Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 3 / ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE ALUMNOS Y ALUMNAS DE INGENIERÍA. EL CASO DE LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Francisco Javier Martínez Jiménez, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
francisco.martinez@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen

La variable compleja es indispensable en la formación de Ingenieros en Comunicaciones y Electrónica [ICE] del Instituto Politécnico Nacional. Desde esta perspectiva, se pretende caracterizar la construcción del conocimiento matemático de estudiantes de ICE y llevar la significación de la teoría desde su contexto de origen, bajo la idea del logaritmo de un número negativo. La ingeniería didáctica y la Socioepistemología respaldan este trabajo, y permiten rediseñar la situación de aprendizaje original dada por Cantoral y Farfán (2008), y así orquestar la superación de los obstáculos epistemológicos [OE] generados en el debate sobre el log $(-x)$, teniendo un caso de éxito. Se destaca al OE como intrínseco al saber matemático y necesario de confrontar en la construcción de conocimiento, la influencia del discurso Matemático Escolar en la aceptación de un resultado en matemáticas y en la forma de abordar los objetos matemáticos, en donde los estudiantes de ingeniería exhiben una practicidad matemática donde la calculadora es un gran referente.

Palabras clave: ingeniería, socioepistemología, variable compleja

Abstract

The complex variable is essential in the training of engineers in Communication and Electronics at the National Technical College. From this perspective, we seek to characterize the mathematical knowledge construction of students majoring in Communication and Electronics engineering, and to use the meaning of this theory from its context of origin, under the idea of a negative number logarithm. Didactic engineering and the theoretical framework of socio-epistemology support this research work. It allows redesigning the original learning situation proposed by Cantoral y Farfán (2008), thus overcoming the epistemological obstacles (EO) generated in the debate on the $\log(-x)$, having a case of success. This work emphasizes the EO as an inherent problem in mathematical knowledge, and it is necessary to confront it in the construction of knowledge, the influence of school mathematical discourse in the acceptance of a result in mathematics, and in the way to approach mathematical objects where engineering students show a mathematical practicability, with the calculator as a great referent.

Key words: engineering, socio-epistemology, complex variable

Problemática

En algunos escenarios del sistema escolar, no desencadenan verdaderos procesos de socialización en el aula, donde las nociones matemáticas sean discutidas y debatidas a fin de provocar un desarrollo del pensamiento matemático o acciones de entendimiento para comprender y aprender matemáticas dentro y fuera del salón de clases (Cantoral y Farfán, 2008). Dado que las matemáticas no fueron creadas para enseñarlas, se presentan a los estudiantes como segmentadas y desnaturalizadas de sus orígenes a fin de involucrarse en contenidos matemáticos en la escuela, para ser enseñados. Así, la ICE, no considera en la enseñanza de la teoría de variable compleja, el proceso de confrontación sobre el $\log(-x)$ que fue el origen de su existencia, omitiendo en consecuencia, los obstáculos epistemológicos[OE] que tuvieron que confrontar Bernoulli, Leibniz y que sólo superó Euler. Este proceso de intercambio de ideas generó una diversidad de argumentaciones por parte de los interlocutores, pues tuvieron que hacer frente a una pregunta teórica que no marcaba una "ruta de acción lógica" (Cantoral y Farfán, 2008, p. 281).
Este proceso de confrontación con los OE favorece el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante, dándole un papel más activo en su aprendizaje y en su formación académica, por ello la importancia de cimentar dicha teoría desde su génesis en la ICE; cabe mencionar que la teoría de variable compleja se encuentra en al menos cinco, de los nueve semestres en total, del plan de estudios de la carrera de ICE.

La metodología de la ingeniería didáctica en su etapa de análisis preliminar, se conjuga con la problematización del saber (Cantoral, 2013), para dar la mirada preliminar y elementos a considerar en la configuración de significados de la situación de aprendizaje [SA] para la guía sobre la superación de los OE como lo lleva a cabo Euler; inferir sobre las hipótesis y producciones de los estudiantes en la etapa posterior, el análisis a priori. La etapa final es la de análisis a posteriori que para el análisis de datos, retoma las categorías de análisis de Cantoral y Farfán (2008), donde se observa la influencia del discurso matemático escolar [dME] en las producciones de los estudiantes.

