Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

POSIBLES PERSPECTIVAS PARA PROFUNDIZAR EN EL CAMPO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esperanza Lozada
Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de los Lagos, Osorno. (Chile)
elozada@udec.cl

Resumen
En este ensayo se revisa la teoría de resolución de problemas y con la finalidad de dar un impulso al aparentemente estancado desarrollo de esta línea de investigación de la educación matemática se proponen tres posibles vías o perspectivas de investigación dentro de la teoría, las cuales permitirían dar saltos cualitativos en la construcción de una teoría de resolución de problemas más completa y por ende más compleja. En primer lugar se propone el estudio del nexo de la resolución de problemas con la creatividad en matemática, como una segunda vía el análisis de la relación de la resolución de problemas con la construcción de pruebas matemáticas formales y en una tercera opción es estudiar de manera integrada la resolución de problemas, la creatividad y la prueba matemática. La prueba y la creatividad se presentan con mayor frecuencia en la enseñanza de la matemática de nivel universitario y son de gran utilidad para la generación de nuevo conocimiento disciplinar matemático.

Palabras clave: resolución de problemas, creatividad, prueba matemática

Abstract
In this work, we review the problem solving theory with the aim of making a boost to the apparently stagnant development of this research line in mathematics education. We propose three new possible research ways or perspectives in this theory, which would contribute to the qualitative development of a more complex problem solving theory. First, we propose to study the link of problem solving with creativity in mathematics. The second perspective is the analyses of the relationship of problem solving with the construction of formal mathematical proofs. And the third option of development is the integrated study of problem solving, creativity in mathematics and mathematical proof. The creativity and the proof are more frequently used in mathematics teaching at the university level and they are very useful in the generation of new mathematical knowledge

Key words: problem solving, creativity, mathematical proof

Introducción

La investigación de la resolución de problemas es un área de investigación con una historia de aproximadamente setenta años, si es que se cuenta desde el primer trabajo de Polya (1945). A lo largo de todos estos años hubo periodos marcados con una mayor actividad. En este sentido, se puede señalar que hubo una ligera actividad por la investigación de esta temática en la década de los 50 y los 60. Este hecho fue motivado por la búsqueda de heurísticas para la resolución de problemas por parte de Polya (Voskoglou, 2011). Luego un gran crecimiento de la teoría se dio a partir de la década de los 80, el cual fue motivado por distintos factores. Entre ellos se pueden señalar, por ejemplo, los dos siguientes: (i) en esta época se publicaron los resultados de la investigación conducida por Schoenfeld (1985) y (ii) La "National Council of Teachers of Mathematics" puso a la resolución de problemas en su agenda para la década de los 80 (*Nacional Council of Teachers of Mathematics, 1980*). En la época posterior a los 80 y hasta el 2008 la motivación por investigar sobre la teoría de resolución de problemas permaneció como una de las líneas principales de desarrollo de la Educación Matemática. En particular como lo señalan English y coautores (English, Lesh y Fennewald, 2008) que la resolución de problemas es una teoría que ha recibido más de cincuenta años de atención y que en la mayor parte de casos sólo ha tenido embellecimientos y no cambios profundos, por lo cual debe enfrentar con claridad una refundación en sus principios. Además de esto los autores exponen cinco factores que en su opinión son los limitantes causales para que la teoría de resolución de problemas aparezca como en un periodo de estancamiento en su evolución y así mismo proponen dos perspectivas claras: el cambio en los curriculums y el uso de los modelos y el modelamiento matemático. Entre el 2008 y la actualidad la investigación hacia el modelamiento matemático se ha tornado como una tendencia mundial muy marcada (*Huicahue y Mena-Lorca, 2015*).

Por otro lado, desde el punto de vista de las políticas públicas educativas mundiales, ha existido un claro favoritismo para desarrollar esta teoría. En un aspecto global se puede señalar que lo documentado en relación a uno de los objetivos específicos de la prueba PISA (OECD, 2014) establece que:

La prueba PISA une (y evalúa) el concepto de cultura matemática para referirse a la capacidad de los estudiantes para analizar razonar y comunicar efectivamente la formulación, solución e interpretación de problemas en una variedad de situaciones que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos o matemáticos.

