

APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, CASO: SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS POR EL MÉTODO DE APLICACIÓN DE ÁREAS, MEDIADO POR CABRI GEOMETRE II PLUS

Martha Cecilia Mosquera Urrutia; Vivian Libeth Uzuriaga López;
Universidad Surcolombiana, Universidad Tecnológica de Pereira. (Colombia)
martha.mosquera@usco.edu.co, vuzuriaga@utp.edu.co

Resumen

Se presentan resultados de investigación que evidencian problemas presentados por un grupo de docentes en formación inicial, en la planeación de clase para la enseñanza de la ecuación cuadrática fundamentada en el aprendizaje basado en problemas y mediada por Cabri Geometre II Plus. Los problemas encontrados se relacionan con: dominio matemático y didáctico de la ecuación cuadrática, sus representaciones, el manejo del software, creencias y concepciones de enseñanza. Los resultados son pertinentes para los profesionales que trabajan en la formación de profesores, los didactas e investigadores en educación matemática.

Palabras clave: ecuación cuadrática, manejo de software, aprendizaje basado en problemas

Abstract

This report focuses on research outcomes which show the problems that a group of initial training teachers have presented when planning their lesson for the teaching of the quadratic equation supported by problem-based learning and mediated by CabriGeometre II Plus. Such problems are related to their mathematical and didactic knowledge of the quadratic equation, its representations, the software management, teaching beliefs and conceptions. The results are relevant for the professionals who work in teacher training courses, the specialists in educational methodology and the researchers in mathematical education as well.

Key words: quadratic equation, software management, problem-based learning

■ Introducción

Se presentan resultados de un estudio de caso múltiple, enmarcado en un proceso de investigación formativa que se adelanta desde el año 2012 entre los programas de formación de profesores de matemáticas de dos universidades colombianas, con el objetivo de consolidar una propuesta de articulación de los cursos: Metodología de la Investigación, Seminario de Investigación, Didáctica de la Matemática I y II, Diseño de Software y Práctica Profesional Docente. La propuesta de articulación busca

aportar a los profesores en formación, elementos teórico-prácticos que les permitan proponer, aplicar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el marco de los Estándares de Competencias Básicas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, e interactuar con los docentes en ejercicio, en la resolución de problemas propios de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares.

■ Sobre el ciclo del Aprendizaje Basado en Problemas

Entendemos el Aprendizaje Basado en Problemas ABP, como un método didáctico que permite al estudiante que se desempeñará como profesor, desarrollar capacidades, conocimientos y habilidades, para identificar, analizar y proponer alternativas de solución a los problemas de enseñanza y/o aprendizaje de la matemática, de manera eficaz, eficiente y humana, utilizando principalmente la investigación como estrategia pedagógica IEP (Uzuriaga, V. y Mosquera, M. 2012, p. 232).

Esta etapa de la experiencia se realizó con los estudiantes de los cursos de Didáctica de la Matemática I y II. La tarea consistió en “planificar una clase” para el grado noveno con el objetivo de “estudiar el conjunto solución de una ecuación cuadrática en una variable”. Con el fin de planificar la clase, los profesores en formación se organizan en pequeños grupos, diseñan y discuten los planes de clase y luego se realiza una plenaria de socialización.

Identificar la situación problemática: las secuencias didácticas preparadas por ellos, contenían en general cuatro bloques:

- La definición de ecuación de segundo grado con una incógnita y de las raíces
- Métodos de resolución
- deducción de la formula general
- Situaciones en el lenguaje verbal que pueden resolverse al traducir la información que da el enunciado de dichos problemas a través de una ecuación cuadrática.

En Colombia, el estudio de las ecuaciones de segundo grado se realiza en el grado noveno y comprende generalmente esos cuatro aspectos.

En relación con el concepto de ecuación cuadrática se acordó asumir que *es toda ecuación en la cual una vez se simplifica, el mayor exponente de la incógnita es 2; que las soluciones (también llamadas raíces) son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación* y que resolver la ecuación es *hallar las raíces de la ecuación*; estos conceptos son elaboraciones, a través de las cuales se trata de recoger lo que expresan la generalidad de los libros de texto.

En relación con los objetivos de enseñanza, las secuencias se concentraban en lograr que los estudiantes identificaran las ecuaciones de segundo grado, aprendieran algunos métodos de resolución, entre los cuales se encuentra la fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado y finalmente resolvieran algunos problemas tipo.

