CAUSAS DE LOS ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Maitane Pérez, José Manuel Diego, Irene Polo y María José González

En este trabajo se propone una clasificación descriptiva de los errores que cometen los estudiantes de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) al resolver ecuaciones lineales, así como de las causas que los originan. La clasificación de errores se realiza desde el punto de vista del contenido matemático y se obtiene a partir de un cuestionario de ecuaciones lineales que realizan 266 estudiantes de 13 a 16 años. Para identificar las causas que originan los errores se llevan a cabo entrevistas cognitivas. Los resultados completan y reformulan otras clasificaciones encontradas en la literatura y profundizan en la identificación de las causas del error.

Términos clave: Causas del error; Ecuación lineal; Error

Causes of errors in the resolution of simple linear equations

In this paper we categorise students' errors when solving linear equations and we identify the causes for those errors. The research has involved 266 13-16 years old high school students. Data from a questionnaire on linear equations solving and cognitive interviews are reported and analysed. Results complete and reformulate other error categorizations found in the literature and deepen in the identification of the origin of these errors.

Keywords: Causes of error; Error; Simple linear equation

Existe un gran interés por parte de investigadores y educadores por estudiar las dificultades que los estudiantes de secundaria tienen al aprender nociones algebraicas (p.e., Esquinas, 2009; Millán y Molina, 2016; Palarea, 1998; Socas, 2007, 2011). Estas dificultades desembocan frecuentemente en actitudes negativas frente a las Matemáticas, dando lugar, en muchos casos, al fracaso escolar en esta materia (Booth, 1998; Kaput, 2000; Kieran, 1989). En consecuencia, hay muchos trabajos que se centran en identificar errores algebraicos a edades tempranas (p.e., Enfedaque, 1990; Rico, 1995; Socas, 1997; Vaiyavutjamai y Clements, 2006).

Las ecuaciones lineales con una incógnita son uno de los contenidos de mayor interés en el ámbito algebraico. A través de este contenido tiene lugar la transición de

Pérez, M., Diego, J. M., Polo, I. y González, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA 13*(2), 84-103.

la aritmética al álgebra y se asientan los primeros conocimientos algebraicos (Filloy y Rojano, 1989; Molina, 2009; Pirie y Martin, 1997). Además, las ecuaciones constituyen un pilar sobre el que sustentar distintos conceptos matemáticos a lo largo de la etapa secundaria obligatoria.

Como indica Socas (2011), la mayor parte de los trabajos que tratan de clasificar errores en la resolución de ecuaciones y buscar las causas que los producen fueron publicados en los años 80 (p.e., Kieran, 1980). A partir de entonces, los trabajos se han centrado en enfoques de carácter más global, que tratan de captar las dificultades de los estudiantes en todos los aspectos que conlleva el aprendizaje del lenguaje algebraico (p.e., Issakova, 2006). Estos estudios analizan las dificultades de los estudiantes para simbolizar, generalizar o razonar algebraicamente (Molina, 2009). Las investigaciones centradas en procesos algorítmicos concretos, como la resolución de ecuaciones lineales, ha disminuido notablemente. Sin embargo, consideramos necesario seguir reflexionando sobre las causas de los errores en el aprendizaje de dichos procesos, pues esta información complementa a la anterior en la búsqueda de ideas que ayuden a superar los abundantes errores que siguen encontrándose en el día a día de la enseñanza del álgebra en secundaria.

La reflexión sobre las causas de los errores de los estudiantes tiene una gran complejidad. Rico (1995) ya destacaba que, aunque los errores en Matemáticas han sido categorizados con profusión mediante distintos criterios, no existe un desarrollo teórico sistemático y completo que permita interpretar sus causas. La gran mayoría de las investigaciones es de tipo descriptivo, parte de la observación empírica de los errores y los organiza en categorías de distinta naturaleza. Abrate, Pochulu y Vargas (2006) reconocen, no obstante, el interés de los métodos descriptivos para identificar los errores, pero argumentan la necesidad de complementar estos métodos con una indagación teóricamente fundamentada que permita vislumbrar los posibles orígenes de los errores.

En el caso concreto de las ecuaciones lineales, existen múltiples trabajos que analizan los errores en procesos algorítmicos de resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. La mayoría de estos trabajos son de tipo descriptivo y proporcionan listados de errores agrupados según distintos criterios. Por ejemplo, la extensa clasificación realizada por Hall (2002) clasifica los errores según el grado de dificultad de la ecuación propuesta. Otros trabajos buscan el origen de ciertos errores asociados a procesos algebraicos generales. Por ejemplo, Ruano, Socas y Palarea. (2008) o Egodawatte (2011) organizan los errores a partir de ámbitos conceptuales en álgebra, los relacionan con tipos de tareas algebraicas e identifican las causas de los errores, pero se centran en nociones algebraicas más avanzadas o en procesos generales como la sustitución formal, la generalización o la modelización. Estos procesos resultan excesivamente generales a la hora de detallar lo que ocurre ante los errores concretos de los estudiantes al resolver ecuaciones lineales. El estudio de Abrate et al. (2006) clasifica los errores y busca causas, pero no llega a verificarlas tomando como referencia el conocimiento del estudiante, abarcando un extenso abanico de conceptos matemáticos sin llegar a profundizar en el caso de las ecuaciones lineales. En los trabajos que buscan identificar las causas de los errores, ocurre que distintos autores mencionan causas distintas para un mismo error, aun cuando emplean criterios de interpretación similares. Por ejemplo, Abrate et al. (2006) conjeturan que cuando los estudiantes toman los términos que multiplican a la variable y los trasponen al otro miembro restando ($-3x + 5 = 17 \rightarrow x = 17 - 5 + 3$), el origen de este error es la falta de reconocimiento del –3 como un factor de la expresión. Sin embargo, Hall (2002) atribuye este mismo error a que los estudiantes no diferencian el inverso aditivo del inverso multiplicativo. Observamos también, en estos trabajos, que algunos de ellos hablan de las causas de los errores, pero en realidad lo que hacen es describir los errores con cierto detalle y posiblemente establecer alguna conjetura, pero no llegan a indagar con profundidad en el conocimiento de los estudiantes para llegar a identificar los motivos que les conducen a incurrir en dichos errores.

