observamos la construcción del sólido de rotación haciendo uso del comando secuencias. El estudiante puede observar la secuencia de polígonos que se forman para la construcción del sólido. La identificación de algunas relaciones espaciales como longitudes de aristas, radios, volúmenes pueden ser identificadas cuando existe cambio de perspectiva.

Si resumimos las acciones del estudiante, detallaremos que inicialmente cambió de representación un mismo objeto ya que el polígono fue representado del plano XOY al plano XOZ. Esta acción favoreció la relación de las propiedades invariantes del polígono y entender su representación desde otra perspectiva. Luego, se rotó el polígono haciendo uso de los deslizadores, esta acción favoreció la habilidad para

visualizar el proceso de representación de un objeto en tres dimensiones. Finalmente, los polígonos creados gracias al comando Secuencia nos permitió concretar la construcción del sólido de rotación.

■ Reflexiones finales

La visualización en diversas perspectivas de los sólidos de revolución juega a favor de las dificultades que los alumnos muestran cuando representan un paralelepípedo en un plano. El estudiante, a partir de una representación plana construye el sólido y haciendo uso del GeoGebra logra girar el sistema de coordenadas desde diversas perspectivas, lo que le permite crear imágenes mentales, conjeturar algunas propiedades invariantes de sus elementos que no se observa con profundidad en las representaciones en el plano, vincular las representaciones planas con las espaciales, es decir identificar las propiedades del sólido geométrico obtenido a partir de una construcción secuencial que ofrecen las tarea propuestas.

■ Referencias bibliográficas

- Gonzalo M., Fernández T., Díaz J. (2016). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, (77), 99-117. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_05.pdf
- Larson E., Hostetler P., Edwards H. (1999). *Cálculo y la Geometría Analítica*. (Lorenzo Abellanas, trad.). (6.a ed.). México DF.: Compañía Editorial Ultra
- Carrzedo S., y Vieira C. (2017). Formas de revolução e cálculo de volumen. *Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas*, (1), 142-155. Recuperado de <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/24428>