VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

EL CASO DE LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS. LA PRACTICIDAD DE LA INGENIERÍA Y EL RIGOR MATEMÁTICO

Francisco Javier Martínez Jiménez, Rosa María Farfán Márquez
Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
francisco.martinez@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen
Se enfatiza una reflexión de una investigación en proceso, que pretende caracterizar la construcción de conocimiento matemático de estudiantes de ingeniería, cuando se les confronta en una situación de aprendizaje [SA] a los obstáculos epistemológicos [OE] derivados de la extensión del significado del logaritmo de un número negativo, que tuviera por resultado el origen de la variable compleja. Cuestionamiento entre Euler, Leibniz y Bernoulli, durante el siglo XVIII. Dado que la misma SA se aplicó en 1988, a docentes-matemáticos en formación, las producciones de ambos campos de estudio se contrastan, observándose sus particularidades. Se concluye que la practicidad matemática caracteriza las argumentaciones de los estudiantes de ingeniería y el rigor matemático, las producciones de los docentes-matemáticos en formación.

Palabras clave: ingeniería, socioepistemología, variable compleja

Abstract
Emphasis is placed in a reflection of an ongoing research that is intended to characterize the construction of engineering students' mathematical knowledge when they are confronted, in a learning situation [LS], to the epistemological obstacles[EO] resulting from the extension of the meaning of a negative number logarithm that would have as a product the origin of the complex variable. It was a question between Euler, Leibniz y Bernoulli, during the XVIII century. As the same learning situation was applied to prospective mathematics teachers during their education process in 1998, the productions from both areas of study are contrasted, and their special features are observed. We conclude that mathematical practicability is characterized by engineering students' arguments and the mathematical rigor, the productions of prospective mathematics teachers.

Key words: engineering, socio-epistemology, complex variable

Introducción

Este trabajo es una investigación en proceso que pretende aportar elementos para caracterizar la construcción de conocimiento matemático de estudiantes de ingeniería, cuando se les confronta a una situación de aprendizaje [SA] que contiene una serie de ideas clave, llamados obstáculos epistemológicos [OE], intrínsecos al saber matemático desde el marco teórico empleado, derivadas de un debate sobre la extensión del significado del logaritmo de un número negativo y que tuviera por origen a la teoría de variable compleja, debate que tuvo lugar en el siglo XVIII, con Euler, Leibniz y Bernoulli. Se contrastarán las diferencias y similitudes que dos campos de estudio presentan en sus argumentaciones, al confrontar los mismos OE inmersos en la SA.

La población con la que se trabaja son estudiantes de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica [ICE] del Instituto Politécnico Nacional, donde la teoría de variable compleja es una materia fundamental e indispensable pues se relaciona con la solución de problemas a fines a la ingeniería, por ejemplo, para la reducción de ecuaciones integrodiferenciales en análisis de circuitos. La variable compleja se encuentra de manera directa e indirecta en al menos cinco de los nueve semestres de la carrera, hecho de interés para observar y explorar la forma de construcción del conocimiento sobre el $\log(-x)$ en los estudiantes de ingeniería.

Se pretende que este acercamiento didáctico signifique la concepción de la teoría de variable compleja desde el contexto epistemológico, siendo una introducción al curso oficial, dado en tercer semestre de la carrera; favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Desarrollo

La base de esta investigación se sustenta en el trabajo de Cantoral y Farfán (2008), en donde a partir de un análisis epistemológico diseñan la SA. Esta, se aplicó por primera vez en 1988, en el trabajo de Soto (1988) en una población de estudiantes universitarios que serían docentes en matemáticas (Docencia-Matemática), en el estado de San Luis Potosí, México. Y se aplica por segunda vez a principios de 2017, en estudiantes de ICE en el Instituto Politécnico Nacional en la Ciudad de México, México. Ambas poblaciones en formación, y sin haber cursado variable compleja al momento de resolver la SA.

La SA se ha reorganizado, respetando la esencia de origen y ha quedado conformada en tres partes que constan de introducción, primera parte y segunda parte.