En definitiva, consideramos necesario disponer de una clasificación descriptiva lo más completa posible de los errores relacionados con la resolución de ecuaciones lineales y complementarla con una indagación, teóricamente fundamentada, que permita conocer cuáles son las causas que llevan a los estudiantes a cometer los errores identificados.

Para llevar a cabo este propósito, tomamos dos tipos de referentes que consideramos complementarios. Por una parte, adoptamos el marco teórico descrito en Socas (1997), y desarrollado en trabajos posteriores por este investigador y sus colaboradores, para explicar las causas de los errores algebraicos, según el cual el origen de los errores puede estar en obstáculos (epistemológicos, didácticos o cognitivos), en la ausencia de sentido o en cuestiones afectivas y emocionales. Por otra parte, a partir de una revisión de literatura de investigación, tomamos en cuenta criterios de clasificación de errores de los estudiantes al resolver ecuaciones lineales con una incógnita basados en el contenido matemático. Así, identificamos una primera clasificación, que posteriormente será refinada, que considera, por un lado, los errores asociados a contenidos de aritmética previos a la introducción de las ecuaciones y, por otro lado, los errores asociados a la propia noción de ecuación. Esta clasificación descriptiva sirve de base para elaborar un cuestionario que es resuelto por 266 estudiantes de 13 a 16 años. Los resultados del cuestionario se utilizan para completar y refinar la clasificación de partida. A partir de ellos, se indaga en las causas de dichos errores mediante entrevistas cognitivas. Obtenemos así una completa clasificación descriptiva de los errores según criterios basados en el contenido matemático, y acompañamos cada tipo de error de una reflexión detallada sobre las causas que lo han originado según el marco de Socas (1997).

Por simplicidad en el lenguaje, en adelante se utilizará el término ecuación para referirse a las ecuaciones lineales con una incógnita.

Marco Conceptual

Los referentes que utilizamos en este trabajo se organizan en torno a dos ámbitos. En primer lugar, consideramos la conceptualización del error y sus causas descrita en Socas (1997). En segundo lugar, tomamos en cuenta los criterios de clasificación de errores que realizan una descripción de los mismos desde el punto de vista del contenido matemático. Detallamos estos dos referentes a continuación.

Conceptualización del error y sus causas

Adoptando el marco de Socas (1997), consideramos que un error es la manifestación visible de una dificultad de aprendizaje, es decir, de una circunstancia que impide o entorpece lograr los objetivos de aprendizaje pretendidos en relación con un contenido matemático. Este marco reconoce las numerosas variables que intervienen en un proceso de aprendizaje y la consiguiente complejidad para identificar las causas de los errores, proponiéndose estructurar esta complejidad. Así, se describen tres grandes ejes no disjuntos para organizar los errores que cometen los estudiantes en relación con tres orígenes distintos: los obstáculos (epistemológico, cognitivo y didáctico), la ausencia de sentido, y las cuestiones afectivas y emocionales. Teniendo en cuenta que nuestro objeto de estudio en este trabajo es el estudiante a través de sus manifestaciones y opiniones, omitiremos los obstáculos epistemológicos.

Para definir los obstáculos cognitivos, consideramos la adaptación de la definición original de Bachelard (1938) realizada por Palarea y Socas (1994, p. 94) utilizada para analizar las dificultades en el aprendizaje del álgebra; los obstáculos cognitivos son "conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, se fijan en la mente y, sin embargo, resultan inadecuados y de difícil adaptación al tenerse que enfrentar el alumno a otros problemas".

Los obstáculos didácticos tienen su origen en el proceso de enseñanza seguido por el estudiante y se asocian a características propias del sistema educativo, como por ejemplo la metodología de enseñanza, la organización curricular de los contenidos, el significado parcial que se transmite en un momento dado, etc.

Desde el punto de vista de los errores relacionados con la ausencia de sentido, se considera que estos errores se originan en los tres estadios de desarrollo —semiótico, estructural y autónomo— que se dan en los sistemas de representación asociados al álgebra, por lo que se diferencian tres posibles causas (Ruano et al., 2008; Socas, 2007):

- Errores debidos a una falta de asimilación de nociones aritméticas. Los primeros pasos en el aprendizaje de las ecuaciones se sustentan en la manipulación de nociones aritméticas básicas (las operaciones aritméticas, los números negativos, las relaciones de igualdad entre números expresados de distinta manera, etc.).
- Errores debidos a la manipulación del lenguaje algebraico. Se trata de errores asociados a la simbología propia del álgebra: el uso de letras (incógnitas) y símbolos (signo igual) a los que hay que atribuir nuevos significados.

- Errores debidos a la aplicación inapropiada de fórmulas o reglas de procedimiento. La utilización de procedimientos memorizados genera errores cuando se aplica sin sentido a situaciones que no admiten una técnica o se introduce alguna técnica inventada.

Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales se deben a bloqueos u olvidos por falta de concentración, o incluso a la aplicación de técnicas erróneas para evitar enfrentarse a nociones que generan inseguridad, como la aritmética con números negativos.

Utilizando estos referentes, un mismo error puede deberse a más de una causa. Precisamente, la aportación de este trabajo es profundizar en las causas posibles de los errores en cada estudiante, buscando argumentos que nos permitan interpretar sus errores sobre las ecuaciones lineales a lo largo de la etapa secundaria.

Primera clasificación descriptiva de errores en ecuaciones lineales desde el punto de vista del contenido matemático

Numerosos trabajos de investigación llevan a cabo una clasificación descriptiva de errores basada en la propia estructura del contenido matemático que están analizando. Así, en el caso concreto de las ecuaciones lineales se tienen en cuenta: los contenidos aritméticos (números y operaciones), como contenidos matemáticos previos imprescindibles para realizar una resolución de una ecuación; la distinción conceptual/procedimental que permite separar las reglas de procedimiento de resolución de la ecuación y las interpretaciones conceptuales que dan sentido a dichas reglas.

