

MODELACIÓN ESCOLAR: ANÁLISIS DE LAS VARIACIONES EN GRÁFICAS

María Esther Magali Méndez Guevara, Marcela Ferrari Escolá, Manuel Trejo Martínez
UAGro. Facultad de Matemáticas. (México)
memmendez@uagro.mx, mferrari@uagro.mx, mmartinez@uagro.mx

Resumen

Reportamos elementos trabajados en dos sesiones del taller, la primera centrada en la manipulación de parámetros usando calculadoras para caracterizar funciones polinómicas; la segunda, en el estudio del signo de cada derivada en $x=0$ en gráficas de familias de funciones para relacionarlos con el número de raíces reales positivas. Los diseños se sustentan en la categoría de modelación escolar, constructo socioepistemológico que provee de un marco de referencia que explicita elementos esenciales como la experimentación o experiencia, el estudio de variación local y global, y el ajuste y tendencia de comportamientos de variación.

Palabras clave: modelación, tecnología, funciones polinómicas

Abstract

We report elements worked in two sessions of the workshop, the first one is focused on the manipulation of parameters using calculators to characterize polynomial functions; the second one, is focused on the study of the sign of each derivative at $x = 0$ in graphs of families of functions to relate them to the number of positive real roots. The designs are based on the category of school modeling; a socio-epistemological construct that provides a reference framework that explains essential elements such as experimentation or experience, the study of local and global variation, and the adjustment and tendency of variation behaviors.

Key words: modelling, technology, polynomial functions

■ Introducción

Nuestra disciplina, la matemática educativa, ha acogido un proceso de otra disciplina científica, la matemática aplicada, este ha estado presente en el desarrollo de la ciencia, nos referimos a la modelación matemática, las potencialidades de dicho proceso son indiscutibles pero los objetivos o razones por las cuales se adopta son variantes.

Por ejemplo, incuestionablemente desde la perspectiva de resolución de problemas el modelado matemático es uno de los caminos para lograr que el estudiante reconozca la importancia de aprender matemáticas y desarrolle la capacidad de aplicar algoritmos y reglas matemáticas ante problemas reales

(Berry, 2002). En esta misma línea se reconocen dos formas de hacer modelación; una de forma empírica en la cual el problema proporciona datos o estos se recolectan por los estudiantes para después ajustarlos a modelos ya establecidos, y la segunda es la modelación teórica la cual se propone el desarrollo del modelo enfatizando las características del mismo. Esta postura se engloba en la perspectiva realista en la cual se espera que el alumno sea capaz de comprender el mundo en el que vive y entienda cuáles son los componentes esenciales de los modelos en la medida en que resuelve problemas.

Es decir, la modelación tiene un abanico de enfoques que se pueden clasificar en; epistemológicos, cognitivos y didácticos (Kaiser & Sriraman, 2006) cada uno de ellos con su forma característica de implicación escolar, pero que convergen reconociendo la potencialidad de la modelación, podemos recabar estudios que datan desde la década de los 60, en donde se discute principalmente el rol de esta en la enseñanza de las matemáticas.

En particular las actividades que se reportan están soportadas en la percepción de la modelación desde la teoría socioepistemológica, quien la concibe en tres planos; una práctica social, medio de vinculación entre la construcción social de conocimiento y el escenario escolar llamado categoría, y eje argumentativo de situaciones de aprendizaje (Cordero, 2001; Méndez y Cordero, 2014).

■ Fundamentos teóricos

Desde nuestra mirada socioepistemológica, la modelación es parte esencial de la construcción, difusión y desarrollo del conocimiento científico, pues otorga una justificación funcional a este, además provoca la construcción de herramientas como elementos esenciales de la situación que se atiende, para representar lo que se estudia con determinados fines, de manera que pueda ser comunicado (Gilbert, 2004; Koponen, 2007), y al igual que D'Ambrosio (2009) la reconocemos como una herramienta por excelencia del ser humano para construir conocimiento. Y nos preguntamos, cuáles son los elementos esenciales que permiten al ser humano reproducir ese proceso de construcción de conocimiento y cómo podemos llevar esos elementos a la matemática escolar.

