VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

# LOS TIPOS BÁSICOS DE VARIACIÓN Y LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

**Bogar Ulises Murillo Gastelum, Agustín Grijalva Monteverde**
Universidad de Sonora. (México)
bogarulises@gmail.com, guty@gauss.mat.uson.mx

**Resumen**
Se presenta un avance del trabajo centrado en el diseño de secuencias de actividades didácticas que tienen el propósito de que el estudiante de bachillerato realice un estudio introductorio al Cálculo siguiendo un enfoque variacional, centrado en un estudio en el que caracterice y cuantifique los tipos básicos de variación utilizando la derivada. El diseño se realiza empleando algunas nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS). Se realiza un análisis de las prácticas matemáticas que pretenden promover los programas de estudio de la Dirección General de Bachillerato y el Bachillerato General Universitario de las Preparatorias Incorporadas a la Universidad de Sonora en la asignatura de Cálculo Diferencial, con la intención de construir el significado institucional de referencia utilizado en nuestra propuesta.

**Palabras clave**: derivada, tipos básicos de variación

**Abstract**
This paper reports the advance of a research work focused on the design of sequences of didactic activities for high school students to carry out an introductory study to Calculus. They should follow a variational approach centered in a study where they can characterize and quantify the basic types of variation by using the derivative. The design is based on some theoretical notions of the Onto-semiotic Approach of Cognition and Mathematical Instruction (OSA). We analyze the mathematical practices that are intended to promote the programs of study of High School General Direction and University General High School of the preparatory courses incorporated into the University of Sonora in the subject of Differential Calculus in order to construct the institutional meaning used in our proposal.

**Key words**: derivative, basic types of variation

## Introducción

En diversas investigaciones se reportan dificultades en el aprendizaje del Cálculo, debidos al predominio del tratamiento algorítmico-algebraico, con propuestas de enseñanza en las que no se logra una conceptualización significativa. Así, se dejan de lado procesos de análisis gráficos, visuales y variacionales, que permitirían un acercamiento distinto, como se ve en Cantoral y Farfán (1998), Flores (2006). Alrededor de esta problemática existen diferentes visiones y aportaciones que señalan aspectos de diversa índole, como las siguientes:

Existencia de cierta resistencia que muestran los estudiantes al uso de recursos visuales, Vinner (1989) citados por Hitt (2003b). Las dificultades para establecer una estructura conceptual de la relación funcional entre la variable dependiente y la independiente, pues para ello se requiere del razonamiento covariacional, Carson y Oehrtman (2005).

El tratamiento puntual en el currículo escolar a la derivada como la *pendiente de la recta tangente a la curva en un punto* se convierte en un obstáculo a la hora de conceptualizar a la derivada como una función, como puede verse en, Ibarra, Bravo & Grijalva (2001, p.116).

Algunas dificultades de los estudiantes para construir estrategias variacionales están asociadas a la actividad de analizar la gráfica de una función utilizando la primera, la segunda y tercera derivada, como puede verse en Cantoral et al (1998). Tomando en cuenta los resultados reportados consideramos la necesidad de promover el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional entre los estudiantes, como una herramienta fundamental en el estudio del Cálculo, creemos que el impulso de éstos favorece al desarrollo de un significado rico de la derivada en contraste con las propuestas didácticas tradicionales, como se señala en Cantoral et al (1998). De modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica, según Flores (2006).

## Elementos teóricos y metodológicos

El diseño se hace con base en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Este enfoque permite abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje con una visión holística y pormenorizada para profundizar y articular las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático. Retomamos algunas nociones teóricas presentadas en Godino, Batanero y Font (2012), entre ellas, sistemas de prácticas (operativa y discursiva) las cuales se consideran el centro de la actividad matemática que el individuo usa para analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones problemas; la tipología de objetos y significados matemáticos que intervienen y emergen en los sistemas de prácticas, así como los criterios de idoneidad didáctica que utilizamos para diseñar y valorar las secuencias.

Cuando abordamos una *situación problema* utilizamos un determinado *lenguaje* verbal o simbólico. El lenguaje es la parte ostensiva que nos permite comunicar a otros lo realizado de manera argumentativa, los *argumentos* justifican los *procedimientos* y *proposiciones* que relacionan los *conceptos* entre sí. A estos seis tipos de entes intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas se les denomina objetos matemáticos primarios (Godino et al, 2008).