Marco teórico

La Teoría Socioepistemológica caracteriza fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desde una mirada que implica elementos socioculturales. Se tiene la premisa de que la matemática es parte de la actividad humana, pues esta tiene un origen que involucra las prácticas de los individuos en sociedad, dependiendo de su cultura. Para estudiar la naturaleza del saber matemático, problematiza mediante un análisis de estudio sistémico. Se fundamenta en 4 componentes (Cantoral, 2013):

*Epistemológica***.** Es el desarrollo e ideas, histórico-conceptual que trae consigo la génesis original del saber matemático. Esta componente responde al cómo, por qué y para quién, el saber matemático, tuvo origen. *Cognitiva.* Es relativa al proceso mental, cuando un sujeto está en la acción de aprender *Didáctica.* Exhibe las características del saber matemático, inmerso en un sistema escolar y estudia la costumbre didáctica. *Sociocultural***.** Guía y permea a las anteriores, reconoce y describe la cultura sobre la que se fundó el saber matemático, y qué fin u aplicación tuvo este; actividades humanas implicadas en la construcción de conocimiento.

Consideramos desde el punto de vista socioepistemológico, que dada la masificación de la educación, se ha procedido a realizar acuerdos al respecto de cómo enseñar la matemática y cómo evaluarla. Estos factores que parecen impositivos a la sociedad escolar, pueden ocasionar limitantes para realizar la democratización de la matemática. Por ello la importancia de la problematización del saber matemático, pues es un método para lograr enfrentar esta problemática, con el fin de propiciar un escenario en donde las prácticas sean las protagonistas para un desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante.

Desarrollo

Se parte del trabajo de Cantoral y Farfán (2008) que diseñan la SA y la aplican a una población de estudiantes de docencia-matemática; trabajo de Soto (1988). Cabe mencionar que el primero, reinterpreta y robustece el segundo trabajo.

A fin de articular la idea de superación del obstáculo epistemológico, aquella que plantea que la superación radica en mostrar cómo un concepto produce otro y cómo se vinculan, respecto de la emergencia de una determinada noción (Bachelard, 2000, p.20), se llevó a cabo la problematización del saber (Cantoral, 2013), orientándose en los hallazgos del estado del arte (Cantoral y Farfán, 2008; Gómez, Pardo y Pastor, 2003; Kleiner; 1988) que apuntan sobre la noción de que el log $(-x)$ es real pues deviene de log $|x|$, y es complejo en tanto se consideren a los números complejos en su explicación. De este modo, en el campo de estudiantes de ingeniería, se destaca en los componentes de la problematización del saber:

Epistemológica: Se explicitan las lógicas de razonamiento de los interlocutores. Bernoulli: Acepta la existencia del $\log(-x)$, sin dar cuenta que es alusivo a log |x| en el dominio real. Leibniz: Niega la existencia del $\log(-x)$ pues aceptarlo implica $\frac{1}{2}\log(-x) = \log\left(\sqrt{-x}\right)$. Euler: Considera a los números complejos en la explicación de $\log(-x)$. *Hipótesis: Las argumentaciones tipo recaerán sobre las ya mencionadas; la lógica de razonamiento de Euler aparecerá si se articula la superación de los obstáculos epistemológicos.*

Cognitiva: La consideración de los complejos para explicar la relación existente con log $(-x)$, es una tarea cognitiva seria. Bernoulli, Leibniz, y la población de estudiantes de docencia-matemática, muestran que no logran ver la relación; el rigor matemático es una dificultad en la superación de los OE (Kleiner, 1988; Soto, 1988). *Hipótesis: Las dificultades no se centrarán en el rigor matemático. Esta característica no se encuentra en la formación del estudiante de ingeniería.*

