VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

# LA NOCIÓN DE ACUMULACIÓN COMO RESIGNIFICACIÓN DEL CÁLCULO INTEGRAL. APRENDIZAJE DE SIGNIFICADOS Y LA MATEMÁTICA FUNCIONAL

**Cristina Isabel Mota Santos, Francisco Cordero Osorio**
**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)**
**cristina.mota@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx**

**Resumen**
Se muestran los avances de una investigación cuyo objetivo principal es el diseño de situaciones de aprendizaje para resignificar el Cálculo integral, a través de la noción de acumulación como una base epistemológica que expresa la funcionalidad del conocimiento matemático en escenarios de la escuela, de otros dominios de conocimiento y de la gente. Se revelan y valoran los usos del conocimiento matemático en una modelación matemática de una situación real de plagas en cultivos para realizar una transversalidad de saberes matemáticos en el nivel superior y en el nivel medio superior.

**Palabras clave:** acumulación, marco de referencia, resignificación

**Abstract**
This paper shows a preview of a research focused on the design of learning situations to provide a new approach to integral calculus, through the notion of accumulation as an epistemological basis that expresses the functionality of mathematical knowledge in school scenarios, through other domains of knowledge and people. The uses of mathematical knowledge are revealed and valued in a mathematical modeling of a real situation of crop plagues in order to use mathematical knowledge transversely, at the higher and high-middle levels.

**Key words:** accumulation, frame of reference, re-signification

## Introducción

Una problemática en la educación matemática es que la matemática escolar ha perdido el eslabón con el cotidiano de las realidades. En ese sentido estamos de acuerdo con Cordero cuando afirma que:

> La educación tiene como fin que los ciudadanos se acerquen a su realidad para entenderla y transformarla, en nuestro caso, la matemática escolar debe estar vinculada con la realidad del que aprende, pero desafortunadamente esta relación no se cumple. Hablar de realidad es muy amplio por lo cual para poder tener un impacto en la educación se tendrá que restringir para poder estandarizarla, en el caso de la matemática se deberán considerar todos los niveles educativos y la diversidad de disciplinas, así como el trabajo y la ciudad. Tal vez, la realidad debería ser interpretada en lo habitual de todos estos escenarios, donde se expresan usos rutinarios del conocimiento matemático: lo

> funcional. Es decir, cotidianos del disciplinario, del trabajador y del ciudadano. (Cordero, 2016a, pp 59-88)

Revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en los distintos escenarios del cotidiano es un trabajo enmarcado en un Programa Socioepistemológico cuya tesis se basa en el sujeto olvidado, a través de dos líneas de trabajo simultáneamente: la Resignificación del Conocimiento Matemático y su Impacto Educativo (Cordero, 2016b). Estos usos y resignificaciones, en sus situaciones específicas, conformarán categorías de conocimiento las cuales serán la base de los nuevos Marcos de Referencia para la matemática escolar, considerando al conocimiento matemático como funcional y transversal en los distintos niveles educativos.

En ese sentido, se ha visto que la enseñanza del Cálculo Integral esta normado por un discurso Matemático Escolar (dME) el cual ve al conocimiento matemático como algo ya acabado y utilitario. Este conocimiento matemático suele aprenderse de manera mecánica, mediante la memorización de conceptos y algoritmos, y no permite un aprendizaje significativo, ni mucho menos funcional.

En trabajos como los de Artigue (2003) se muestra como las primeras investigaciones realizadas en niveles universitarios comienzan sobre el conocimiento de los alumnos en áreas específicas de las Matemáticas, con énfasis particular en el Análisis elemental (o Cálculo, en la cultura anglosajona), un área percibida como fuente principal del fracaso en el nivel universitario. Estas investigaciones se enfocaban al dominio que los alumnos tenían en cálculos meramente algebraicos (cálculo de derivadas y primitivas), memorización de definiciones, criterios de comprobación, razonamiento lógico y demostraciones, y uso eficiente de sus recursos matemáticos. Haciendo notar las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, como el dejar la responsabilidad de la reorganización del conocimiento a los alumnos, con efectos dramáticos para la mayoría de éstos, especialmente en la transición Secundaria (medio superior) - Universidad.