Bajo este planteamiento, un error como $2(x+4)=6 \rightarrow 2x+4=6$ se suele describir en la literatura como una aplicación deficiente de la propiedad distributiva (Castellanos y Moreno, 1997), propiedad que el estudiante ha de tener desarrollada como conocimiento previo en el ámbito aritmético. Este tipo de argumentación se basa fundamentalmente en el contenido matemático. Pero, profundizando en las causas de este error, cabe preguntarse, por ejemplo, si el estudiante realmente tiene una concepción errónea de la propiedad distributiva entre números o si está influido por la dificultad que supone el uso de letras y números al mismo tiempo.

Una revisión de la literatura de investigación que describe los errores sobre las ecuaciones lineales según criterios basados en el contenido matemático, nos ha llevado a realizar una primera clasificación preliminar. Se distinguen dos categorías principales: errores aritméticos y errores algebraicos propios de las ecuaciones. Hemos añadido un tercer grupo, errores mixtos aritmético-algebraicos, para los errores en cuya descripción interviene una mezcla de contenidos numéricos y algebraicos. A continuación, se describe esta clasificación.

Errores aritméticos

Dentro de la categoría de errores aritméticos identificamos tres tipos de errores: errores en operaciones con enteros, errores en operaciones con fracciones y errores en la propiedad distributiva. Los errores en operaciones con enteros se manifiestan mediante equivocaciones en sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números enteros que los estudiantes cometen al resolver ecuaciones. Por ejemplo: $5y = -2 + 3 \rightarrow 5y = -5$ (Abrate et al., 2006).

Los errores en operaciones con fracciones contienen los que cometen los estudiantes al dividir una fracción entre un número, al multiplicar y dividir fracciones, o al calcular el mínimo común múltiplo (Abrate et al., 2006 o Egodawatte, 2011). Ppor ejemplo, en el primer caso, $3x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} : 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$, y en el segundo caso, $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 2 \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{4}{2}$.

En la categoría de errores en la propiedad distributiva se incluye el error que Egodawatte (2011) ha denominado distributiva incompleta, que ocurre cuando los estudiantes multiplican el número delante del paréntesis solo por el término más cercano, por ejemplo $5(x + 2) = 15 \rightarrow 5x + 2 = 15$.

Errores algebraicos propios de las ecuaciones

Dentro de la categoría de errores algebraicos propios de las ecuaciones identificamos dos subcategorías: errores de concepto y errores de procedimiento propios de las ecuaciones. En la subcategoría de errores de concepto se describen dos errores en la bibliografía. El primero consiste en la no diferenciación entre término con incógnita y término independiente. El estudiante suma el término con incógnita con uno que no lo tiene: $3(2x + 1) = 7 \rightarrow 3(3x) = 7$. Algunos investigadores como Egodawatte (2011) señalan que este error ocurre cuando los estudiantes tratan de simplificar la ecuación porque su resolución les resulta excesivamente complicada. El error en el coeficiente consiste en que los estudiantes trasponen al otro miembro el coeficiente de la incógnita como si estuviese sumando en lugar de multiplicando; por ejemplo, $3x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 - 3$.

En la subcategoría de errores de procedimiento propios de las ecuaciones se han descrito dos errores que están directamente relacionados con el método que utilizan los estudiantes para resolver las ecuaciones (Kieran y Filloy, 1989). Los estudiantes que utilizan el método de la balanza, es decir, realizar la misma operación en ambos miembros de la igualdad, cometen el error de igualdad entre los miembros de la ecuación, que consiste en que los estudiantes en lugar de realizar la misma operación en ambos lados de la ecuación lo hacen en uno solo: $2x + 3 = 5 \rightarrow 2x + 3 - 3 = 5$. Los estudiantes que utilizan el método de las *reglas del pasa*, es decir, lo que está sumando pasa restando y lo que está multiplicando pasa dividiendo, incurren en errores de aplicación incorrecta de estas reglas: $-6x = 2 \rightarrow x = 2 + 6 = 8$. Adicionalmente, varios autores señalan que los estudiantes mezclan las dos reglas de procedimiento y crean una regla nueva e incorrecta (Abrate et al., 2006; Castellanos y Moreno, 1997; Hall, 2002): lo que está multiplicando pasa dividiendo pero con el signo cambiado: $-3y = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{3}$.

Errores mixtos aritmético-algebraicos

En la categoría de errores mixtos aritmético-algebraicos se incluyen dos errores. El error en la jerarquía de las operaciones que se producen cuando no se realizan las trasposiciones en el orden correcto: $\frac{5x}{3}+2=3 \rightarrow 5x+2=9$. No queda claro si los estudiantes aplican incorrectamente la regla del pasa, error algebraico, o si pasan el término que está dividiendo al otro miembro para evitar sumar un número y una fracción, error aritmético. El segundo error de esta categoría consiste en que los estudiantes invierten la fracción resultante: $2x=3 \rightarrow x=\frac{2}{3}$. En este caso se desconoce si los estudiantes no aplican correctamente la regla de la multiplicación y pasan lo que está multiplicando al otro miembro multiplicando, error algebraico, o si rechazan como solución las fracciones en las que el numerador es mayor que el denominador, error aritmético.

Objetivos de la investigación

Al realizar la clasificación descriptiva de errores en ecuaciones lineales desde el punto de vista del contenido matemático realizada a partir de una revisión de la literatura de investigación, se han podido identificar dos necesidades. Por una parte, se ha observado que distintos autores sitúan un mismo error de forma coherente en distintas categorías de la clasificación, por lo que es posible y necesario refinar dicha clasificación. Por otra, se ha puesto de manifiesto que los criterios basados en el contenido matemático no permiten explicar el detalle de las causas de los errores, por lo que se hace necesario profundizar en dichas causas. De esta forma, los objetivos de este estudio son:

- Completar y refinar la primera clasificación descriptiva de errores identificada en la literatura.
- Atribuir causas a estos errores, utilizando el referente de Socas (1997), a partir de la indagación en los conocimientos de los estudiantes.