Es claro entonces que la enseñanza basada en la resolución de problemas permitiría lograr este objetivo específico, debido a que presenta todas estas características. Ahora, de manera más local, en Chile, de acuerdo a los Estándares Pedagógicos y Disciplinares desde el 2012 (MINEDUC, 2012) los objetivos de aprendizaje deben considerar transversalmente cuatro habilidades matemáticas: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar. Es así que el desafió de investigar sobre la resolución de problemas se ve favorecida de manera explícita por este objetivo y por ende a adquirido un rol protagónico en los distintos niveles: la formación matemática en la enseñanza básica, la formación de los futuros profesores de matemática, la formación de los futuros científicos en matemática o áreas afines y la capacitación en resolución de problemas de docentes en ejercicio de la profesión y que fueron formados bajo otros enfoques de la práctica de enseñanza de la matemática.

En este trabajo, aprovechando este ambiente favorable retomamos lo expresado por English y coautores (English *et al*, 2008) sobre la refundación de la teoría de resolución de problemas proponemos dos perspectivas en las cuales es meritorio realizar una profundización de esta: la creatividad y las pruebas formales en matemática. Ambas áreas de investigación y de acuerdo a nuestro conocimiento han sido poco exploradas. Uno de los motivos, que en nuestra opinión, han contribuido a que haya poca investigación en estas áreas es que la resolución de problemas se ha investigado en la enseñanza de la matemática a nivel de la enseñanza básica, media y universitaria de primeros años pero no a nivel de la matemática universitaria avanzada. En la matemática universitaria avanzada es algo fundamental el desarrollo de pruebas matemáticas formales y la creatividad.

El trabajo es organizado como sigue: en la sección 2 se presenta una revisión de la creatividad y la prueba en matemática, en la sección 3 se presenta un plan de investigación y en la sección 4 se presentan algunas conclusiones.

Aspectos teóricos

El trabajo es centrado en tres conceptos: resolución de problemas, creatividad en matemática y la prueba en matemática. El primero de estos conceptos es claramente establecido y difundido, en cambio los otros dos merecen ser precisados y es algo que describiremos en esta sección.

La creatividad en matemática.

(Erkii, 1997) realizó una revisión acerca del estado del arte sobre la creatividad matemática. En este estudio partió estableciendo lo que se entiende por creatividad. En esta revisión pone en contexto todas las posibles acepciones del término. En primer lugar deja claro que la creatividad no solamente forma parte de los artistas o de los científicos, si no que forma parte de la vida diaria de toda persona. Así mismo aclara sobre la creencia típica que la matemática es una repetición de conocimientos inventados y que se repiten de acuerdo a reglas ya establecidas y en este contexto la creatividad no juega ningún rol y que aún hay quienes piensan que creatividad y matemática no tienen nada de relación la una con la otra. Posteriormente, el autor expresa que existen al menos dos maneras complementarias de pensar en matemática: pensamiento creativo y pensamiento analítico. El primero de estos es guiado por la intuición y el segundo por la lógica. Es así que el autor enfatiza que la creatividad es una acción intrínseca al aprendizaje y desarrollo de la matemática y que puede presentar distintos niveles, de acuerdo con las exigencias de pensamiento necesarios para resolver un problema. Además, (Erkki, 1997) señala que no hay una definición científica común aceptada para la creatividad, existiendo diversas versiones y que probablemente la más universal de estas es la siguiente: "acto por el cual un individuo está produciendo algo nuevo e impredecible" (Bergström, 1991).

Otro de los aspectos interesantes del trabajo de (Erkki, 1997) es que establece un nexo de la creatividad con la resolución de problemas. El nexo lo hace explicito y argumenta que la resolución de problemas fomenta la creatividad. Sin embargo, no cita a ningún trabajo que valide esta afirmación. Es así que hay un espacio abierto que necesita ser validado científicamente con estudios profundos.