> En la introducción se recoge una primera reflexión en torno a observar el conocimiento previo de los estudiantes, pues se cuestiona, a qué sería igual el $\log(-x)$ y cuál es la necesidad de considerar sólo los logaritmos de números positivos.
>
> En la primera parte, se muestra un discurso argumentativo a manera de persuadir sobre la existencia de $\log(-x)$, y aceptar en consecuencia que $\log(-x) = \log(x)$.
> Estos argumentos a favor de $\log(-x)$ son algebraicos, analíticos y gráficos y hacen alusión al campo real mediante la idea del $\log|x|$.
>
> La segunda parte crea una contradicción, pues mediante la fórmula dada en el siglo XVIII por Bernoulli (Citado en Cantoral y Farfán, 2008) para el cálculo del sector circular de radio a, se evalúa $\theta = \pi/2$; teniéndose que $\log(-1) = \pi i$, pero posteriormente se habría calculado $\log(-1) = 0$.

Contrastación

De acuerdo con las producciones de los estudiantes del trabajo de Soto (1988), se observa que una parte de ellos muestran una sistemática negativa a aceptar el $\log(-x)$, pese a que en la primera parte de la SA se les argumentó la posibilidad de su existencia.
La otra parte de esta población, que dudaron de la existencia de $\log(-x)$, se les permitió resolver la segunda parte de la situación, y llegaban a una conclusión similar; la negativa de aceptación. Argumentaban que de ser posible la existencia del $\log(-x)$ y explicar que $\log(-1) = 0$ y que $\log(-1) = \pi i$, tendrían que reconstruir la teoría actual que ellos conocían, pues no concebían un número al cual se eleve a una base y de como resultado un número negativo, de acuerdo a la definición escolar de logaritmo: $log_a b = N$, $a^N = b$. Pensaban en reconstruir la teoría de variable real.

En este sentido, Cantoral y Farfán (2008) concluyen que esta segunda parte de los estudiantes no son sensibles a la contradicción que genera $\log(-1)$, pues se quedan con lo institucionalizado, aquel referente generado en sus cursos de formación académica que niega la existencia de $\log(-x)$ e impide explicar tal contradicción; la serie de elementos teóricos brindados por el discurso matemático escolar [dME], influye en el arraigo de los estudiantes a no explorar sobre $\log(-1)$. Soto (1988) realiza otro aporte que evidencia al dME, pues argumenta que este arraigo se debe a que los cursos de formación de los estudiantes en general, está cargado por demostraciones matemáticas. Este fenómeno, por ejemplo, los hace no concluir en su totalidad, en su caso, la situación de aprendizaje, resistiéndose a explorar construcciones nuevas de conocimiento. Cabe mencionar que el trabajo de Cantoral y Farfán (2008) realiza una reinterpretación de análisis del trabajo de Soto (1988).

De acuerdo con la noción teórica de la Socioepistemología, el dME es el que establece e impone significados por sobre otros; en general sobre qué es matemática, cómo enseñarla, interpretarla y evaluarla. Mientras que se entenderá a la demostración matemática como aquella interpretada en Larios (2003), como rigor matemático; es decir, una serie de deducciones lógicas que hacen posible la derivación de un resultado matemático, pues la demostración matemática depende de su contexto y uso epistemológico.

Esta idea de rigor matemático, muy presente en los estudiantes de docencia-matemática, les permitió darse cuenta de que en la primera parte se hacía alusión al $\log|x|$. Realizaron críticas y discusión de ideas al discurso argumentativo, encontrando "inconsistencias", pero más que ello, eran realmente observaciones relativas, a simplemente dar cuenta que se hacía alusión del $\log(-x)$ mediante la idea de simetría que permite el $\log|x|$.

Ahora bien, para la aplicación de la SA a estudiantes de ingeniería, se hace uso de los constructos de la Socioepistemología, de las dimensiones del saber descritas en Cantoral (2013) a saber, la componente epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural, analizadas en el análisis preliminar de la metodología usada, la ingeniería didáctica. A fin de que dichos componentes orienten sobre explicitar las lógicas de razonamiento de Euler, Leibniz y Bernoulli, y articular la forma de superación de los obstáculos epistemológicos como lo hizo Euler, por ello también, la reorganización de la SA.