Metodología de investigación

En este estudio se ha empleado un enfoque de investigación mixto en el que el análisis cualitativo se ha utilizado para lograr una mejor comprensión del análisis cuantitativo (Field, 2009). La investigación se ha llevado a cabo en dos fases. En la primera, se ha utilizado como instrumento de investigación un cuestionario para identificar los errores cometidos en la resolución de ecuaciones lineales a lo largo de la etapa secundaria. En la segunda fase, se han realizado entrevistas cognitivas permitiendo profundizar en las causas que dan lugar a estos errores.

Se han tomado datos de 266 estudiantes de cuatro cursos distintos en dos centros públicos del norte de España: 64 de estudiantes de 13 años, 67 de 14 años, 70 de 15 años y 65 de 16 años. Este rango de edades abarca desde el momento en que se introducen las ecuaciones en la enseñanza obligatoria hasta los 16 años, cuando deberían estar consolidadas. El cuestionario consta de dos partes: en la primera se recaban datos sobre las características de los estudiantes y en la segunda se plantean 6 ecuaciones lineales inspiradas en investigaciones previas como las de Abrate et al. (2006), Hall (2002), Castellanos y Moreno (1997). En un principio se seleccionaron 20 ecuaciones reduciéndose a seis después de un estudio piloto y de ser validadas por expertos investigadores y profesores de secundaria, para testar la dificultad y posibles errores de interpretación (Denscombe, 2003). El cuestionario definitivo se muestra en la figura 1.

CUESTIONARIO DE MATEMÁTICAS

Rellena los siguientes datos:

Nombre y apellidos:..

Sexo: chico ☐ chica ☐ Edad: .... Curso: ....

¿Qué nota obtienes normalmente en matemáticas? Da un número del 1 al10:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(-2x+1) = -x$

b) $\frac{7}{2}x = 14$

c) $-4x = 16$

d) $-2(3x-4) = 10$

e) $\frac{x}{3} + 2x = 7$

f) $-3x + 5 = 17$

¡Muchas Gracias!

Figura 1. Cuestionario de resolución de ecuaciones lineales con una incógnita

Las entrevistas cognitivas consisten en realizar preguntas asociadas a las respuestas obtenidas en un cuestionario con el propósito de identificar, conocer y profundizar en los motivos por los que el entrevistado da una respuesta (Conrad y Blair, 2004). Tras un análisis preliminar de los resultados obtenidos en los cuestionarios, los estudiantes fueron agrupados de acuerdo a los errores cometidos. A continuación, se les entrevistó de manera individual, pidiéndoles narrar el proceso que habían seguido al resolver las ecuaciones y, al hilo de su narración, planteándoles preguntas más específicas, así como otras cuestiones matemáticas que asegurasen las causas de los errores. Las entrevistas fueron, por tanto, de tipo semiestructurado. En ellas, el encuestador hacía preguntas predeterminadas encaminadas a discriminar el origen de los errores y también preguntas espontáneas, vinculadas al relato del estudiante entrevistado, dirigidas a confirmar o refutar la posible causa de un error. Por ejemplo, para identificar si los errores cometidos en la ecuación $3(-2x+1)=-x$ se debían únicamente a un desconocimiento de la propiedad distributiva o a un fallo en su aplicación cuando contiene elementos algebraicos, durante la entrevista cognitiva se pidió a los estudiantes resolver tareas puramente aritméticas en relación con la propiedad distributiva, como $3(-2+1)$ y se realizaron preguntas como “en la expresión $2x$, ¿se están sumando el 2 y la x?”. De este modo, se iba interactuando con los estudiantes hasta llegar a esclarecer cuál de las dos causas posibles podía atribuirse a los errores identificados.

Para analizar los datos, primero se clasificaron todos los errores de acuerdo a su manifestación externa. Se registraron las frecuencias de estos errores según la edad de los estudiantes. Para analizar los datos cualitativos se tomaron anotaciones en papel de las respuestas de los estudiantes en las entrevistas cognitivas y se relacionaron con los datos cuantitativos para una mejor interpretación y categorización de los errores.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los análisis mostraron que los porcentajes de ecuaciones resueltas correctamente son, en general, bajos. Solo el 9,4% de los estudiantes de 13 años, el 23,9% de los de 14 años, el 25,7% de los de 15 años y el 43,1% de los estudiantes de 16 años, realizaron todas las ecuaciones correctamente. Por otra parte, el 37,5% de los estudiantes de 13 años, el 23,9% de los de 14, el 21,4% de los de 15 y el 6,2% de los estudiantes de 16 años, dejaron alguna ecuación sin responder. Estos porcentajes muestran las dificultades de los estudiantes de secundaria en la resolución de ecuaciones y confirman los resultados de investigaciones anteriores como las de Kieran (1989) y Hall (2002).

Centrándonos en la categorización de errores desde el punto de vista del contenido matemático, los resultados corroboran algunas de las sub-dimensiones propuestas en nuestra clasificación preliminar y sugieren la re-conceptualización de otras, tras profundizar en el conocimiento de los estudiantes. La tabla 1 muestra la clasificación refinada y el porcentaje de errores por curso según cada tipo de error. Dicho porcentaje muestra el número de estudiantes que ha cometido ese tipo de error al menos una vez. En particular se identificaron dos categorías principales: errores relacionados con operaciones aritméticas y errores algebraicos propios de las ecuaciones. La categoría preliminar de errores mixtos aritmético-algebraicos desaparece como tal, pues el hecho de esclarecer las causas de estos errores ha permitido situarlos en alguna de las dos categorías anteriores.