Concebimos a la modelación como una práctica social que promueve la construcción de conocimiento matemático, provee de categorías de modelación (Suárez & Cordero, 2010; Méndez, 2013; Méndez y Cordero, 2014; Arrieta y Díaz, 2015, entre otros) que permiten explicitar las prácticas que generan un marco de referencia para el discurso Matemático Escolar.

Particularmente se reportan propuestas basadas en una categoría de modelación escolar que pretende el desarrollo y articulación de los saberes matemáticos generando redes de estos (Méndez, 2013). Dicha categoría provee de un marco de referencia que explicita elementos esenciales para promover una matemática funcional en la matemática escolar; la experimentación o experiencia, el estudio de variación local y global, y el ajuste y tendencia de comportamientos de variación (Figura 1), en donde se resignifican los usos de las gráficas, lo numérico y lo analítico articuladas por prácticas.



Figura 1. Elementos de la categoría de modelación escolar

Para explicitar la categoría se recurre al diseño de situaciones que articulan elementos de variación, transformación y aproximación (Cordero, 2001), en específico nuestras propuestas exhiben cómo se promueve la construcción de redes de usos ante la caracterización de comportamientos de las funciones polinómicas, empleando tecnología, calculadoras graficadoras fx-CP400 de Casio, promoviendo el análisis de las variaciones numéricas y gráficas para ajustar y describir tipos de comportamientos.

En esta categoría de modelación escolar se busca promover la articulación de elementos de variación, transformación y aproximación, así como la construcción de redes de conocimiento ante la caracterización de comportamientos de las funciones polinómicas.

■ Desglose de los diseños de aprendizaje

Bajo esta perspectiva consideramos importante enriquecer el universo gráfico de los estudiantes propiciando la exploración de características y operaciones gráficas de funciones polinómicas, como las que se evidencian en el primer diseño. Lograr una mirada cuidadosa del efecto que producen pequeños cambios en los parámetros de estas funciones mismas que se robustece al cuestionar sobre la cantidad de raíces reales positivas, número de puntos máximos/inflexión que presentan según su grado. Seguido se invita a reflexionar sobre la forma de la curva, sus posibles idas y regresos respecto al eje de las abscisas, poniendo el acento en “cómo varía lo que varía”, es decir, las derivadas sucesivas que se entrelazan con la serie de Taylor y esto a su vez con la Regla de los signos de Descartes (Cantoral y Ferrari, 2009a; Cantoral y Ferrari, 2009b). A continuación se describen las dos situaciones, se buscó identificar qué usos se desarrollan en los participantes al implementar la tecnología.

Los diseños han sido explorados en escenarios escolares principalmente con jóvenes de bachillerato, estos trastocan conocimientos de la geometría analítica, el álgebra y el cálculo.

Diseño 1. Caracterizando funciones polinómicas

Este diseño se desarrolló mediante cuatro actividades cuyos objetivos pretendían provocar el análisis de gráficas para identificar comportamientos globales y locales, con ello caracterizar a las funciones polinómicas según su grado.

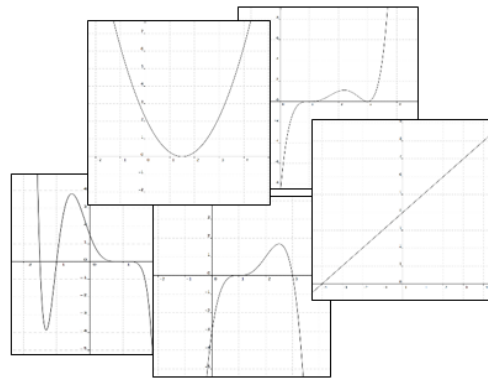


Figura 2. Algunas gráficas para clasificar

La actividad 1 permitió: Conocer qué argumentos matemáticos usan los estudiantes para clasificar las gráficas (figura 2). Suponemos que esta actividad nos dará a conocer los usos de las gráficas arraigados en el bachillerato.