En las últimas dos décadas la enseñanza y el aprendizaje de la geometría tuvo un avance significativo, este avance es gracias a los diversos ambientes de geometría dinámica (DGE); tales como: Cabri, derive, etc. Estos ambientes como se conoce presenta espacios que permiten al docente generar actividades y tareas que ayuden al estudiante a trabajar con conceptos matemáticos a través de lo experimental. En particular, referimos el trabajo de (Santos-Trigo, 2008), quien investiga resolución de problemas haciendo uso de recursos tecnológicos. En ese trabajo el autor distingue dos etapas. Una primera etapa donde las tareas, problemas o actividades son de tipo rutinario, es decir los estudiantes están más centrados en explorar y aprender a manipular el software. En una segunda etapa el estudiante ya no toma en cuenta el aprendizaje del software y aprovecha esta herramienta como una oportunidad para poder identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. Es claro que el autor genera ambientes que estimulan la creatividad. Sin embargo la creatividad como tema de investigación no es parte del objetivo de la investigación desarrollada por el autor. Además, el trabajo de este artículo es totalmente posible de ser modificable y centrarlo en estudiar la creatividad porque permite en el estudiante desarrollar dimensiones fundamentales de la creatividad tales como: fluidez, flexibilidad y novedad. Así, que se podría estudiar el grado con el cual se desarrollan estas dimensiones y qué relación tienen con el desarrollo de la creatividad en sí.

Otra manera de fomentar la creatividad es a través de actividades basadas en el uso de material concreto y que son frecuentemente utilizadas en la vida cotidiana. En este caso se deben crear actividades, las cuales a través de diversas representaciones de los objetos matemáticos que se encuentran en el mundo real, puedan ser llevadas a un ambiente geométrico, propiciando un proceso de reflexión y argumentación, siendo esta una de las características esenciales del razonamiento humano y en consecuencia de su creatividad.

Al estudiar la creatividad aparece de manera natural una pregunta ¿Cómo medir la creatividad? La respuesta a esta inquietud es tan compleja como medir el razonamiento humano. Sin embargo, en las últimas décadas se han desarrollado formas de hacerlo, desde distintos enfoques. Una síntesis de esto aparece en el trabajo de (Nilsson, 2012), en donde se muestran cuatro modelos para medir la creatividad. Sin embargo, este enfoque preliminar de medición puede ser profundizado aun más si se utilizara las ideas de M. Gr. (Voskoglou, 2014) para medir la incertidumbre. En el trabajo de (M. Gr. Voskoglou, 2014), se presenta un modelo difuso que le permite describir las etapas del proceso de razonamiento humano: imaginación, visualización e innovación. Este modelo, a través de un cálculo de probabilidad, entrega los posibles perfiles cuantitativos y cualitativos del razonamiento humano.

La prueba en matemática

Es ampliamente conocido que matemática existen distintos lenguajes de comunicación de los resultados, entre ellos figuran, por ejemplo, el lenguaje aritmético, el lenguaje algebraico, el lenguaje geométrico y en cada uno de estos hay niveles desde el nivel informal que no es estructurado hasta el nivel formal donde existe una estructura formal. En el último de estos niveles se encuentran lo que se conoce como prueba matemática y que tiene una estructura formal y puede estar expresada en cualquiera de los lenguajes utilizados para comunicar los resultados matemáticos.

No existe ninguna definición formal sobre “prueba matemática”, pero si existe una extensa discusión sobre su naturaleza y existen distintas aproximaciones, las cuales están diseminadas en el volumen 15 del ICMI (Hanna, G., Villiers, M., 2012) y también previamente en el trabajo de G. Hanna y H. N. Jahnke (1996). Entre otros aspectos, en este trabajo se señala que la prueba matemática es un constructo social y así se podría aceptar como definición de prueba matemática: “una secuencia lógica argumentativa se llama una prueba matemática después del acto social de aceptarlo como prueba escrita en un lenguaje formal”. En consecuencia, el hecho de que exista una prueba matemática depende de varios factores entre ellos de la comunidad matemática, la cual es la que valida cuando esta es verdadera o falsa.