Tabla 1
Porcentaje de errores cometidos en la resolución de ecuaciones por curso

Tipo de error	13 años	14 años	15 años	16 años
Errores aritméticos				
Error en operaciones con enteros	32,8	20,9	18,6	18,5
Error en operaciones con fracciones	35,9	25,4	20	16,9
Error en la propiedad distributiva	23,4	26,9	4,3	4,6
Errores algebraicos propios de las ecuaciones				
Errores de concepto:				
Error incógnita/término independiente	9,4	3,0	2,9	0
Error en el coeficiente	20,3	9	7,1	0
Errores de procedimiento:				
Error de igualdad entre los miembros	6,2	7,5	12,9	7,7
Error en las reglas del pasa	29,7	23,9	42,9	21,5
Error en la jerarquía de las operaciones	17,2	7,5	14,3	9,2

A continuación, se presentan ejemplos de las dos categorías de errores y sus subcategorías. Además, se justifica su categorización de acuerdo a las causas que los generan.

Errores aritméticos

La categoría de errores aritméticos se divide en tres subcategorías: errores en operaciones con enteros, errores con fracciones y errores al aplicar la propiedad distributiva. En la subcategoría de errores con enteros se ha detectado que al menos un 32,8% de los estudiantes de 13 años cometió algún error a lo largo del cuestionario, mientras que en el resto de edades el error se sitúa en torno al 20%. Son errores que los estudiantes han cometido en operaciones como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de enteros, similares a los señalados en la literatura. En particular, gran parte de estos errores se deben a que los estudiantes, al operar, olvidan algunos de los signos que acompañan a los números. Las entrevistas cognitivas revelaron que los estudiantes saben realizar correctamente las operaciones e incluso son conscientes de que suelen olvidar los signos. Por consiguiente, la causa de este error se corresponde con la dimensión afectivo-emocional. En efecto, interpretamos que estos errores se deben a que el estudiante centra su atención en las ecuaciones y en la forma de resolverlas, descuidando las operaciones aritméticas simples. Esto coincide con lo que señalan algunos estudios como el de Torre (2004) que indica que los estudiantes centran la atención y priorizan los últimos contenidos que han aprendido, olvidando o cometiendo errores en conceptos que ya sabían.

Se detectó que los porcentajes de errores en fracciones disminuían progresivamente a medida que los estudiantes avanzaban en sus estudios, desde el 35,9% de los estudiantes de 13 años al 16,9% de los estudiantes con 16 años. En esta subcategoría se observaron varios de los errores recogidos inicialmente en nuestra revisión bibliográfica, como por ejemplo errores al sumar fracciones, al calcular el mínimo común múltiplo, y al dividir un número entre una fracción. Los análisis de las entrevistas cognitivas sugirieron que estos errores se deben a una falta de asimilación de nociones aritméticas, categorizándose por lo tanto dentro de la dimensión error por ausencia de sentido. Por ejemplo se identificó un error en el que los estudiantes calculan correctamente el mínimo común múltiplo y lo colocan en el denominador, pero no realizan los cambios oportunos en el numerador. Para constatar la causa de este error se propuso a los estudiantes, en las entrevistas cognitivas, sumar fracciones sin contenido algebraico, y se observó que estos seguían cometiendo el mismo error, confirmando así una falta de asimilación de nociones aritméticas.

Tras la investigación, en esta categoría de errores con fracciones se añadió el error de inversión de los miembros de la igualdad, categorizado como mixto aritmético-algebraico en nuestra clasificación original. En este error los estudiantes invierten el numerador y el denominador de la fracción en el último paso de la ecuación, como se observa en el ejemplo de la figura 2.

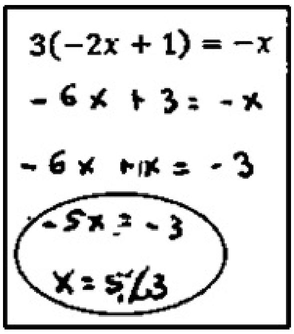

Figura 2. Error de inversión de los miembros de la igualdad

Un análisis profundo llevado a cabo mediante las entrevistas cognitivas reveló que es un error puramente aritmético y no está relacionado con la ecuación. Se observó que solo se comete este error en el caso en el que el coeficiente de la ecuación es mayor que el término independiente. Al despejar, interpretan que están realizando una división en la que el dividendo ha de ser mayor que el divisor. Este hecho ya había sido advertido en investigaciones sobre errores al trabajar con fracciones. Por ejemplo, Cadenas (2007) observa que cuando los estudiantes obtienen una fracción como resultado de una operación creen que el número mayor debe ir en el numerador. A los estudiantes que cometieron este error se les plantearon problemas, en la entrevista cognitiva, en los que tenían que dividir números obteniendo como resultado una fracción propia. Todos fallaron poniendo el número más grande en el numerador. Por ejemplo, a Alejandro (15 años) se le planteó el siguiente problema: “Repartimos 3 caramelos entre 6 niños ¿Cuánto le toca a cada uno?” Su respuesta fue “2 caramelos”. Respecto a la causa del error este se clasifica dentro de la categoría obstáculo cognitivo de Socas (1997), por observar que es un conocimiento válido en otros contextos, en el sentido de que el estudiante está habituado en las primeras edades a dividir el número más grande entre el más pequeño.

El error en la propiedad distributiva se dio con el porcentaje más alto entre los estudiantes de 14 años, mientras que entre los estudiantes de 15 y 16 años no supera el 5%. Uno de los errores que se identificaron fue el denominado *distributiva incompleta* detectado antes por Egodawatte (2011). A los estudiantes que cometieron este error se les propuso resolver, en las entrevistas cognitivas, una ecuación con el término que multiplica al paréntesis a la derecha $(2x + 5)3 = 10$ y los estudiantes volvieron a multiplicar solo por el término más cercano. Además, se detectaron otros casos de errores: algunos estudiantes no fueron capaces de identificar la distributiva, y otros (la mayoría) olvidaban multiplicar el signo al aplicar la propiedad distributiva. Asimismo, se les planteó situaciones de aplicación de esta propiedad solo con números, y cometieron los mismos errores que con las ecuaciones. En este último caso los estudiantes señalaban que había demasiadas cosas a las que tenían que prestar atención, dificultando así la resolución de la tarea. Interpretamos, por lo tanto, que el origen del error pertenece a la dimensión *ausencia de sentido*, ya que está asociado en particular con una falta de asimilación de las nociones aritméticas.