Los objetos personales e institucionales no tienen un único significado. Así, si en una clase de matemáticas (entendida como una institución) se lleva a cabo un sistema de prácticas de donde emerge un objeto matemático, el significado que los estudiantes asignen a dicho objeto está determinado por el contexto en el que se construye, es decir dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, Grijalva (2007) y Pino Fan (2013).

Para el diseño de esta propuesta se hizo un estudio del significado institucional de referencia, con el fin de determinar objetivos a alcanzar, tomando en cuenta herramientas teóricas señaladas. Por un lado analizamos el programa de la asignatura del Cálculo Diferencial propuesto por la Dirección General de Bachillerato (DGB) y el Bachillerato General Universitario de las Preparatorias Incorporadas a la Universidad de Sonora, a la vez analizamos las sugerencias bibliográficas que proponen dichos programas.

Con relación a los significados institucionales utilizamos los siguientes tipos.

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio

## La propuesta

Nuestra propuesta está compuesta por secuencias las cuales se organizan en tres momentos: inicio, desarrollo y cierre. En las actividades de inicio, se plantean situaciones problema que permiten identificar y recuperar las experiencias y conocimientos que han adquirido los estudiantes en su formación previa, posteriormente en las actividades de desarrollo, se plantean situaciones problema de cuya solución deberán emerger nuevos conocimientos dando la oportunidad de contextualizar las situaciones planteadas y, por último, en las actividades de cierre, se integran todos los conocimientos desarrollados en las actividades de inicio y desarrollo, con el objetivo de institucionalizarlos

Con base en principios socio-constructivistas, donde los alumnos asuman la responsabilidad del aprendizaje; promuevan el debate y favorezcan el dialogo entre los sujetos, que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión Godino (2014). Para este fin se promueven momentos de trabajo individual, en los cuales los estudiantes deben responsabilizarse del estudio, reflexionar, comprender la situación problema abordada y construir su conocimiento subjetivo con base en las prácticas que realizan al resolver la situación abordada. Después se forman pequeños equipos en la que cada miembro expone sus conjeturas y reflexiones, enriqueciendo los puntos de vista logrados individualmente, refinando y validando su conocimiento subjetivo y, por último se realiza un trabajo grupal en el que los estudiantes interactúan con el profesor con la intención de que el docente reconozca y resuelva los posibles conflictos de los estudiantes, a la vez se tratará de re-direccionar las conjeturas erróneas construidas por los mismos.Un ejemplo de las situaciones que retomamos para el diseño de las actividades es el llenado de recipientes (entre otras situaciones), en particular utilizamos un recipiente cónico y uno rectangular. En la columna de contenido se especifican los puntos que se espera desarrollen los estudiantes.

***Tabla 1.*** Secuencia 1

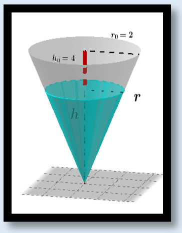
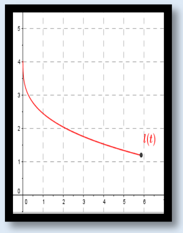
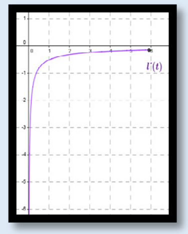
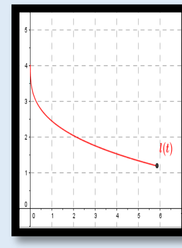
| Secuencias | Momentos y actividades | Contenido |
|---|---|---|
| Secuencia 1 | Inicio<br>Actividad 1. Trabajo individual (recipiente cónico). | Percibir el cambio usando la imagen del recipiente con agua.: ¿Qué magnitudes varían?, ¿Qué relación puedes establecer entre las magnitudes?, ¿Qué magnitudes dependen de la variación de otra?,. |
| | Actividad 2. Trabajo en equipo. | Con GeoGebra se hace un estudio dinámico, centrando el análisis en las preguntas de la Actividad 1. Se simula el proceso de llenado con el archivo “Recipiente cónico.ggb”, con la finalidad de refinar el razonamiento variacional intuitivo inicial. |
| | Actividad 3. Trabajo grupal. | Se propone cerrar la discusión, dirigida por el maestro dando la oportunidad a cada equipo de exponer sus inquietudes, reflexiones y conclusiones. |