Didáctica: Por otro lado, Ferrari (2001) argumenta que en el sistema escolar se presenta lo logarítmico con carácter operatorio y como objeto teórico. Sin una transición y estructura entre ellos y dejando de lado su estudio como función. Mientras que los números complejos se presentan en ecuaciones de segundo grado, siendo su desarrollo epistemológico en ecuaciones de tercer grado (Kleiner, 1988). *Hipótesis: La idea de simetría en estudiantes (argumento gráfico de $log(-x)\, para\ x < 0\ y\, log(x)\, para\ x \geq 0$) dada la aceptación de $log(-x) = log\ (x)$, es una posibilidad para dar cuenta de que el $log(-x)$ es real dado $log\,|x|$. No se considerará a los números complejos en la explicación de log (-x) ni se reconocerá a la función $log\,|x|$.*

Rediseño

Los hallazgos de la problematización del saber, permitieron el rediseño de la SA de Cantoral y Farfán (2008), poniéndose énfasis en la persuasión del estudiante sobre la aceptación de $\log(-x) = \log(x)$ y en consecuencia $\log(-1) = \log(1) = 0$; pedir la gráfica resultante que han aceptado, de $\log(-x) = \log(x)$, explicitando la misma para $x < 0$ y $x \geq 0$, y posteriormente explicar la contradicción de $\log(-1) = \pi i = 0$. Esperando que al reconocer la función $\log|x|$, el estudiante identifique $\log(-x)$ y concluya que $\log(-1) = 0$ en el campo real, buscando otro camino para explicar $\log(-1) = \pi i$, considerando entonces a los números complejos y la necesidad de delimitar teorías, dando la introducción a la variable compleja, considerándola distinta a la real, superando los obstáculos epistemológicos.

Análisis a posteriori

Se retoman como base las categorías de análisis de Cantoral y Farfán (2008) para la interpretación y análisis de datos desde el enfoque Socioepistemológico. Después, se muestra un fragmento de los datos que fundamentan la correspondiente categoría.
Nomenclatura de los datos de campo: H-> hombres / M->Mujeres / E-> investigador.

Preguntas no escolares, cuando el tema no se ha visto en los libros ni en clases (Cantoral y Farfán, 2008)**.**

Hace referencia a que los alumnos y alumnas, niegan la existencia del $\log(-x)$, porque no está institucionalizado. Los estudiantes requieren del respaldo del dME para poder adentrarse en una reflexión nueva. Sin embargo, a diferencia de los resultados en Cantoral y Farfán (2008) los estudiantes de ingeniería tienden a reconocer conceptualmente al $\log(-x)$, es decir haciendo alusión al $\log|x|$.

E: ¿A qué es igual el logaritmo de un número negativo… ¿Cuál es la necesidad de considerar sólo a los números positivos?
M1: Simplemente metiendo el dato a la calculadora te marca error por lo que se deduce que no está definido, o en su defecto no existe…
H6: No existen los logaritmos negativos… siempre los logaritmos positivos y de hecho cuando lo meto a la calculadora me marca error.
E: ¿Por qué meter el dato a la calculadora?
M1: Para comprobar si existía… porque es más exacto el resultado… porque no se equivoca…
H6: Pues es la que hace todo prácticamente, casi siempre te apoyas a la calculadora… cuando haces el examen pues agarras la calculadora; el profesor está dando clase, también agarras la calculadora, pues costumbre.

Extensión de las operaciones, cuando la algoritmia permite refutar el enunciado (Cantoral y Farfán, 2008)**.**

Una vez que los estudiantes vislumbran una posibilidad de reflexión sobre la existencia del $\log(-x)$, son limitados por la algoritmia. Lo que hace que vuelvan al carácter operatorio y mecánico, sin la heurística de la que habla Soto (1988), que tendería a desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. El dME es visible en lo que se dice y también en lo que se hace.

E: Puesto que la función logaritmo se caracteriza principalmente por las propiedades siguientes: $ln(xy) = ln(y) + ln(x)$ y $ln(x\text{^}m\ ) = mln(x)$. ¿Tales igualdades seguirán siendo válidas al considerar a x e y negativos? Es decir, al aplicar el logaritmo a números negativos: $ln(-x)(-y) = ln(-y) + ln(-x)$.
M4: Como que ignoré el signo, ves que por leyes de signos dos negativos dan un positivo, entonces a eso me fui, de alguna manera… si porque realmente desconozco o desconocía si esto daba, a fin de cuentas, lo mismo, y solo me fui en signos …
H3: Teniendo en cuenta que los números negativos no existen en los logaritmos las igualdades ya no son válidas o no aplican.
H7: Sí el $\log(x)$ es igual al $\log(-x)$ y el $\log(-y)$ y es igual al $\log(y)$, entonces esto vendría siendo lo mismo….
Se observa en algunos estudiantes de ingeniería, la aceptación de $\log(-x)$, como H7.

