VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

UNA PROBLEMATIZACIÓN DEL CONCEPTO TOPOLOGÍA

Gabriela Márquez-García; Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
gabriela.marquez@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen
En esta investigación presentamos una parte de la problematización que estamos realizando del concepto de topología, mediante un estudio sociohistórico de obras originales, para observar el papel que jugó *la relación de proximidad* en la constitución del concepto de topología como saber matemático. Nos ubicamos en el estudio de *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad* entre los elementos de los espacios (L) y (V) de los que se ocupó Maurice Fréchet en su tesis doctoral en 1906. Mostramos cómo se realizó la familiarización con la obra, así como el contexto sociocultural en el que se produjo la misma.

Palabras clave: relación de proximidad, Fréchet, topología, socioepistemología

Abstract
In this research, we present part of the typology concept problematization we are carrying out through a socio-historical study of original works, in order to observe the role played by the relation of proximity in the constitution of the concept of topology as mathematical knowledge. We focus on our study of the uses of the relation of proximity between the elements of the spaces (L) and (V), the ones Maurice Fréchet dealt with in his doctoral thesis in 1906. We show how the familiarization with the work was carried out, as well as the socio-cultural context in which it took place.

Key words: relation of proximity, topology, Fréchet, socio-epistemology

Introducción

En la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, desde mi experiencia como estudiante de esta licenciatura, generalmente las materias de matemáticas se presentan de manera aislada, como si no existiera relación alguna entre cada una de ellas, y parece no importar saber si existe relación y mucho menos entenderlas. Sin embargo, algunos profesores sí se interesan en marcar relaciones entre algunas, por ejemplo, entre el Análisis Matemático y la Topología, señalando esta última como una generalización de la primera, aunque no se profundiza en qué sentido se da dicha generalización. Particularmente, la Topología se presentaba como una rama de la Matemática 'muy abstracta', que se dedica a estudiar los espacios topológicos y sus propiedades, al menos para los estudiantes de dicha licenciatura. Es así como nos planteamos esta investigación, para tratar de entender algo más allá de la Topología que se ve en la escuela y entender su esencia.

Antecedentes

Con el objetivo de acotar nuestro estudio, hicimos una revisión de libros de Topología, típicamente utilizados en la educación universitaria. Hinrichsen y Fernández (1977) y Pérez (2015) introducen a la Topología planteando a la *continuidad* como su objeto de estudio, y definiendo a esta y a la convergencia en términos de una noción de *proximidad*, que es independiente de la métrica. De esto surge un primer cuestionamiento relativo a lo propio de la Topología, ¿cómo y cuándo hablamos de *proximidad* en matemáticas sin una métrica?

Al respecto, encontramos que en Pérez (2015) a través de la topología como concepto, se define una *relación de proximidad* y se da estructura topológica al conjunto. De ahí que se declare que la Topología de Conjuntos se ocupa del estudio de los espacios abstractos (Freixenet, 1994), es decir, conjuntos tales que la naturaleza de sus elementos es homogénea y cualquiera entre los que se ha establecido una *relación de proximidad* (Arboleda, 2012). Entonces, vislumbramos que la *relación de proximidad* permite *la generalización* de los conceptos de convergencia y continuidad a los espacios topológicos; lo cual tendríamos que validar en nuestro estudio.

De lo anterior se identifica a la *proximidad* como fundamental para dotar de significado a algunos conceptos como: topología, espacio topológico, conjuntos abiertos, continuidad y convergencia; y surgen las interrogantes que guiarán la presente investigación: ¿qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?, y ¿a qué nos referimos con naturaleza topológica?;

Marco teórico

Reconocemos como *problema la falta de significado* de la matemática en la escuela, problema que particularizamos con el concepto de topología, que forma parte de la matemática escolar avanzada; y que atenderemos con un estudio bajo el enfoque de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME).

La TSME se encarga fundamentalmente del problema del significado y asume que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas (Cantoral, 2013). En este sentido, se puede encontrar la razón de ser y lo que le da sentido al concepto de *topología* en su origen, es decir, entender su naturaleza. Sin embargo, Espinoza (2009) afirma que, por los procesos de transposición, en conjunto con la corriente de formalización, estas cuestiones se esconden en la historia.

En este mismo orden de ideas, Espinoza (2009) y Cantoral (2013) mencionan que una pregunta fundamental de esta teoría es: ¿Existe una manera de pensar matemáticamente que pueda ser difundida socialmente? Vemos que esta pregunta relaciona el pensamiento individual con el pensamiento difundido socialmente, independientemente si un pensamiento matemático básico o avanzado.