A continuación, se enfatiza únicamente la componente epistemológica:

Bernoulli: Acepta el logaritmo de un número negativo, haciendo alusión al campo real pues se refiere al log $|x|$.
Leibniz: Niega sistemáticamente la existencia del log $(-x)$. Pues eso implicaría aceptar $\frac{1}{2}$ log $(-x)$ = log $(\sqrt{-x})$.
Euler: Integra ambos argumentos, expresando que el log $(-x)$ no es real, sino complejo. Para ello utiliza al número complejo.

Derivado de este análisis y la problematización del saber, se observan dos nociones importantes a considerar, por un lado, integrar a los números complejos en log $(-x)$ para dar pie a una nueva teoría y por otro, dar cuenta que en el dominio real el log $(-x)$ es alusivo a log$|x|$(lo que enfatizaban los estudiantes docentes-matemáticos). Considerando estos elementos se concuerda con la postura teórica de Bachelard, pues menciona que la superación radica en mostrar cómo un concepto produce otro y cómo se vincula con otro, respecto de la emergencia de una determinada noción (Bachelard, 2000).

Con las ideas antes mencionadas, el diseño y análisis a priori, fue el que permitió la reorganización de la SA al campo de estudiantes de ingeniería, conservando su esencia y llevando a la articulación de la misma para orquestar la superación de los obstáculos epistemológicos, teniendo una respuesta positiva.

Sin embargo, es en la etapa de confrontación del análisis a priori vs a posteriori, que se destaca las características de las argumentaciones en la población de estudiantes de ingeniería, que se pueden contrastar con aquellas exhibidas en la población del estudio de Soto (1988).

En estudiantes de ingeniería se muestra su disposición a explorar una ruta de incertidumbre que enmarca el $\log(-x)$, hecho que significó la culminación total de la situación de aprendizaje, estando en condiciones de explicar la contradicción sobre el $\log(-1) = 0 = \pi i$. Esto se debe a que no es esencial para ellos, usar demostraciones matemáticas cargadas de rigor, caso contrario a los docentes-matemáticos en formación que en todo momento pretenden refutar cada pregunta planteada de la SA, puesto que su intención es abstraer para todos los casos, el discurso argumentativo.

Los estudiantes de ingeniería muestran un arraigo a aceptar resultados que sean entendibles o bien, explicables para ellos, aunque estos fuesen incluso contradictorios, por ejemplo, tras aceptar el $\log(-x) = \log(x)$, expresaban estar aún en duda sobre la existencia de $\log(-x)$, sin embargo determinaban a puño y letra que, $\log(-1) = \log(1) = 0$. Los estudiantes docentes-matemáticos en una parte de su población, que fue representativa, no llegaron siquiera la parte de la SA que planteaba a $\log(-1) = 0 = \pi i$, puesto que si tenían duda no continuaban, sino que ahondaban y profundizaban sobre su base de rigor. Con lo anterior, se interpreta que los estudiantes de ingeniería, cambian de paradigma. Es así como se postran sensibles a la contradicción (Cantoral y Farfán, 2008) pues además de aceptar $\log(-x) = \log(x)$ es tendencia en ellos y ellas, dar cuenta que $\log(-1) = 0$ es un resultado debido al campo real y $\log(-1) = \pi i$, se debe al campo complejo, explicando así la contradicción. Sin embargo, quizá, esa falta de rigor los hace no argumentar, ni siquiera intentar debatir sobre el discurso argumentativo planteado en la primera parte, pues lo aceptan sin mayor restricción y sin indicios de dar cuenta que se habla del log $|x|$.

Como una posible característica del dME en la ICE, se observa que las producciones de los futuros ingenieros, fue tendiente a un discurso sobre cálculos y operaciones, pues cabe mencionar que, en la introducción de la SA, justifican sus respuestas basándose en la calculadora, mostrándose ésta como un referente equiparable al libro de texto. Decían que, log $(-\mathrm{x})$ no existía porque no se podía determinar en la calculadora.

Conclusiones

En ambas poblaciones de estudio, el dME es el que determina el trato hacia los objetos matemáticos e inhibe la superación de obstáculos epistemológicos como sucedió en el siglo XVIII con Euler. Sin embargo la ruta establecida y articulada para la superación de los mismos es válida, pues se contempla un caso donde un estudiante reconoció a $\log(-x)$ como parte de $\log|x|$ y también logro explicar $\log(-1) = \pi i$ y $\log(-1) = 0$, delimitando teorías respectivamente, variable compleja y variable real.