En el contexto de educación matemática se debe señalar que la prueba matemática como uno de los aspectos didácticos para enseñar matemática también ha sido utilizada en distintas épocas de manera implícita o explícita. Uno de estos trabajos es el desarrollado por Heinze y Reiss (2004) para el nivel secundario. En este trabajo, los autores realizan un estudio del arte que resulta interesante. Además se enfocan en el desarrollo de competencias argumentativas y desde el punto de vista cualitativo. A pesar de ser concreto el estudio, en el sentido que se establece una población específica con seis etapas de análisis específico, es necesario realizar un estudio de tipo cualitativo que dé cuenta de las distintas categorías del pensamiento necesario al desarrollar las pruebas matemáticas.

Por otro lado, hemos encontrado solamente el trabajo de Oldenburg, K. R, and Freinburg, A. R. (2002) el cual vincule la resolución de problemas con la "prueba matemática" en su análisis pero no en la práctica.

Propuesta

En base a lo discutido previamente es claro que existe la posibilidad de investigar sobre la resolución de problemas y su nexo con la creatividad en matemática y la prueba en matemática. Más precisamente se plantea lo siguiente:

A) El primer proyecto seria investigar sobre la conjetura de Erkki (1997) al afirmar que existe un nexo entre la creatividad y la resolución de problemas al establecer que "la resolución de problemas fomenta la creatividad". En este sentido sería conveniente hacer estudios en distintos niveles de enseñanza de la matemática y que permitan validar o refutar esta afirmación. En particular, de manera cualitativa sería conveniente establecer los distintos estados de creatividad que se pueden lograr con un determinado tipo de problemas matemáticos.
En este contexto sería necesario también avanzar en el sentido de definir con mayor precisión la creatividad en matemática. En particular para realizar estudios de tipo cuantitativo sería necesario tener una medida de la creatividad, probablemente definiendo "niveles de creatividad" o "grados de creatividad".

B) Un segundo proyecto es la investigación sobre la prueba matemática y su relación con la resolución de problemas. El trabajo de Oldenburg y Freinburg (2002) establecevarias características para "la prueba matemática" y su utilización en la enseñanza de la matemática. En particular cita al trabajo de Bero (1999), el cual establece seis etapas diferentes de la prueba matemática:

1. *Conjetura.* El establecimiento de la conjetura es una fase en la cual se hace un estudio de la situación problemática y la identificación de los argumentos que soportan la evidencia.
2. *Formulación de las condiciones.* En esta fase se establecen de manera precisa las conjeturas y estas formaran la base de las actividades de las siguientes fases.
3. *Exploración*. En esta etapa se hace ejemplos o casos particulares de la situación general que se está probando.
4. *Selección de argumentos*. En esta etapa se establecen los argumentos lógicos para la prueba y se hace la combinación en una cadena inductiva de todos estos.
5. *Organización de los argumentos*. En esta etapa se revisa la cadena argumentativa y se preocupa que este acorde de los argumentos matemáticos estándar.
6. *Propuesta de una prueba*. Se propone la prueba matemática formal.

Es necesario destacar que Oldenburg y Freinburg (2002) en defensa del modelo de Bero (1999) establecen una comparación con el trabajo de Shoenfeld (1993). Además para diferenciarse del trabajo de Polya establece que las etapas de 1 hasta 6 en el trabajo de Bero (1999) no son lineales, es decir que no necesariamente se dan en esa secuencia y que es posible conectar una con otra etapa en orden distinto al establecido por la enumeración.

Otra de los aspectos interesantes del trabajo de Oldenburg y Freinburg (2002) es que establece que la "prueba matemática" en educación matemática tiene un objetivo distinto al utilizado en la investigación en matemática. El establecimiento de esta diferencia no es claro de manera inicial y es bueno que se establezca. El objetivo en ciencia es establecer una prueba matemática para ser publicada en una revista especializada o para una comunidad técnicamente preparada. En cambio en la sala de clase la prueba matemática tiene como objetivo que los estudiantes creen los argumentos lógicos suficientes que confirmen el aprendizaje de un determinado concepto matemático y además estos lo comuniquen adecuadamente en su comunidad.