Este cuestionamiento requiere de asumir a la matemática como parte de la cultura humana, esto es, reconocer distintas formas de pensar y usar la matemática según el contexto (*racionalidad contextualizada*); para esto debe existir una forma de validar cada forma de pensar y usar la matemática, es decir, cada racionalidad contextualizada demanda su validación (*relativismo epistemológico*). Dado que se reconoce que no hay un único significado o significado universal de cada conocimiento matemático, se asume que cada forma de pensar y usar la matemática implica cierto significado, es decir, el significado depende del uso del conocimiento matemático en cada contexto.

Entonces, como se acepta una pluralidad de contexto se afirma que, el conocimiento matemático cuando se pone en uso en cada contexto se vuelve funcional cuando el uso tiene una racionalidad, es así como el conocimiento matemático se somete a un proceso de *resignificación progresiva.* Todo esto a su vez están *normados por una práctica social*, es decir, hay algo que hace a los individuos hacer lo que hacen.

Estos principios teóricos (racionalidad contextualizada, relativismo epistemológico, significación progresiva, normatividad de la práctica social) permiten entender la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, lo que configura el objeto de estudio de esta teoría.

Como mencionamos anteriormente, en este trabajo, queremos entender *qué es la naturaleza topológica*, y el papel de la *relación de proximidad* en la constitución de la topología como saber matemático, en otras palabras, queremos entender *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad* en la matemática (en cierto periodo), antes de configurarse en la definición formal de topología.

La fijación en la *relación de proximidad* y no en el concepto de topología, es por la mirada que tiene la teoría que fundamenta este trabajo, que implica una descentración del objeto, es decir, una mirada más amplia (más allá de la matemática escolar y la matemática formal), es reconocer este concepto como una construcción social y entender su naturaleza, en este sentido es entender su naturaleza social, para ello se requiere encontrar la asociación de la *actividad humana* con *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad* en determinado contexto.

Metodología

Para lograr su objeto de estudio, Cantoral (2013) propone hacer una *problematización* (historización y dialectización) del saber matemático desde una mirada amplia, es decir, descentrándose del objeto. En este caso, asumimos una descentración del concepto de topología al reconocer la *relación de proximidad* como una noción asociada a la *actividad humana* que signifique el concepto.

Historizar y dialectizar son los mecanismos que propone la TSME para entender la naturaleza social del conocimiento matemático, en este trabajo estos mecanismos los ponemos en juego estudiando un episodio específico de la historia de la topología, como concepto matemático, donde reconozcamos un momento determinante de su existencia, que evidencie su *uso*, reconociendo el motivo y el contexto sociocultural que hicieron posible su existencia (*historizar*) para entender *el* o *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad* (*dialectizar*).

Para entender el contexto en el que surge la obra que vamos a analizar, Espinoza (2009) propone un esquema metodológico que se basa en mirar la obra desde tres lentes:

- *Una producción con historia*. Esto es, estudiar al autor en los aspectos: familiar, profesional, académico, para entender la forma de pensar del autor de la obra.
- *Un objeto de difusión.* Entender el motivo de la publicación de la obra, ya sea de difusión didáctica o científica.
- *Parte de una expresión intelectual más global.* Entender la evolución de las ideas del autor en la totalidad de sus obras y su relación con otras.

Esta propuesta metodológica de Espinoza nos permite situarnos en el momento en el que se produjo la obra, es decir, hacemos un cambio de mirada de la actual a la del momento en el de producción de la obra y con esto, entendemos por qué se escribe como se escribe, se hace lo que se hace, se piensa lo que se piensa, es decir, dotar de contexto a la obra y, por lo tanto, a la actividad matemática y a los conocimientos matemáticos en ella. Esto constituye la clave para realizar la historización en el sentido que se plantea en la TSME.