El dME provoca fenómenos como la opacidad, la adherencia y la exclusión, pues no considera el conocimiento de la gente (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). Todo esto debido a que la Matemática Escolar carece de Marcos de Referencia (MR) en los cuales la fuente de sentido del conocimiento sean sus usos en situaciones específicas, reflejando así la existencia de una epistemología dominante cuya base de sentido es la justificación razonada, es decir, lo estructural y sistemático (Cordero, 2016a). Por lo general en el Cálculo, los conceptos fundamentales son señalados por la derivación e integración, explicándolos a través de las concepciones del límite y de función, y acompañados de sus representaciones geométricas: la recta tangente a una curva y el área bajo una curva, respectivamente. Profesores y estudiantes “aprenden” a decir que es la derivada e integral sin tener una explicación clara de porqué es así (Cordero, 2003).

Por tal razón, en nuestro trabajo queremos dar cuenta de la Categoría de Acumulación y de la transversalidad de conocimiento en el nivel superior y en el nivel medio superior. Para ello se está diseñando una situación escolar de socialización para resignificar el Cálculo integral a través de la noción de acumulación como una base epistemológica que expresa la funcionalidad del conocimiento matemático en escenarios de la escuela, de otros dominios de conocimiento y de la gente. Se revelan y valoran los usos del conocimiento matemático en situaciones específicas, esto nos permite descentralizar la atención en el objeto matemático y ver así lo funcional del conocimiento.

## Un nuevo marco de referencia

La centralización en el objeto matemático que surge en la matemática escolar es producto de la falta de Marcos de Referencia. Por una parte, se concibe a la integral de Riemann como el núcleo de desarrollo del Cálculo integral y por otra parte la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ representa lo que hoy se conoce como teorema fundamental del Cálculo: dada una definición de "integral de una función", f debe de cumplir ciertas condiciones para que la expresión tenga sentido y resulte que "la función F sea la primitiva de f". Sin embargo, la expresión ha pasado por diferentes acepciones que han dependido de la evolución de integración (Cordero, 2003).

Se analizan las obras de "Oeuvres Complètes de Cauchy" (1882), "Oeuvres Complètes de Riemann" (1898), "Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives" de Lebesgue (1922) y las interpretaciones de los trabajos de Luzin (Pesin, 1970) y Denjoy (Lebesgue, 1966) en las cuales se reconoce que el papel que jugó la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ es el de construir una función a partir de su derivada, siendo este el problema fundamental de la teoría de integración, Cordero(2003).

Al analizar el conocimiento que se ofrece y adquiere a través de la didáctica junto con el conocimiento que se deriva de la producción científica, se reconoció a la resta, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

Como el patrón de construcción de la teoría de integración (Cordero, 2003).

Una hipótesis de nuestro trabajo es que la articulación entre lo institucional y lo funcional ayudara a romper la centración en el objeto. Las nuevas argumentaciones corresponderán a las resignificaciones de los usos del conocimiento matemático, las cuales tensarán las orientaciones clásicas de resolución de problemas en contra parte de una orientación innovadora, la modelización. La primera se ha preocupado por los procesos del conocimiento, la segunda llama la atención sobre la funcionalidad del conocimiento (Cordero, 2016b).

Para ello el marco de referencia (MR) que se propone está enfocado a lo que pudiera ser el conocimiento institucional cuya base es la manifestación de sus usos en el discurso matemático escolar U(CM), en otros dominios y en el cotidiano, donde se resignifican (Res) al debatir entre sus funcionamientos (Fu) y sus formas (Fo) al paso de la vivencia escolar, del trabajo y de la ciudad. En ese sentido lo institucional será aquello que hace que la categoría de conocimiento matemático ζ(CM) se desarrolle y permanezca, se acepte como producto material social que tenemos que enseñar y aprender (Cordero, 2016a). (Ver Figura 1).