| | | |
|---|---|---|
| | Actividad 4.<br>Trabajo en equipo. | Se estudian otros fenómenos, como: interpretar la variación del precio de una canasta alimenticia y propuestas de los estudiantes de fenómenos cambiantes que perciban en su cotidianeidad, etc. |
| | Desarrollo<br>Actividad 1, 2, 3, 4.<br>Trabajo en equipo.<br>En estas actividades se sigue la misma estructura. | Con el archivo “recipiente cónico.ggb”, se estudia la variación del ***área circular*** del agua de la parte transversal del cono al variar la ***altura***. Preguntas: ¿Cuánto varía la magnitud dependiente respecto a la independiente?, ¿La variación del área es siempre igual? Perciban patrones de cambio, y propongan una expresión analítica que modele la variación descrita. Otras preguntas: ¿Cómo se comporta la variación del área circular según los datos de la tabla y el bosquejo que realizaste? (creciente, decreciente o constante), ¿Cómo lo hace la variación del área circular y cómo se comporta la rapidez con la que crece o decrece según sea el caso? Esta última se realiza con la intención de que el estudiante se acerque cualitativamente a la rapidez con que varía una magnitud con base en las gráficas bosquejadas. |
| | Cierre<br>Actividad 1.<br>Se inicia trabajando en equipo y se cierra la actividad de manera grupal | Con los archivos “Actividad de cierre 1.ggb” y “Actividad de cierre 2.ggb”, estudiamos los modelos de la variación, con en el fin de asociar un tipo básico de variación a cada modelo, realizando un estudio dinámico, visualizando la construcción de la gráfica y la variación de un punto que está sobre ella, a fin de caracterizar cada tipo básico de variación. Las preguntas que se formulan: ¿Cómo se comporta la variación?, ¿Cómo lo hace la rapidez con que varía? |
| | Actividad 2.<br>Trabajo grupal | Estudiar la relación entre el radio y la altura del recipiente cónico con el dominio y rango de la función que modela la variación, al cambiar los valores y contrastar lo que sucede con la gráfica: ¿Qué diferencia se observa en la gráfica cuando se cambian los valores de radio y altura del recipiente? |

La intención de trabajar con esta estructura radica en que el estudiante perciba las magnitudes cambiantes y precise el estudio de la variación, con esta secuencia se promueve el desarrollo de las nociones básicas necesarias para la construcción de la derivada, posteriormente el estudiante abordará una segunda secuencia, la cual estará centrada en cuantificar la rapidez promedio de la variación y la rapidez en un instante.

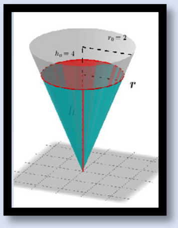
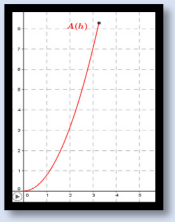
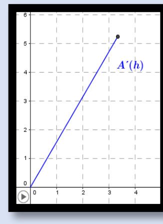
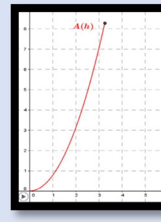
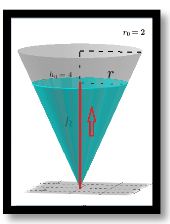
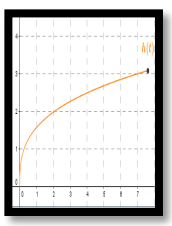
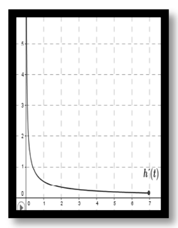
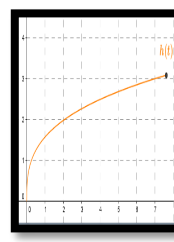
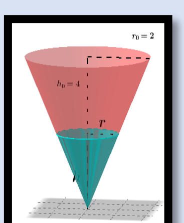
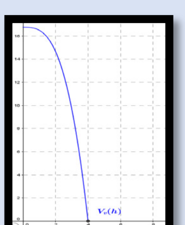
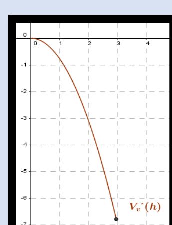
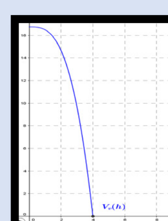
En cuanto a la propuesta, un ejemplo de una actividad es el llenado de un recipiente cónico en el que centramos la atención del estudiante en la variación de la longitud entre el borde del recipiente y la parte transversal del cono con agua cuando varía el tiempo y algunas otras. Resulta de nuestro interés que los estudiantes caractericen y cuantifiquen la variación de la rapidez con la que varía dicha longitud respecto al tiempo utilizando la función derivada implicada. Para su estudio se ha elaborado un archivo de GeoGebra como se muestra en la siguiente tabla.