En cuanto a las propuestas para el desarrollo del pensamiento, en las secuencias didácticas encontramos entre otras, las siguientes: (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2003, p. 81)

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos numéricos infinitos (pensar con las variaciones y el álgebra)
- Observo las propiedades y analizo las relaciones entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones (pensar con las variaciones y el álgebra)
- Puedo hacer una demostración práctica como un rompecabezas, utilizando relaciones entre áreas (pensar con la geometría)
- Con las herramientas que ya tengo, descubro fórmulas y procedimientos para encontrar áreas (pensar con las medidas)

Sin embargo, al revisar las tareas propuestas, no es claro como a partir de ellas, se logra que los estudiantes desarrollen estos procesos de pensamiento.

Definir el problema: nos preguntamos entonces si *¿es adecuado introducir a los estudiantes en el estudio de las ecuaciones cuadráticas por medio del caso particular $ax^2 + bx + c = 0$?*

Cuando cuestionamos la elección de esta alternativa didáctica, esperamos que el futuro profesor reflexione en torno a, si el concepto que se construye, favorece posteriormente la comprensión de ecuaciones cuadráticas de otro tipo, un sistema de ecuaciones cuadráticas con mayor número de incógnitas o por el contrario obstaculiza visiones más generales y abstractas, como las que se proponen por ejemplo a partir de los Estándares (Ochoviet, 2009).

Es importante destacar que, en ocasiones, esta discusión se vió opacada por la culpa, frente a la determinación de problemáticas en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la ecuación cuadrática, su solución y los procesos para el desarrollo del pensamiento, algunos profesores y estudiantes encuentran causas asociadas a la metodología de enseñanza, a la práctica, al sistema de evaluación, a las condiciones sociales y personales de los estudiantes... pero resulta algo complicado lograr que los futuros profesores, atribuyan las dificultades de comprensión a la complejidad intrínseca de los objetos matemáticos, a su naturaleza y los modos característicos del pensamiento y concentren sus energías en buscar elementos en las matemáticas que les permitan mejorar su conocimiento.

Explorar el problema: se hizo una lluvia de ideas con el fin de determinar el origen de los problemas, y de conocer otras formas de definir y de representar tanto la ecuación de segundo grado, como el conjunto solución.

Tras identificar los problemas, hubo necesidad de profundizar con los asociados a la ecuación de segundo grado y su solución. Se recurrió al marco de Los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000); según ella, el álgebra lineal se puede ver como el resultado de superar dos obstáculos epistemológicos, uno que rechaza los números dentro de la geometría y el otro que rechaza la intuición geométrica en el dominio de la aritmética.

Al estudiar algunos aspectos del razonamiento de los estudiantes en álgebra lineal, encontró que ellos piensan en una forma más práctica que teórica y que esto se convierte en un obstáculo para el razonamiento teórico propio del álgebra. Distingue entonces tres modos de pensamiento: sintético-geométrico SG, analítico-aritmético AA y analítico-estructural AE. Estos modos de pensamiento aparecen en la historia

de forma secuencial, pero ninguno de ellos elimina a los otros dos.

En el modo de pensamiento sintético-geométrico (SG) los objetos son pensados en su forma más intuitiva, como figuras geométricas, en este modo se podrían pensar las ecuaciones cuadráticas como rectángulos o cuadrados.

En el modo de pensamiento analítico-aritmético (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de fórmulas que permiten calcularlos, por ejemplo $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, los números poligonales.

En el modo analítico-estructural (AE) los objetos son pensados a través de sus propiedades o de los axiomas que permiten explicarlos. Por ejemplo cuando nos referimos a un lugar geométrico, con las condiciones de centros, vértices, ejes de simetría y distancias, o en el caso del las soluciones con el grupo de Galois.

El uso del marco se considera pertinente, porque los profesores deben propiciar a los estudiantes escenarios que les permitan abordar la ecuación cuadrática y sus soluciones desde lo geométrico, lo numérico y lo analítico, y generar conciencia sobre ello; porque en algunos casos, reportan errores que se generan cuando ellos presentan los conceptos en un modo y pretenden que los estudiantes respondan evaluaciones o hagan interpretaciones en otro modo.

Plantear la o las soluciones: A partir de algunas discusiones que habían sostenido en los cursos de Epistemología e Historia de la Matemática, los futuros profesores, reunidos en equipos de trabajo realizaron pequeñas investigaciones, con el fin de reconocer diferentes métodos solución y aspectos referentes al tratamiento histórico epistemológico de la ecuación de segundo grado.