Como síntesis de los errores descritos anteriormente, indicamos que estos se cometen en un porcentaje más bajo entre los estudiantes con más edad. Esto sugiere que los más jóvenes no tienen bien asentadas las nociones aritméticas antes de enfrentarse a las ecuaciones. La combinación de varios elementos —sumas, fracciones o incógnitas— crea confusión y hace que la atención de los estudiantes se centre solo en lo último que han aprendido, fallando en procedimientos básicos. Es necesario que los estudiantes tengan estos conceptos más asentados antes de enfrentarse a la resolución de ecuaciones. Cuando los conceptos están más asentados no requieren tanta atención y pueden así centrarse más en la ecuación sin fallar en este tipo de errores.

Errores algebraicos propios de las ecuaciones

La categoría de errores algebraicos propios de las ecuaciones se divide en dos subcategorías: errores conceptuales y procedimentales.

Errores conceptuales

Se detectaron dos errores conceptuales: disociación incógnita/término independiente, y coeficiente.

El error disociación incógnita/término independiente se dio con mayor porcentaje entre los estudiantes más jóvenes y no se detectó en los estudiantes de 16 años. Este error se debe a que los estudiantes no han llegado a asimilar la diferencia entre el término con incógnita y el término sin esta. Egodawatte (2011) señala que este error se comete porque el estudiante tiene como objetivo simplificar la ecuación ya que esta le resulta excesivamente complicada. Sin embargo, en este estudio se ha comprobado que es un error propio de la manipulación de lenguaje algebraico, y por lo tanto perteneciente a la dimensión ausencia de sentido. El estudiante se encuentra en un estadio de desarrollo primario de este tipo de lenguaje y, en ocasiones, confunde el término con incógnita y el término independiente. Como el estudiante se encuentra en un estadio de desarrollo inicial, este error aparece de forma aleatoria entre los más jóvenes. Es decir, se observa que en ocasiones un mismo estudiante comete el error, mientras que en otros momentos no. Por ejemplo, la figura 3 muestra cómo Luis (13 años), en el primer paso de la resolución no comete el error, pues aplica correctamente la propiedad distributiva, pero en el segundo paso comete un error al sumar términos independientes y términos con incógnita.

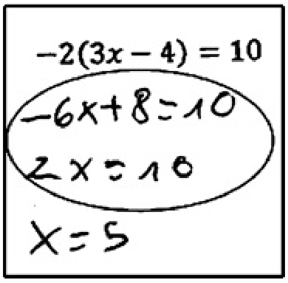

Figura 3. Error en el segundo paso y no en el primero

Este ejemplo evidencia además que, en contraposición a lo que señala Egodawatte (2011), el error no se debe a un intento de simplificación de la ecuación, si fuese así, Luis habría cometido el error en el primer paso. Conviene destacar que los estudiantes de 16 años, en un estadio de desarrollo de lenguaje algebraico más avanzado, no cometieron este tipo de error.

El error de concepto de coeficiente se dio con un 20,3% entre los estudiantes de 13 años, mientras que no se encontró en los de 16 años. Los estudiantes que cometen este error son capaces de identificar los términos con incógnita y los términos independientes, ya que normalmente los separan en diferentes lados de la igualdad. Sin embargo, no han asimilado que los coeficientes son multiplicadores de las incógnitas. Como consecuencia, los operan como términos independientes, pasándolos al otro lado de la igualdad restando o sumando. En el ejemplo de la figura 4 pasan el coeficiente restando 16-(-4). Las entrevistas cognitivas revelaron que no se trata de un error de las reglas del pasa, ya que cuando se les pregunta sobre la operación que realiza el coeficiente ellos indican que está sumando a la incógnita. Por ello, atribuimos la causa de este error a que el estudiante se encuentra en un estadio de desarrollo primario de manipulación de lenguaje algebraico. Este porcentaje de error se incrementa significativamente cuando el coeficiente es una fracción, como es el caso de la ecuación $\frac{7}{2}x = 14$, en la que los estudiantes responden $x = 14 - \frac{7}{2}$.

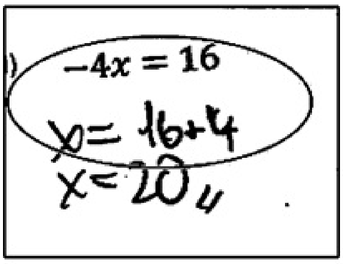

Figura 4. Error de concepto de coeficiente

Errores procedimentales

Se han encontrado tres tipos de errores en el procedimiento de resolución de las ecuaciones: error de igualdad entre los miembros de la ecuación, error en el procedimiento de las reglas del pasa y error en la jerarquía de operaciones.

El error de igualdad entre los miembros de la ecuación se dio con un porcentaje más elevado en los estudiantes de 15 años (12,9%), mientras que en el resto de cursos estuvo alrededor del 7%. Este error consistió en una aplicación errónea del método de la balanza, al realizar la operación en uno solo de los miembros de la igualdad. Obsérvese por ejemplo la resolución de la figura 5. En nuestro estudio este error no ha tenido un porcentaje alto. Esto se debe a que los estudiantes participantes normalmente aprenden con sus profesores a resolver las ecuaciones con el método de las reglas del pasa y solo utilizan el método de la balanza cuando la ecuación incluye un coeficiente negativo, que eliminan multiplicando por 1.

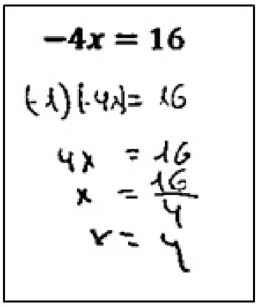

Figura 5. Aplicación errónea del método de la balanza

De acuerdo con lo anterior, consideramos que este es un error debido a un obstáculo didáctico, ya que tiene su origen en el proceso de enseñanza y, más en concreto, en el escaso uso que el profesor hace de este método. No podemos atribuir a este error un origen cognitivo porque se trata de una única regla propia del método particular de enseñanza (cuando el coeficiente de la x es negativo multiplicar los dos miembros por -1).