***Tabla 2.*** Archivos de GeoGebra para el llenado de recipientes

| **Precisando el estudio de la variación** | **Gráfica y expresión que modelan la variación** | **Rapidez de la variación** | **Tipo básico de variación** |
|---|---|---|---|
|  Variación de la longitud entre el borde del recipiente y la parte transversal del cono con agua cuando varía el tiempo. |  Expresión que modela la variación: $l(t) = h_0 - \sqrt[3]{\frac{3h_0^2 t}{\pi r_0^2}}$. Donde $h_0$ y $r_0$ representan la altura y el radio del recipiente respectivamente y $t$ el tiempo transcurrido. |  La expresión que modela la rapidez con que varía la longitud está dada por, $l'(t) = -\sqrt[3]{\frac{h_0^2}{9\pi r_0^2 t^2}}$. |  Se trata de una variación decreciente con rapidez de decrecimiento a su vez decreciente (decrecimiento desacelerado). |

Así, los estudiantes visualizan y relacionan el comportamiento del fenómeno por medio de la caracterización del decrecimiento y de la rapidez con la que decrece la longitud en relación al tiempo. A partir de aquí pueden obtener algunas conclusiones como: si $l'(t) < 0$ entonces la variación de la longitud respecto al tiempo se comporta de manera decreciente, a la vez que se observa la rapidez con que varía la longitud $l'(t)$ y la concavidad que se genera.
s
Desde el punto de vista del contenido curricular (entendido por la dupla programas y bibliografía) analizado anteriormente en donde se realizó un desglose de los conocimientos contemplados en el estudio de la derivada. El contenido curricular de esta tarea se asocia con: la función como relación entre magnitudes cambiantes, modelaje de fenómeno cambiante,

***Tabla 3.*** Los tipos de variación

| Precisando el estudio de la variación | Gráfica y expresión que modelan la variación | Gráfica y expresión que modela la rapidez de la variación | Tipo básico de variación |
|---|---|---|---|
|  Variación del área circular de la parte transversal del cono cuando varía la altura de agua. |  La expresión que modela la variación está dada por, $A(h) = \frac{\pi h^2}{4}$. Donde $h$ representa el cambio en la altura de agua. |  La expresión que modela la rapidez con que varía el área está dada por, $A´(h) = \frac{\pi \text{h}}{2}$. |  Variación creciente con rapidez de crecimiento a su vez creciente. |
|  Variación de la altura de agua cuando varía el tiempo. |  La expresión que modela la variación está dada por, $h(t) = \sqrt[3]{\frac{3h_0^2 t}{\pi r_0^2}}$. Donde $h_0$ y $r_0$ representan la altura y el radio del recipiente y $t$ el tiempo transcurrido. |  La expresión que modela la rapidez con que varía la altura está dada por, $h´(t) = \sqrt[3]{\frac{h_0^2}{9\pi r_0^2 t^2}}$. |  Variación creciente con rapidez de crecimiento a su vez decreciente. |
|  Variación del volumen de la parte vacía del |  La expresión que modela la variación está dada por, |  La expresión que modela la rapidez con |  Variación decreciente con rapidez de |

| | | | |
|---|---|---|---|
| cono cuando varía la altura de agua. | $V_v(h) = \frac{\pi}{3} r_0^2 h_0 \left(1 - \frac{h^3}{h_0^3}\right)$. Donde $h_0$ y $r_0$ representan la altura y el radio del recipiente respectivamente y $h$ el cambio en la altura. | que varía el volumen de la parte vacía está dada por, $V´_v(h) = -\pi \left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2 h^2$. | decrecimiento a su vez creciente. |

## Referencias bibliograficas

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon, 42*(14), 3.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., &Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA,* 8(2), 121-156.

Hitt, F. (2003b). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Edición Especial: Educación Matemática*, 213.

Flores, C. D. (2006). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. Matemática educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula, 169.

Godino, J., Batanero, C., & Moll, F. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas, 47-48.

Godino, J. (2014). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 12.

Ibarra, S., Bravo, J., & Grijalva, A. (2001). El Papel de los Registros de Representación Semiótica en la enseñanza del Cálculo Diferencial.

Grijalva, A. (2008). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Fan, L. R. P. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y contextos* (4ta ed). México: CENGAGE Learning.