Una deducción plausible y sensibilidad a la contradicción: cuando exploración produce divergencias fruto de la deducción (Cantoral y Farfán, 2008).

El dME permite reconocer como legítimo, elementos teóricos derivados de una enseñanza en el dominio real que no advierte de la existencia del logaritmo de un número negativo. Es así como los estudiantes no logran hacer una crítica al discurso argumentativo, no lo cuestionan y simplemente lo aceptan, si bien este era el objetivo, no pudieron inferir que el discurso argumentativo en la SA era el $\log(-x)$ debido al $\log|x|$.
M5: $\log(-1) = \log(1)$
$\log(1) = 0 \therefore \log(-1) = 0$ (lo acepta)
H6: $\log(-1) = \log(1) = 0$ (lo acepta)
E: Podemos llegar a la conclusión de que $\log(-\mathrm{x}) = \log(\mathrm{x})$, ¿lo aceptas?
H6: Pues si lo acepto ... ya mostró varios argumentos… que es verdadero …

Las primeras muestras de adhesión y la aceptación del contrato (Cantoral y Farfán, 2008).

El alumnado logra negociar y entrar a un nuevo contrato didáctico, dado la resolución de la SA, en este sentido, presentan cierta "resistencia" en diferentes puntos, defendían su postura porque, era lo que "ellos sabían", no argumentaban una explicación matemáticamente coherente, sin embargo, no se arraigan a lo que argumentaban y se observa en ellos, el cambio de paradigma.
E: $(-x)^2 = (x)^2$ => $\log(-x)^2 = \log(x)^2$ => $2\log(-x) = 2\log(x) \therefore \log(-x) = \log(x)$
H2: $(-x)^2 = (x)^2; 4(-x) = 4(x)$; Estoy en duda porque ya avanzando a este nivel, pues digo como que este concepto ya está viejo…, al presentarme usted esto, como que me hizo cambiar […] mi criterio va cambiando… esto no es lo que creí en la preparatoria, es totalmente diferente… si me entró como que un cambio radical en mi criterio sobre este tema de los números negativos…
M2: $(-x)^2 = (x)^2$ …solamente aquí igual si se eleva al cuadrado un número negativo, queda positivo, ¿no?
E: Se le explica que se utilizaron las propiedades de los logaritmos positivos para calcular el logaritmo negativo, el dos pasa ahora como coeficiente, posteriormente acepta $\log(-x) = \log(x)$.

De la aceptación escolar al argumento matemático: sobre la contradicción en matemáticas (Cantoral y Farfán, 2008).

Dado que los estudiantes cambiaban de paradigma y aceptaban el log $(-x)$ se buscaba que explicaran la contradicción de la SA, cuando $\log(-1) = 0$ y el $\log(-1) = \pi i$. Los estudiantes logran explicar la contradicción.
E: Como explica el resultado al que habíamos llegado $\ln(-1) = 0$ y $\ln(-1) = \pi i$. ¿Constituye una contradicción?
M4: Si, ¿no? ... podría ser, ¿no?... ajá… un ejemplo, esto aplica para los reales (log $(-1) = 0$) y esto para los imaginarios (log $(-1) = \pi$i), bueno, para otro campo… podría decir que a lo mejor descubriste una identidad…
E: ¿entonces… si yo te digo… a que es igual el log (-1)?… *M4:* …depende el campo, los reales o los complejos… si tú me dijeras en tal campo que no sea los reales seria ah pues πi eh, si tú me dices los reales, ah!, es cero…
H8: Concluí que sí hay una contradicción porque no puede haber dos resultados con el mismo procedimiento, podemos tener muchos procedimientos pero siempre obtener el mismo resultado sobre todo en matemáticas, fue ahí donde dije … tal vez alguno de estos dos argumentos, la primera parte o la segunda es incorrecta, porque no pueden dar dos resultados… y creí que como venía la i, dije, ha bueno, tal vez en el plano de los complejos, este resultado de $log\ (-1)$ sea correcto… en el plano de los reales da un valor y en el plano de los complejos da otro… dije bueno tal vez pueda ser una transformación … o que en un plano de un valor y en otro, de otro…

El reflejo de los conocimientos culturalmente establecidos: la practicidad de la ingeniería y la demostración matemática.