Entre los métodos aportados por ellos se destacan:

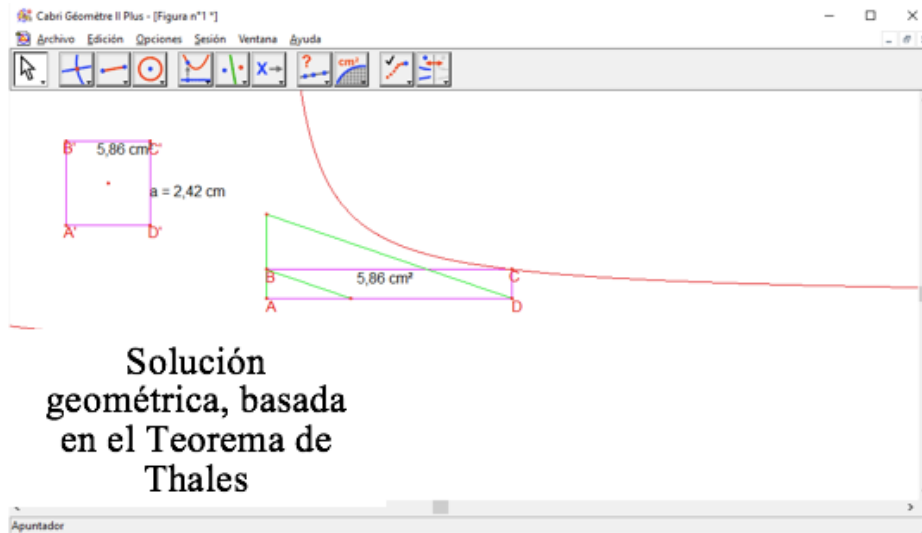
- Solución de ecuaciones cuadráticas en Babilonia: los problemas son de tipo geométrico y aluden generalmente al perímetro $2(x+y)$ y al área xy de un rectángulo.
- Las ecuaciones diofánticas cuadráticas con dos o más variables, ternas pitagóricas y Teorema de Pitágoras. Numérico, geométrico.
- Métodos griegos, cuadraturas, demostraciones, exhaustión. Geométrico, analítico.
- Métodos árabes. Algebraicos, aritméticos, geométricos.
- Las cónicas, funciones, gráficas, y visualización de sus raíces.
- Otras soluciones geométricas y gráficas.
- Manipulables.

Estudiados cada uno de estos métodos, se decidió estudiar el método de aplicación de áreas porque posibilita el tránsito de lo geométrico a lo analítico.

Llevar a cabo el plan: entre las secuencias didácticas propuestas por los estudiantes se escogió una para ser estudiada y realizar el estudio de clases.

La situación problema:

“Dado un cuadrado de lado a , construir un rectángulo que tenga la misma área”



Se estudiaron varias maneras de solucionar la ecuación desde lo numérico, lo geométrico y lo analítico. Algunas dificultades radican en que los estudiantes tienen vacíos en geometría, lo que ha obligado a realizar un rediseño de la secuencia.

Los logros se concentran en que las unidades propuestas por los profesores muestran el tránsito de un modo de pensar a otro, o dicho en el lenguaje de Colombia, muestran un uso coherente de los estándares curriculares.

Evaluar el proceso: Como resultado se obtuvieron unidades didácticas para enseñar el concepto de conjunto solución de una ecuación cuadrática, no limitado únicamente al ámbito algebraico. Los futuros docentes diseñaron tareas, que involucran ecuaciones cuadráticas, identificando algunos fenómenos y contextos que dan sentido a las ecuaciones de segundo grado como, por ejemplo: el movimiento parabólico y además decidieron estudiar la función cuadrática y las ecuaciones de segundo grado en una o dos variables, como resultado de identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos (estructura conceptual).

También acogieron la recomendación de presentar el conjunto solución de una ecuación de segundo grado en diferentes modos de pensamiento como los presentados por Sierpinska (2000): el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico estructural y por Pinto y Parraguez (2015): el geométrico-gráfico-convergente y el analítico operacional; con la convicción de que diferentes maneras de pensar un objeto matemático, le permitirán a los estudiantes lograr una comprensión más profunda de ellos, esto de manera incipiente fue asociado a los diferentes sistemas de representación. Allí cobran sentido: por un lado, el uso del método de Aplicación de las Áreas (técnica de Álgebra Geométrica que utilizaron los griegos para la resolución de ecuaciones) y el uso del software Cabri Geometre II Plus

■ Referencias bibliográficas

- Acevedo, M. & Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra: de la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Colombia: Colciencias.
- Díaz Barriga, E. (2006). *Geometría dinámica con Cabri-geomètre*. (3a ed) México D.F.: Editorial Kali.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/375/>
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/444/>
- Gonzalez, P. (2003). *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.
- Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría de los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 337-344.
- Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student's thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier, *On The Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.