Sin embargo, esta propuesta no nos dice cómo realizar el análisis específico de la obra a estudiar, por lo que requerimos de un método de análisis documental, específicamente de contenido. El método de análisis de contenido está en construcción, sin embargo, hasta el momento lo estamos configurando de la siguiente manera:

1. Hacer una familiarización con la obra, esto es, reconocer el contenido y la estructura discursiva general:
    - Se extrajeron las definiciones, teoremas, lemas, corolarios, y afirmaciones que hace el autor, respetando el orden en el que él las presenta.
    - Se extrajeron los nombres de los matemáticos que cita el autor para identificar de quiénes toma los casos particulares para generalizar.
    - Se extrajeron extractos de la obra relacionadas con el objeto de estudio de esta investigación.
2. Hacer una descripción de las partes de la obra, ya sea que estas partes las determine el autor de la obra o el investigador.
3. Hacer una descripción particular, de las definiciones, teoremas, lemas, corolarios, entre otros, que el investigador considera importantes. Esta descripción se realiza, reconociendo lo que hace el autor.
4. Identificar las relaciones de los teoremas con las definiciones, lemas, corolarios, etc. Estas relaciones nos permitirán reconocer *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad.*
5. Analizar puntualmente, mediante los cuestionamientos *¿cómo hace?, ¿para qué hace?, y ¿por qué hace?*

Análisis de Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel

La obra que se está analizando es la tesis doctoral del matemático Maurice Fréchet, titulada *Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel*. En este extenso presentamos, a manera de avance, el contexto sociocultural de la obra, a través de una síntesis de un análisis socio-histórico.
Contexto Sociocultural

- *Una producción con historia.*

Maurice Fréchet (1878-1973), nació el 10 de septiembre de 1878 en Maligny, al sureste de París. Era el cuarto de seis hijos de la familia de Jacques y Zoé Fréchet, que eran protestantes (Taylor, 1982). Como matemático, Fréchet consagró su trabajo a la Topología Conjuntista en el periodo de 1904 a 1928 (Arboleda, 1982); su tesis doctoral está dentro de este periodo y se puede decir que es uno de los trabajos con los que comienza el programa del Análisis General.

- *Un objeto de difusión.*

La obra que estudiamos en esta investigación es la tesis doctoral de Maurice Fréchet, publicada en 1906 y dirigida por Hadamard. Es decir, se trata de una obra dirigida y validada por la comunidad matemática de la época.

- *Parte de una expresión intelectual más global.* En esta parte tratamos de entender la evolución de las ideas de Maurice Fréchet en la totalidad de sus obras y la relación de estas con otras, cabe mencionar que la única obra de la que revisaremos el original es la tesis doctoral de Fréchet. Sobre el complemento de sus trabajos relacionados con la Topología, nos basaremos en lo que dicen otras investigaciones. Aunado a ello, esta parte nos permitió familiarizarnos con la tesis doctoral, a partir de la cual configurar nuestro método particular de análisis.

A manera de ejemplo, presentamos a continuación el modo en que llevamos a cabo la familiarización de la obra, centrando nuestra atención en cómo se logrará la 'independencia' de la métrica y la generalización.

En su tesis, Fréchet (1906) introduce una estructura, que Arboleda (1982) reconoce como *topológica en un espacio abstracto:*

> … en sus trabajos sobre espacios tan generales como los espacios L y V cuyas topologías están definidas, respectivamente, por la convergencia de sucesiones y por una axiomática generalizada de las vecindades. (Arboleda, 1982, p. 71, 72)

A partir de esta afirmación, nos interesamos en entender tales espacios, a los cuáles Fréchet les llama *clases de elementos* (L) y (V) y las define de la siguiente manera:

Clase de elementos (L)

Dorénavant, nous nous limiterons donc à l'étude des ensembles tirés d'une classe (L) d'éléments de nature quelconque mais satisfaisant aux conditions suivantes : on sait distinguer si deux éléments de la classe (L) sont distincts ou non. De plus, on a pu donner une définition de la limite d'une suite d'éléments de la classe (L). Nous supposons donc qu'étant choisie au hasard une suite infinie d'éléments (distincts ou non) de la classe (L), on puisse dire d'une façon certaine si cette suite $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a ou non une limite A (d'ailleurs unique). Le procédé qui permettra de donner la réponse (autrement dit la définition de la limite) est d'ailleurs absolument quelconque, assujetti seulement à satisfaire aux conditions I et II dont nous avons parlé et qui sont les suivantes :

I) Si chacun des éléments de la suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est identique à un même élément A, la suite a certainement une limite qui est A.

Si une suite infinie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a une limite A, toute suite d'éléments de la première suite pris dans le même ordre : $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}, \ldots$. (les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ iront donc en croissant) a une limite qui est aussi A.(Fréchet, 1906, p. 5, 6)

En ésta se definen las condiciones y características para los elementos de una clase (L), donde vemos que Fréchet la define bajo la convergencia de sucesiones. Una de las primeras condiciones que nos llama la atención es: *Se puede distinguir si dos elementos de la clase* (L) *son distintos o no*; de la que identificamos que el autor pide que los elementos se puedan distinguir, aunque no dice cómo los distingue.