La población de ingenieros no logran dar cuenta que en el campo real es alusivo a log $|x|$, sí delimitan teorías. Por otro lado, la *practicidad* del alumnado de ingenieros es una característica dada por el dME, pues la construcción de conocimiento se basa en la aplicabilidad del uso de la calculadora y que no se depende del rigor matemático, aunado al discurso planteado en la SA que se observó, no tenían mayor conflicto en cambiar de paradigma.
E: *¿Cuál es la necesidad de considerar siempre sólo a los números positivos?*
H4: Se hace más fácil el manejo de los números… bueno de los logaritmos, que si fueran negativos…
M2: Para no tener ninguna dificultad al momento de hacer las operaciones.
M5: Que es más fácil responder problemas y graficar, muchas veces me he confundido al momento de usar números negativos y siento que usando números positivos la operación es más exacta y rápida.

Conclusiones

Con el rediseño de la situación de aprendizaje, se pudo explorar y desarrollar el pensamiento matemático en ingenieros e ingenieras en formación, por la diversidad y generación de argumentaciones sobre él $\log(-x)$; y que son equiparables a las que expresaban Leibniz, Bernoulli y Euler. Destacando al obstáculo epistemológico como intrínseco al saber matemático y necesario en la construcción del conocimiento. Así también, cabe mencionar la adaptabilidad de los OE en un campo de estudio distinto al de docentes matemáticos. Ahora bien, la articulación de las nociones para la superación de los OE tuvo un caso de respuesta positiva, delimitando teorías y reconociendo a $\log|x|$. En los otros casos se cree que el dME inhibe la reflexión sobre la función log|x|, clave para la superación, debido a su carente estudio en el sistema escolar. Los números complejos fueron considerados pues fue tendencia en los estudiantes la delimitaron teorías, explicando la contradicción generada del $\log(-1)$.

Los estudiantes de ingeniería aceptaron el reto de explorar la SA a diferencia de la población de Soto (1988), que no culminaron en su totalidad la SA. En ese sentido, el dME en los estudiantes de ingeniería tiene por objetivo emplear a las matemáticas como un fin, para la resolución de problemas; siendo evidente que facilitar cálculos para ellos, es prioritario; fenómeno que se ha denominado como *practicidad* matemática. Sin embargo, la ausencia de rigor matemático es un aporte para no reconocer a log|x|; cabe mencionar que en la población de Soto (1988), es tendencia observar que las argumentaciones contra el discurso argumentativo de la SA hacen alusión al log|x|.

Desde la Teoría Socioepistemológica, Cantoral y Farfán (2008), permite concluir y confirmar que un resultado en matemáticas no depende solo de la lógica matemática; depende también de interacciones sociales entre alumno-profesor-libro de texto, pues esta relación brinda la formación académica del estudiante dándole un marco de referencia, de modo que un tema no institucionalizado por el dME es visto con recelo e incertidumbre por los estudiantes.
Se confirma para el caso de los estudiantes de ingeniería que el dME al cual están inmersos, no advierte de la existencia de logaritmos de números negativos en otro campo de números (complejo).

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Ciudad de México: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2008). Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Un Reporte Iberoamericano*, (pp. 243-284), México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN.

Gómez, B., Pardo, T y Pastor, C. (2003). *El caso de log (-1). XI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas (XI JAEM)*. Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias. Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa, 765-771.

Kleiner, I (1988). Thinking the unthinkable: The story of complex number (with a moral). *Mathematics Teacher*, 81(7) 583–592.

Soto, M. (1988). *Una experiencia de redescubrimiento en el aula: acerca de los logaritmos de números negativos y los orígenes de la variable compleja*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.