Lo primero que hacen los participantes es organizarlas por rectas o curvas. Algunos mencionan a la “recta lineal y la parábola” porque la han visto en sus clases de matemáticas, pero no hay más argumentos.

La actividad 2 pretende que el estudiante identifique los cambios globales que ocasionan la variación de parámetros de la función y el grado de la función en las gráficas (Figura 3), logrando con esto una clasificación según el grado de la función

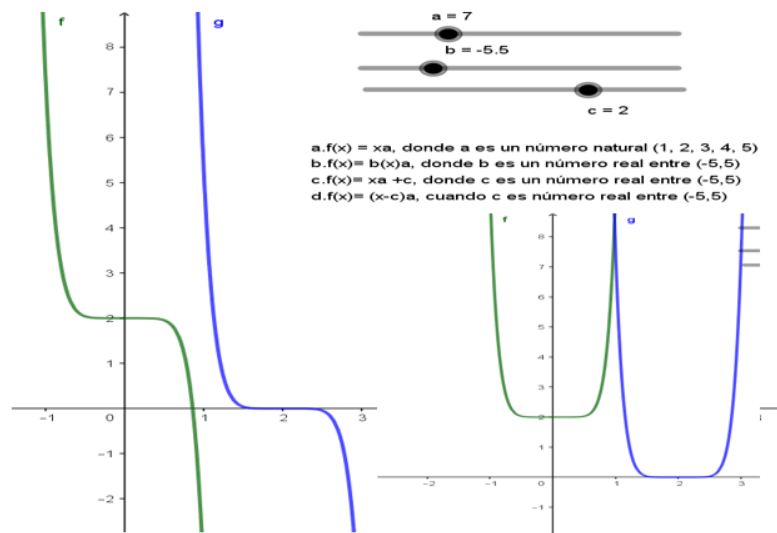


Figura 3. Forma general de las gráficas que hay que analizar para conjeturar comportamientos generales por sus variaciones globales.

En la actividad 3 provoca que el estudiante relacione los parámetros de desplazamiento a la derecha e izquierda con los cortes de la gráfica en el eje “x” (para el caso de la función $f(x) = (x - b)^a(x - c)^d$) con ello introducirlos a noción de raíces de funciones, y que determinen que el cambio global según el grado de las funciones se mantiene (figura 4). Finalmente, se le presenta una serie de gráficas que hay que analizar para obtener su expresión algebraica.

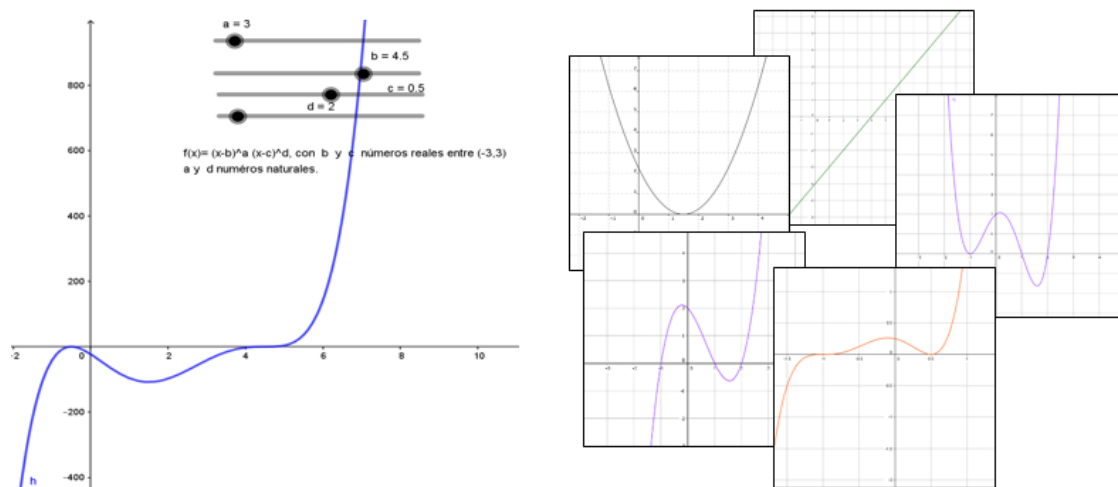


Figura 4. Ejemplo para analizar las gráficas en su variación global y local, según su grado y cortes. (Izquierda). Ejemplo de gráficas que se espera se puedan modelar (Derecha)