Respecto de la clase de elemento (V), dice:

Considérons une classe (V) d'éléments de nature quelconque, mais tels qu'on sache discerner si deux d'entre eux sont ou non identiques et tels, de plus, qu'à deux quelconques d'entre eux A, B on puisse faire correspondre un nombre $(A, B) = (B, A) \geq 0$ qui jouit des deux propriétés suivantes : 1^0 La condition nécessaire et suffisante pour que (A, B) soit nul est que A et B soient identiques. 2^0 Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε, telle que les inégalités $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ entraînent $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, quels que soient les éléments A, B, C. Autrement dit, il suffit que (A, B) et (B, C) soient petits pour qu'il en soit de même de (A, C). Nous appellerons *voisinage* de A et de B le nombre (A, B). (Fréchet, 1906) (p. 18)

En esta definición de la clase (V), identificamos nuevamente que Fréchet pone como condición general que se puedan *distinguir si dos de entre los elementos son o no idénticos*, aquí podemos ver que a diferencia de la clase (L), le interesa distinguir si son idénticos o no. Además, entendemos que define la *vecindad* como un número mayor que cero correspondiente a dos elementos de la clase (V), pero de alguna manera le pide a este número que sea pequeño.

De las definiciones anteriores, tanto de la clase (L) como de la clase (V) notamos que en ambas trabaja con conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera, esta es una de las principales condiciones que le permiten generalizar y abarcar los casos particulares. Otra condición que pone es que se pueda distinguir entre dos de sus elementos distintos en la clase (L) y que se pueda distinguir entre dos de los elementos si son iguales o no en la clase (V), es en esta condición de distinción que reconocemos que está puesta en juego la noción de *relación de proximidad*, así que nos interesa entender el papel que juega la condición *distinguir entre dos de ellos si son o no idénticos*, en el proceso de generalización que realiza.

Reflexiones finales

A modo de cierre del presente documento, algunas reflexiones que hemos obtenido de la familiarización y descripción de la obra, es que *la relación de proximidad* es la que permite distinguir entre los elementos idénticos. Considerando que aquello que los distingue como idénticos es una característica de ellos, es decir, no son idénticos en su totalidad sino parcialmente. Por otro lado, la naturaleza topológica, en la obra de Fréchet la estamos reconociendo como aquello que permite trabajar con los conceptos y nociones matemáticas que es independiente de la naturaleza de los elementos considerados. No es necesario tener un conjunto de elementos particulares para poder determinar ciertas propiedades, sin embargo, estas propiedades *sí dependen de la relación de proximidad.*

Reconocemos que las condiciones de *distinguir los elementos* y que se consideren *elementos de naturaleza cualquiera* le permiten a Fréchet independizarse de la métrica euclidiana y demostrar algunos teoremas considerado otros elementos y así generalizar.

Referencias bibliográficas

Arboleda, L. C. (1982). Consideraciones metodológicas sobre el aporte de Maurice Frechet a los comienzos de la topología general. *Lecturas Matemáticas*, *3*(1), 69–70.

Arboleda, L. C. (2012). Objetos Matemáticos y Prácticas Constitutivas: La génesis de la Topología de Vecindades. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, *1*(1), 32–44.

Cantoral, R. (2013). Teoría Sociepistemológica de la Matemática Educativa. *Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Espinoza Rámirez, L. (2009). *Una evolución de la Analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. (Tesis de maestría no publicada). Distrito Federal, México, Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Fréchet, M. (1906). *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* (Tesis doctoral no publicada). Paris, Francia, Facultad de Ciencias de Paris, 1-72. Recuperado de https://bit.ly/2IEdQX4

Freixenet Tarrés, J. (1994). La topología general desde sus comienzos hasta Hausdorff. *Historia de la Matemática*, 121-211. Recuperado de https://bit.ly/2wx1KKy

Hinrichsen, D., y Fernández, J. L. (1977). *Topología General*. España: Urmo, S. A. de ediciones.

Pérez, J. (2015). *Topología de Conjuntos, un primer curso*. México: Sociedad Matemática Mexicana.

Taylor, A. E. (1982). A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals. *Archive for History of Exact Sciences*, *27*(3), 233–295. https://doi.org/10.1007/BF00327860