Se cree que la falta de rigor en el trato de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes de ingeniería, aunado a la carente significación y construcción de la función logaritmo en el sistema escolar (Ferrari, 2001) no los hace dar cuenta de la función $\log|x|$. Por otro lado, el rigor matemático presente en los estudiantes docentes-matemáticos les impide llegar a la contradicción, y explicar que $\log(-1) = \pi i$ y $\log(-1) = 0$. En ambas poblaciones de estudio la tendencia es dar cuenta sólo de una noción, de las dos a considerar para la emergencia de la variable compleja, de acuerdo con la postura de Bachelard. Los estudiantes de ingeniería delimitan teorías integrando a $\log(-1)$ los números complejos, mientras que los estudiantes docentes-matemáticos, observan que $\log|x|$ permite $\log(-x)$ en variable real.

La población de futuros ingenieros e ingenieras exhibe una *practicidad* matemática, pues acepta el reto de explorar la SA, mostrar disposición para explicar los resultados que iban obteniendo, evidenciando cambios de paradigmas. Mostrando un arraigo que radica en que buscan una facilidad para operar conceptos matemáticos, basándose en la calculadora para establecer un resultado válido concluyendo que, si un resultado es viable entonces puede ser calculable. Es probable que los cursos de formación académica, en la carrera de ICE hasta tercer semestre haga uso de la matemática como una herramienta en el cálculo de operaciones, para la resolución de problemas afines en calculadora.

En ambos casos, los estudiantes de docencia-matemática e ingeniería, recurren a su marco de referencia permeado en su dME característico, evidenciando diferentes racionalidades, así como dos tipos de interpretaciones sobre la construcción de conocimiento sobre el $\log(-x)$. Aspectos que la teoría socioepistemológica reconoce respectivamente como racionalidad contextualizada y relativismo epistemológico, constructos mediante los cuales cada población de estudio da la siguiente introducción a la variable compleja:

> Los estudiantes de ingeniería desde la practicidad en el seno de la comprensión y limitándose a lo conceptual, sin expresar ideas de rigor dando su introducción desde la delimitación de teorías y siendo sensibles a las contradicciones. Concluyendo que el $\log(-x)$ tiene dos concepciones dependiendo el campo, real o complejo.
>
> Los docentes-matemáticos en formación desde su rigor, en términos de símbolos y lenguaje matemático basándose en ello para realizar las inferencias de que el discurso argumentativo en la SA es alusivo a $\log|x|$. Concluyendo que el $\log(-x)$ existiría si se cambia la teoría real, o la que conocían.

Las lógicas de razonamiento de Leibniz bien pueden representar a los docentes matemáticos en formación, pues no aceptan log $(-x)$ puesto que no lo pueden demostrar. En tanto que los estudiantes de ingeniería aceptan a log $(-x)$ haciendo alusión a la idea de simetría que plantea el log $|x|$, como Bernoulli lo hacía.

Ambas introducciones, dan luz a la teoría de variable compleja, pero sin superar a los obstáculos epistemológicos, no fue suficiente la reorganización de la SA para la superación de los mismos, lo que sensibiliza en ambos casos la idea de "analizar las cuestiones de orden social y cultural en el diseño de aproximaciones sistémicas para el aprendizaje de las matemáticas" (Cantoral y Farfán, 2008, p. 282). Pues un resultado en matemáticas no depende sólo de la lógica matemática.

Se concluye que, el obstáculo epistemológico es un elemento intrínseco y necesario de confrontar, para la construcción del conocimiento matemático acerca de logaritmos de números negativos, ya que los argumentos para responder a esta interrogante tienen una extrema similitud en tres épocas, geografías y distintos campos de estudio, involucrando a las poblaciones antes mencionadas con los matemáticos del siglo XVIII.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Ciudad de México: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2008). Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Un Reporte Iberoamericano*, (pp. 243-284), México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN.

Larios, V. (2003). Si no demuestro... ¿enseño Matemática?. *Revista Educación Matemática*, 15(2) 163-178.

Soto, M. (1988). *Una experiencia de redescubrimiento en el aula: acerca de los logaritmos de números negativos y los orígenes de la variable compleja.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.