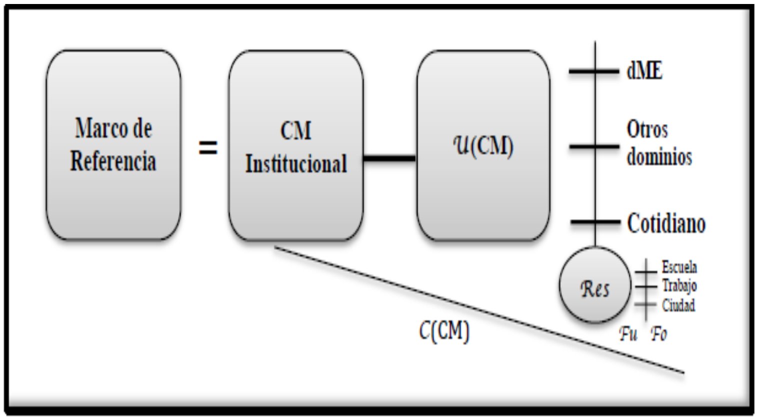


***Figura 1.*** Procesos de socialización del conocimiento. El cotidiano y lo funcional (Cordero, 2016a)

Entonces, queremos la construcción de un Marco de Referencia que resignifique al Cálculo Integral mediante la noción de acumulación. La expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ concebida como el patrón de construcción de la teoría de integración adquiere significado en el marco de las situaciones de variación y cambio, favorecida por el contexto de *cantidades que fluyen.*

La manera como decidimos concebir a los patrones de construcción en este trabajo es que el patrón, de algún modo, representa una idea que prevalece independientemente del contexto de la situación y será considerado en la construcción, cuando el grupo humano logra desarrollar el uso de su conocimiento (Cordero, 2005, p. 271).

Se logró matizar que los problemas cuya solución exige de una integración son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación o cambio, los cuales no se refieren a las *causas* del fenómeno de variación (por qué varían), sino al *cuánto varían* una vez que se reconoce *cómo varía* el fenómeno. Es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica (cantidad desconocida $F(t)$ que relaciona funcionalmente a las variables involucradas) al fenómeno de variación o cambio. La configuración de esta ley depende de si son dadas, o no, las condiciones iniciales del problema específico (Cordero, Muñoz y Solís, 2002).

Pero es en el marco del estado de las situaciones de cambio y variación donde Cordero (2003) encuentra que la resta $F(b) - F(a)$ otorga una significación de la integral ligado al contexto de cantidades que fluyen. Dicha resta es la representación de "la noción de acumulación en dos categorías: estática, en tanto que es "algo que se concentra" y se expresa como "$E_f - E_0 = A$" y dinámica en tanto que es "algo que se está agregando a una cantidad" y se expresa como "$E_f = E_0 + A$".

La intervención en la problemática consistirá en crear instrumentos de recuperación que pongan en diálogo horizontal la matemática escolar y la matemática del cotidiano. La primera es la institucionalización de la matemática y la segunda es la funcionalidad de la matemática. Se distinguirán los ámbitos y definirán cotidianos con adjetivo. Estos serán los instrumentos de recuperación (Cordero, 2016b).
Se atenderá a la problemática anteriormente planteada mediante la inclusión de nuevos significados asociados a la integral. La estructura del trabajo se presenta de la siguiente manera.

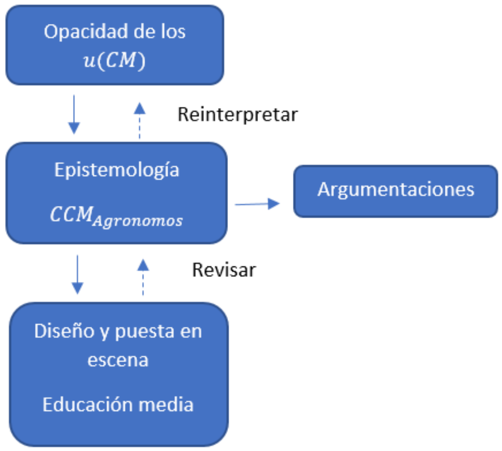


***Figura 2.*** Esquema del proyecto de investigación

Se atenderá al fenómeno de opacidad de los usos del conocimiento matemático mediante la incorporación de una epistemología de la integral revelada en nuestro caso de una comunidad de agrónomos, la cual será la base para nuestro diseño de una situación escolar de socialización. Dicha epistemología permitirá formular nuevas argumentaciones en la cual la fuente de sentido de la integral sea la noción de acumulación.
Cordero (2016a) señala que:

> Socialmente hablando, el tipo de explicación, filosófica y epistemológica, que se acepte sobre la construcción del conocimiento repercute directamente en las maneras de organizar el sistema educativo, seleccionar modelos de enseñanza, diseñar el currículo escolar, formular episodios de aprendizaje, e inclusive, definir el "conocimiento" en el aula. De este modo, un enfoque que concibe al conocimiento construyéndose a la par de la experiencia del humano permite entender que el conocimiento se construye cuando es utilizado; cuando tiene una función específica situacional. (p.12)

Trastocar la epistemología dominante de la matemática escolar; tiene que abrirse a la pluralidad epistemológica que obliga la inclusión del "sujeto olvidado". Este sujeto usa su conocimiento matemático en formas y funciones distintas que la escuela, hasta hoy, no ha podido imaginarse. Por eso decimos que esa constitución derivará en una escuela ampliada donde el uso del conocimiento matemático dialogará horizontalmente entre el descubrimiento académico y la revelación del conocimiento nativo de la gente. Este último, en términos genéricos, es el sujeto que aprende, el que trabaja y el que vive en una ciudad; sin embargo, está fuera de la escuela (Cordero, 2016b).

## Reflexión: Epistemología para el diseño de la situación escolar de socialización

Con el fin de estudiar cómo emerge la noción de acumulación en una situación de uso del conocimiento matemático, relacionada con la comunidad agrónoma, estudiamos el ciclo de vida del ácaro llamado Brevipalpus Chilensis (B. Chilensis), el cual es una plaga que representa un problema económico en vid de mesa y vinífera, kiwi y cítricos de Chile. Cuando atacan a los brotes, hojas y sarmientos de la planta, afecta seriamente la capacidad fotosintética de ella, llegando a disminuir hasta en un 40% su rendimiento (Vargas & Olivares, 2007). El crecimiento y desarrollo fenológico del B. Chilensis se mide en términos de grados – días, los cuales son una unidad combinada de tiempo y temperatura, utilizada para medir el desarrollo o progreso de un organismo desde un punto a otro en su ciclo de vida (Huincahue, 2011).

Se reconoce que el manejo sustentable de las plagas debe estar basado en el conocimiento biológico de ellas y de su interacción con el cultivo. Con base a esto, Huincahue (2011), en una actividad de modelación matemática, propuso una manera de calcular la constante térmica del B. Chilensis, entendida como el número de grados – días que han de ser acumulados para que ocurra un evento determinado (eclosión, mudas larvarias o ninfales, pupación, etc) y que permite contribuir al conocimiento biológico de este ácaro. En este cálculo, analizamos cómo emerge la noción de acumulación, en una situación de cambio y variación ligada al cálculo de la acumulación de grados – días del B. Chilensis, buscando ofrecer, a futuro, un marco de referencia para hacer del concepto de integral un conocimiento funcional, caracterizado por una categoría de acumulación.

Un aspecto muy importante para la elaboración del diseño es que la discusión de integración debe iniciar precisamente con la cantidad “desconocida” (función primitiva) que se quiere hallar, al exigir de ésta reconocer su variación (función derivada) en un contexto, para finalmente conocer su integral (cantidad desconocida) (Cordero, 2005). Este aspecto también es señalado en trabajos como los de Muñoz (2000 y 2003) en los cuales busca las condiciones que puedan propiciar la relación de lo algorítmico y conceptual pero vista como unidad dialéctica. Dicha condición es trabajar con problemas específicos que exijan o requiera de una integración para hallar la solución.

## Referencias bibliográficas


Artigue, M. (2003). ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 117-134.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(3)*, 265-286.

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinareidad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, y D. Zakaryan (Eds). *XX Actas Jornadas Nacionales de Educación Matemática (23-30)*, ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV. Recuperado de http://ima.ucv.cl/xxjnem.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2002). *La Integral y la Noción de Variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Huincahue, J. (2011). *Dinámica de Modelos de Depredación Continuos e Impulsivos y Estudio Fenológico del Brevipalpus Chilensis*. Tesis de Magíster no publicado, Pontificia Universidad Católica De Valparaíso.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2)*, 131-170.

Muñoz, G. (2003). Génesis didáctica del Cálculo Integral: el caso de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(2),* 415-421. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.