Con este diseño se pretendió problematizar los saberes sobre las funciones lineales y cuadráticas y desarrollarlos para caracterizar a las funciones polinómicas según sus comportamientos globales y cualidades locales en intervalos cercanos a cero y las raíces reales.

Diseño 2. Regla de signos de Descartes en las derivadas de funciones polinómicas

El objetivo de este diseño, afianzado en el análisis de la gráfica de una familia de funciones y el uso de calculadoras para comprobar las conjeturas, es que emerja un acercamiento a la regla de los signos de Descartes al vincular la cantidad de cambios de signos de las derivadas de la función alrededor del $x = 0$ y las raíces reales positivas que se perciben. Establecida esta conjetura para funciones lineales (Figura 5) y cuadráticas (Figura 6), donde el significado de la primera derivada se asocia a si la función crece o decrece; la segunda derivada a si la función es cóncava o convexa en las cercanías del punto, argumentos conocidos por los estudiantes se complejiza al aumentar el grado de la función polinómica en estudio. Contar los cambios de signo de las derivadas en 0 determinamos la cantidad de raíces reales positivas más menos un número par.

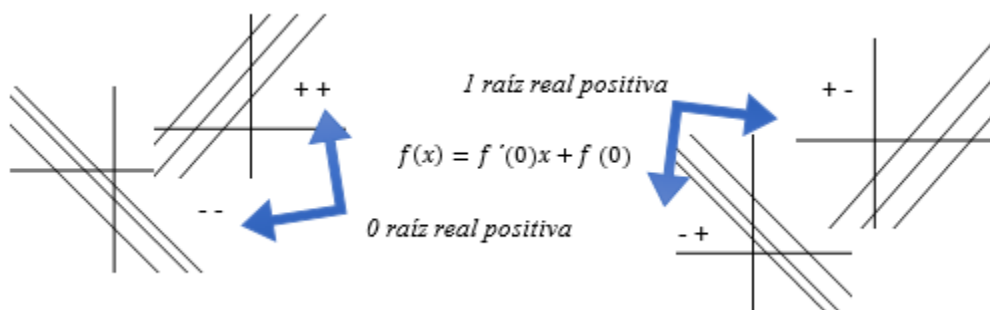


Figura 5. Función lineal

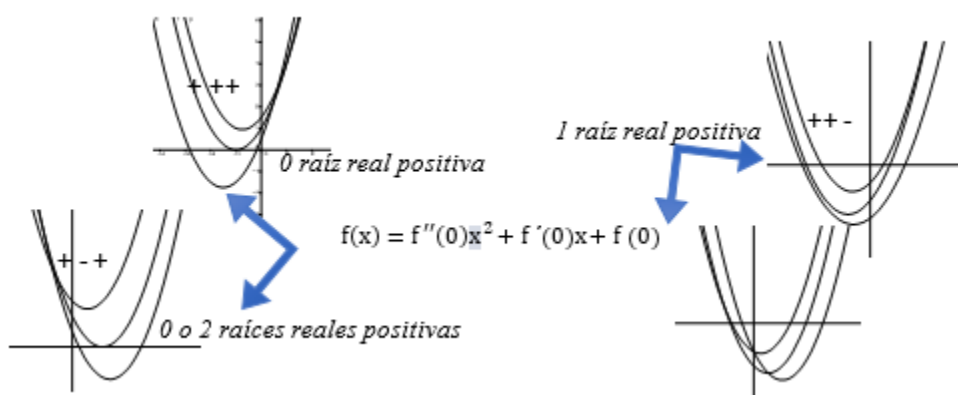


Figura 6. Función cuadrática

Si se logra estabilizar la regla de los signos de Descartes, percibida en el análisis de las familias de curvas ¿podríamos conjeturar sobre los signos que corresponden a las derivadas superiores a 2? (Figura 7).