El error en el procedimiento de las reglas del pasa se ha dado con un 29,7% entre los estudiantes de 13 años, con un 23,9% entre los de 14, con un 42,9% entre los de 15 y con un 21,5% entre los de 16. Este error se debe a que los estudiantes no han aplicado correctamente las reglas del pasa, bien sea porque se equivocaron al aplicar la regla o porque crearon una nueva regla errónea. Los estudiantes que no aplican correctamente las reglas del pasa trasponen los términos al segundo miembro de la igualdad realizando la misma operación que había en el primer miembro. Es decir, si un término estaba multiplicando en el primer miembro lo pasaban multiplicando al segundo miembro. Las entrevistas cognitivas indicaron que este error se comete porque no se tiene en cuenta inicialmente la operación que está realizando el término que trasponen. El origen de este error es, por lo tanto, una aplicación inapropiada de reglas de procedimiento asociada a una ausencia de sentido. Además, en este caso, interpretamos que esta ausencia de sentido está asociada al método de enseñanza. En este sentido, Kieran (1980) sugiere que los estudiantes que trabajan con el método de la balanza son más conscientes de la operación que realiza cada término que los que utilizan las reglas del pasa. Los estudiantes que crearon una regla errónea fueron aquellos que mezclaron las dos reglas del pasa. Por ejemplo, como muestra la figura 6, pasaron dividiendo lo que estaba multiplicando, pero también lo cambiaron de signo.

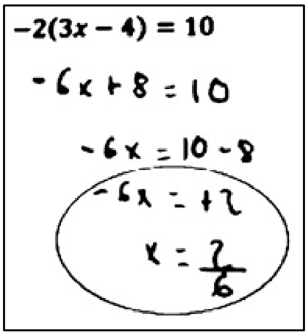

Figura 6. Mezcla de las dos reglas del pasa

Este procedimiento erróneo ya se había identificado en las investigaciones de Abrate et al. (2006), Castellanos y Moreno (1997), Hall (2002). En nuestro estudio esto solo ocurrió cuando los coeficientes eran números negativos, concretamente, en las ecuaciones $-4x = 16, -2(3x - 4) = 10$ y $-3x + 5 = 17$. Esto se ratificó en las entrevistas cognitivas cuando los estudiantes insistían en que no entendían por qué esa ecuación estaba mal, comprobándose que tienen problemas al trabajar con números negativos por lo que crean nuevas reglas para evitar trabajar con ellos. Interpretamos que este error se trata de una ausencia de sentido en la aplicación inapropiada de una fórmula.

El error de la jerarquía de las operaciones en el ámbito algebraico, que en la literatura se clasificó como error mixto aritmético-algebraico, se recategoriza, tras este estudio, como un error algebraico procedimental. Se dio con un 17,2% entre los estudiantes de 13 años, 7,5% entre los de 14, 14,3% entre los de 15 y 9,2% entre los de 16 años. Este error consiste en realizar las trasposiciones en un orden incorrecto (véase figura 7). Las entrevistas cognitivas señalaron que su causa es debida a que los estudiantes no han llegado a asimilar que para poder trasponer un término que está dividiendo en un miembro, éste debe de dividir a todos los términos de ese miembro, como es el caso de la figura 7. Se ha descartado que el error se deba a un problema aritmético porque en las entrevistas cognitivas a los estudiantes que fallaron en este error, se les propusieron operaciones del tipo $\frac{2}{3} + 5$, y en todos los casos respondieron correctamente. Interpretamos, por tanto, que este error se produce por la aplicación de un conocimiento que ha sido satisfactorio durante un tiempo y que tiene difícil adaptación a un nuevo contexto, y por tanto, se trata de un obstáculo cognitivo.

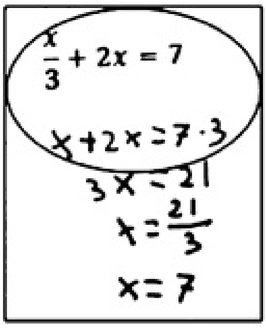

Figura 7. Realización de las trasposiciones en un orden incorrecto

CONCLUSIÓN

El trabajo se ha centrado en el estudio de los errores que comete un grupo de estudiantes españoles de 13, 14, 15 y 16 años a la hora de resolver de ecuaciones lineales. Las ecuaciones lineales son unos de los contenidos de mayor interés en el ámbito algebraico por ser el contenido de transición de la aritmética al álgebra y por ser un pilar sobre el que sustentar futuros conceptos matemáticos.

A pesar de las numerosas investigaciones en el área, no existe un desarrollo teórico claro que permita interpretar correctamente las causas que originan los errores en la resolución de ecuaciones lineales. La mayor parte de los trabajos, aunque hablan de causas, están centrados en la descripción matemática del error y no hacen una indagación teórica sobre el origen del mismo. En este estudio se ofrece una clasificación descriptiva de los errores desde el punto de vista del contenido matemático, así como de las causas que llevan a la consecución de estos errores. Dicha clasificación se apoya en dos referentes teóricos —uno que categoriza el error de acuerdo a su contenido matemático y otro respecto a las causas que lo origina de acuerdo con el modelo de Socas (1997) —y un estudio empírico con 266 alumnos. Los estudiantes fueron preguntados durante la resolución de diferentes ecuaciones sobre los procesos involucrados en sus respuestas, indagando de esta forma en las causas de los errores identificados.