El modelo de Bero (1999) y el análisis preliminar de Oldenburg y Freinburg (2002) por establecer el paralelo con el trabajo de resolución de problemas de Shoenfeld (1993) marca la primera fase de un estudio que merece ser profundizado. El trabajo establece que hay similitudes en ambos enfoques. Así que en un primer trabajo seria de vital importancia buscar diferencias a nivel de los fundamentos teóricos si es que estas existen. Posteriormente, sería conveniente realizar estudios que comparen las diferencias o similitudes de su aplicación en la sala de clase.

C) Un tercer proyecto sería el estudio de la relación entre prueba matemática, la resolución de problemas y la creatividad matemática. Un estudio de estos tres conceptos de manera integrada llevaría a establecer un avance de la teoría de resolución de problemas.

Estas vías de exploración para la resolución de problemas presentan una ventaja transversal en el sentido que puede ser aplicados en distintos niveles de enseñanza de la matemática, de la enseñanza básica hasta la universitaria avanzada e inclusive en el desarrollo de la matemática como ciencia, dado que la prueba y la argumentación lógica son altamente importantes en la enseñanza de las asignaturas avanzadas de los futuros científicos.

Conclusiones

El estudio de la teoría de resolución de problemas se encuentra en un punto de evolución tal que es necesario proponer perceptivas de investigación que le permitan salir de este estancamiento. Es así que en este trabajo se establece la exploración de su nexo con otros dos conceptos utilizados en la educación matemática: la creatividad y la prueba matemática. Además, se hace una revisión preliminar del estado del arte que compara estos tres conceptos y se establece que hay una necesidad de profundizar estos trabajos.

Referencias bibliográficas

Bero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* 7/8

Bergström, M. (1991): Luovuus ja aivotoiminta (Creativity and brain function).—In: R. Haavikko; J.-E. Ruth/ Eds., *Luovuuden ulottuyuudet (Dimensions of creativity).* pp. 159-172.

Hanna, G.; Jahnke, H. N. (1996): Proof and proving.—In: Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.), *International handbook of mathematics education*. Vol. 4, Pt. 2. Dordrecht:

Kluwer, pp. 877–908.

Hanna, G., & Villiers, M., (2012). *International Handbook of Mathematics Education, Vol 15 (Proof and Proving in mathematics educations).* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level—a video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik , 36*, 98-104.

Huicahue, J., y Mena-Lorca, J. (2015) Modelacion matemática en la formación inicial de profesores, *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, Villarrica, Chile, 2015, pp. 184-191

English, L., and Lesh, R., and Fennewald, T. (2008). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development*. Paper presented for TSG 19 at the International Congress on Mathematics Education, Monmterrey, Mexico, July 6-13.

Erkii P, H. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 29*: pp 63-67.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económica. (2014), *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science* (Volume I, Revised edition, February 2014), PISA. OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264201118-en.

Ministerio de Educación (2012). *Curriculum en linea*. Visitado el 12 de Enero de 2015, http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html

Nacional Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action: Directions for school mathematics for the 1980s*. Reston, VA.

Nilsson, P. (2012). *Four Ways to Measure Creativity. Sense and Sensation Writing on Education, Creativity, and Cognitive Science*. http://www.senseandsensation.com/2012/03/assessing-creativity.html

Oldenburg, K. R, and Freinburg, A. R. (2002) Learning to prove: the idea of heuristic examples, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*, 29-35.

Polya, G.(1945). *How to solve it?* USA: Princeton.

Schoenfeld, A. H. (1985) . Orlando, FL: Acedemic Press.

Schoenfeld, A. H. (1993). Learning to think Mathematically. In D. G. Grouws, (ed.) *Handbook of reserach in mathematics teaching and learning* (pp. 334-370) New York, NY: Macmillan.

Voskoglou, M. Gr. (2011) Problem-solving from Polya to nowadays: A review and future perspectives, In Nata, R. V. (Ed.): *Progress in Education*, Vol.22, Nova Publishers, NY, Chapter 4, pp.65-82