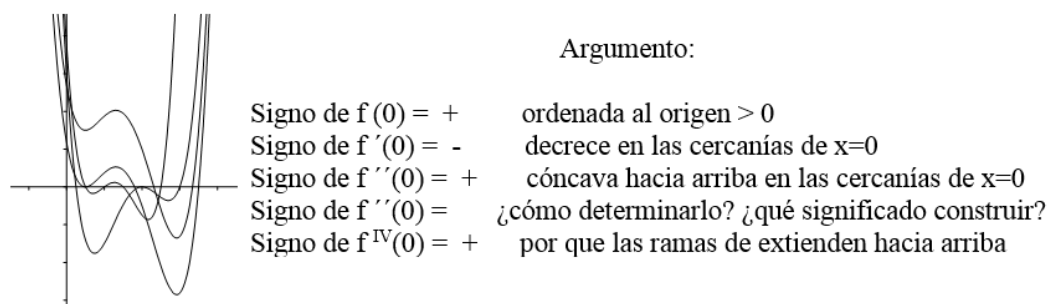


Figura 7. Funciones de grado superior a 2.

¿Utilizar la regla de los signos al observar que esta familia de curvas posee 0, 2 o 4 raíces reales positivas podría darnos luz sobre la tercera derivada? Cuestionamiento que nos transporta a revisar la articulación de las variaciones y robustecer la mirada hacia funciones, su forma, la variación de sus variaciones.

■ A manera de conclusión

En estos diseños se promueve el análisis de las variaciones numéricas y gráficas para ajustar y describir tipos de comportamientos con estudiantes y profesores de nivel medio superior y hace falta un estudio más detallado sobre el empleo de la tecnología, en particular, calculadoras graficadoras fx-CP400 de Casio, que permitan decir que argumentos se favorecen con estos instrumentos.

Lo que acontece en actividades como las descritas, en donde se incentiva la reflexión sobre la forma y funcionamiento de diferentes entes matemáticos mediante gráficas, ya sea en papel o en la pantalla del instrumento tecnológico, convoca otras expresiones como la tabular o algebraica para generar red de modelos, y en esto se evidencia fragilidad del acercamiento escolar a funciones polinomiales más allá de las cuadráticas.

La problemática anterior descrita, puede ser por dos razones: 1.- Si se trabaja en el contexto escolar, no se ha logrado significar a la función polinómica, incluso para el primer y segundo grado. 2.- Hace falta proveer a los profesores de medios que les permitan significar a estas y otras funciones para que ellos logren hacer lo propio con sus estudiantes. En este último aspecto consideramos que, pese a la gran variedad de reportes sobre el tema, sigue siendo demandante estudiar la formación inicial de profesores de matemáticas, por ejemplo para nivel medio superior, lo cual promovería el robustecimiento de la categoría de modelación escolar en la formación de futuros profesores.

■ Referencias bibliográficas

- Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18 (1), 19-48.
- Berry, J. (2002). Developing mathematical modelling skills: The role of CAS. *ZDM*, 34 (5), 213-220.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), pp. 103-128.
- D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of mathematical modeling and application*, 1(1), 89-98. Disponible en: <http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling>.
- Gilbert, J. (2004). Models and modelling: Routes to more authentic science education. *International Journal of Science And Mathematics Education*, 2, 115-130.
- Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar*. (Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Méndez, M. y Cordero, F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27. (Pp. 1603-1610) Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Koponen, I. (2007). Models and modelling in physics education: a critical re- analysis of philosophical underpinnings and suggestions for revision. *Science & Education*, 16, 751- 773.
- Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), 319-333.