La clasificación, desde el punto de vista del contenido matemático, conforma dos grandes categorías: errores aritméticos y errores algebraicos propios de las ecuaciones. La categoría errores aritméticos incluye a su vez tres subcategorías: operaciones con enteros, operaciones con fracciones y distributiva. Con respecto a las causas que los originan y desde la perspectiva teórica de Socas (1997), se concluyó que los errores identificados en la subcategoría operaciones con enteros son de tipo afectivo-emocional por deberse a olvidos o por priorizar en la aplicación de lo último aprendido. Los errores identificados en la categoría errores con fracciones se debían a dos causas principalmente: a una falta de asimilación de los contenidos aritméticos (i.e. a un error por ausencia de sentido), o a un obstáculo cognitivo (conocimientos satisfactorios en unos contextos, pero inadecuados en otros). Los errores de la categoría de la propiedad distributiva se relacionaron también con errores por falta de asimilación de las nociones aritméticas, y por lo tanto pertenecientes a la dimensión errores por ausencia de sentido. La mayoría de los errores aritméticos identificados se relacionaron por lo tanto con una falta de base, o no consolidación, de los conceptos y procedimientos aritméticos necesarios antes de empezar a trabajar con las ecuaciones. La combinación en una misma ecuación de varios conceptos y procedimientos no bien asentados como sumas, restas, fracciones, signos o igualdades crean gran dificultad al estudiante conduciéndole a cometer errores. Este tipo de errores aritméticos se observaron en un menor porcentaje en los cursos altos, donde los estudiantes ya tenían bien asentados estos conceptos y procedimientos.

La categoría errores algebraicos propios de las ecuaciones se subdivide en dos subcategorías: errores conceptuales y errores procedimentales. La subcategoría errores conceptuales contiene a su vez las dimensiones: disociación incógnita/término independiente y coeficiente. Se observó que los errores de ambas dimensiones se deben a que los estudiantes se encuentran en un estadio de desarrollo primario de manipulación de lenguaje algebraico, en el que no han llegado a asimilar la diferencia entre algunos de los términos de la ecuación. Son errores propios de la manipulación de lenguaje algebraico y, por lo tanto, pertenecientes a la categoría ausencia de sentido de Socas.

En la subcategoría de errores procedimentales se encontraron tres tipos de errores: de igualdad entre los miembros de la ecuación, en el procedimiento de las reglas del pasa, en la jerarquía de operaciones. El error de igualdad entre los miembros de la ecuación se dio con un bajo porcentaje y tiene su origen en el proceso de enseñanza por lo que se clasificó como un obstáculo didáctico. Los errores en el procedimiento de las reglas del pasa se deben a una aplicación inapropiada de reglas de procedimiento por lo que se clasifica como un error por ausencia de sentido, aunque también se asocia al método de enseñanza elegido por el profesor. Los errores en la jerarquía de las operaciones, que en la literatura no se supieron categorizar, se incluyeron en esta categoría y su causa es un obstáculo cognitivo. Se puede concluir que la mayoría de los errores relacionados propiamente con la ecuación están relacionados directamente con el método o procedimiento de resolución que se haya enseñado. Ninguno de los dos métodos de resolución —balanza o reglas del pasa— está exento de errores, aunque las causas de los errores encontrados en ambos métodos son distintas.

Conviene señalar que la clasificación presentada de errores de ecuaciones, respecto al contenido matemático y origen del error, es susceptible de ser completada. Estudios con una muestra incluso más variada (por ejemplo, incluyendo niveles postobligatorios) serían muy útiles para sustentar y ampliar esta categorización, permitiendo observar variaciones en los errores y constatar sus causas.

REFERENCIAS

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Bachelard G. (1938*). La Formation de l'esprit Scientifique*. París: Vrin.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. New Windsor, Berkshire, England: NFER-Nelson Publishing Co.

Cadenas, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en estudiantes del primer semestre de la Escuela de Educación de la Universidad de los Andes. *Orbis, 6*, 68-84.

Castellanos, L. y Moreno, I. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *EMA*, *2*(3), 247-258.

Conrad, F. y Blair, J. (2004). Data quality in cognitive interviews: The case for verbal reports. En S. Presser, J.M. Rothgeb, M.P. Couper, J.T. Lessler, E. Martin, J. Martin, E. Singer (Eds.), *Methods for testing and evaluating survey questionnaires* (pp. 67-87). Hoboken, NJ: John Wiley and Sons.

Denscombe, M. (2003). *The good research guide: For small-scale social research projects*. New York, NY: McGraw-Hill International.

Egodawatte, G. (2011). *Secondary school students' misconceptions in Algebra*. (Tesis doctoral). Department of Curriculum, Teaching and Learning. University of Toronto.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma*, 5, 23-33.

Esquinas, A. M. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: Aplicación a la práctica docente*. (Tesis inédita de doctorado). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Field, A. (2009). *Discovering Statistics Using SPSS*. Londres: SAGE Publications.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *2*, 19-25.

Hall, R. (2002). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *15*, 113-143.

Issakova, M. (2006). Comparison of student errors made during linear equation solving on paper and in interactive learning environment. En J. Böhm (Ed.), *Proceedings of the Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education*. Dresden, Alemania. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/228408659_Comparison_of_student_errors_made_during_linear_equation_solving_on_paper_and_in_interactive_learning_environment

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequality to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*. Dartmouth, MA. Recuperado en https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441664.pdf

Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs an operator symbol. *Karplus*, *1*, 163-169.

Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*(3), 229-240.

Millán, E. F. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(1), 53-71.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por estudiantes de 12 a 14 años*. (Tesis doctoral) La Laguna, Santa Cruz de Tenerife: Universidad de La Laguna.

Palarea, M. y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma, 16*, 91-98.

Pirie, S. y Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(2), 159-181.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrik; P. Gómez y L. Rico: *Educación Matemática* (pp. 69-108). México DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por estudiantes de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico, (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, España: SEIEM.

Socas, M. M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, *77*, 5-34.

Torre, S. (2004). *Aprender de los errores: El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*. Buenos Aires, Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

Vaiyavutjamai, P. y Clements, M. K. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematical Education Research Journal*, *18* (1), 47-77.

Maitane Pérez Istúriz
Universidad de Cantabria
maitane.perez@unican.es

José Manuel Mantecón
Universidad de Cantabria
josemanuel.diego@unican.es

Irene Polo Blanco
Universidad de Cantabria
irene.polo@unican.es

María José González López
Universidad de Cantabria
mariaj.gonzalez@unican.es

Recibido: 30/06/2018. Aceptado:13 /12/2018
doi: 10.30827/pna.v13i2.7613
ISSN: 1887-3987