Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 3 / ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

LA NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD EN LA CONSTRUCCIÓN DEL TEOREMA DE BAYES. EL CASO DEL PENSAMIENTO ESTOCÁSTICO

Cristian Paredes-Cancino, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
cristian.paredes@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
En este reporte, mostramos un análisis socioepistemológico de una proposición de la obra original "*An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*" de Thomas Bayes (1764). Mencionado análisis forma parte de una problematización del teorema de Bayes en un escenario de corte sociohistórico. Como resultado del análisis de la proposición, identificamos como idea fundamental la noción de proporcionalidad, como una forma de medir la probabilidad.

Palabras clave: teorema de bayes, proporcionalidad, probabilidad, problematización, socioepistemología

Abstract
In this report, we present a socio-epistemological analysis of a proposition from the original work "An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances" by Thomas Bayes (1764). This analysis is part of a problematization of Bayes' theorem in a sociohistorical setting. As a result of the proposition analysis, it identifies, as the main idea, the notion of proportionality, as a way of measuring probability

Key words: bayes theorem, proportionality, probability, problematization, socioepistemology

Introducción

En el campo de lo estocástico, el teorema de Bayes, es un tópico matemático que presenta dificultades en su estudio a nivel medio superior y superior, así lo destacan diversas investigaciones del área (Díaz y De la Fuente, 2005; León, 2008). Por otra parte, el discurso matemático escolar impone argumentaciones y significados que alejan al estudiante de la construcción social de este saber matemático, como bien señala Carranza y Fuentealba (2010) se ha priorizado por una faceta de la probabilidad que atiende a su operatividad más que a su significado. En consecuencia, con la finalidad de atender esta problemática, como parte de una investigación en desarrollo se pretende mediante la problematización del saber matemático teorema de Bayes, identificar las practicas asociadas en la construcción de este saber, es decir, aquellas que permiten dar uso y significado al saber. Si bien solo daremos cuenta de una parte del análisis, en específico de una proposición de la obra matemática de Thomas Bayes de 1764, nos brinda elementos que el autor pone en juego en dicha demostración en miradas a la construcción del teorema de Bayes.

Elementos teóricos y metodológicos

Para el desarrollo de nuestra investigación el fundamento teórico es la Teoría Socioepistemológica, pues nos interesamos en entender y comprender un fenómeno específico relacionado con la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional (Cantoral, 2013).

De acuerdo con Sierra (2008, p.6, citado en Cantoral, 2013) se postula que uno de los primeros aspectos que pone en discusión la Socioepistemología es la naturaleza de los conceptos matemáticos, debido a que desde esta perspectiva se considera que los objetos matemáticos se ponen en uso más allá del aula, es decir, los conocimientos de los estudiantes tienen sentido y significado en su vida cotidiana.

Un método fundamental y característico muy utilizado en las investigaciones de la Socioepistemología es el de la problematización del saber matemático, al cual se da pie al cuestionar la matemática en juego, es decir, poner en juicio su estatus de saber institucional como aquello que se debe de enseñar y aprender, de modo que lleve a reconocer al saber a través de sus usos en distintos contextos. Por esta razón, hablar de la naturaleza del saber matemático exige, de una problematización, ya que se busca desentrañar la naturaleza sociocultural del conocimiento, vía los mecanismos de la historización y la dialectización (Cantoral, 2013). Es decir, analizar la naturaleza del saber es entender lo que compone a este saber, lo que lo caracteriza, su origen.

Para efectos de este trabajo mostramos parte de una historización referente al teorema de Bayes. A que nos referimos con historización, en términos de Reyes-Gasperini (2016) no solo la concebimos como situarnos en la historia, es decir, como una historia cronológica, también implica el estudio de la racionalidad contextualizada con el cual fue concebido un saber matemático en su tiempo y espacio.

Dicha historización en el presente, corresponde a un análisis histórico-epistemológico, en el que se estudia, analiza y cuestiona, por ejemplo, cómo hizo en su momento un matemático para llegar a cierto teorema, proposición o conocimiento, también interesa preguntarse cómo se utilizó por primera vez, qué resultados se obtuvieron de él, que tipo de conocimiento rodeaban esta creación, entre otros. Dicho análisis será orientado por la propuesta metodológica para estudios sociohistóricos de los investigadores Espinoza y Cantoral (2010), quienes proponen estudiar la obra original por medio de tres ejes: una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una expresión intelectual global.

En síntesis, para este reporte presentamos parte de una problematización del teorema de Bayes en un escenario de corte histórico, en específico, damos evidencia del análisis socioepistemológico llevado a cabo respecto a una proposición de la obra matemática original de Thomas Bayes (1764). La elección de la obra original de este autor, tiene fundamento en ser la primera evidencia matemática sobre el problema que le dio origen al teorema, asimismo en él se plasman las ideas base de su construcción y nos aporta elementos para nuestro planteamiento inicial.

Análisis Socioepistemológico

En lo que sigue se resumen elementos que competen al análisis socioepistemológico, cabe destacar que solo se retoman algunos aspectos de una investigación más amplia en proceso que tiene como objetivo generar una reinterpretación de la construcción del teorema de Bayes e identificar los usos de este saber.

Un panorama sobre la probabilidad en el siglo XVIII

Los trabajos más importantes en el siglo XVIII fueron el *Ars Conjectandi* de Jakob Bernoulli publicado en 1713, la *Doctrine of Chance* de Abraham de Moivre el cual fue el primer tratado ingles sobre aspectos de probabilidad, dicha obra tuvo tres ediciones en los años 1718, 1738 y 1756 y el *Miscellaneous tracts on some curious, and very interesting subjects in mechanics, physical-astronomy, and speculative mathematics* de Thomas Simpson en 1757.

La obra de Bernoulli se compone de cuatro partes, la primera se enfoca en el tratado de Huygens y el planteamiento de nuevos problemas; el segundo se estudia la teoría de permutaciones y combinaciones; en la tercera parte se dan soluciones a veinticuatros problemas sobre juegos de azar y en la última parte se aplica la teoría de la probabilidad a temas de las ciencias económicas y sociales, cabe destacar que esta sección la más importante de su obra queda inconclusa, sin embargo, se encuentra su famoso teorema que actualmente se denomina Ley de los Grandes Números, la cual establecerá en qué medida las frecuencias relativas de un suceso tienden hacia la probabilidad de éxito del mismo. Por su parte De Moivre se interesó por la teoría de permutaciones y combinaciones y además estimó el número de ensayo para estar seguros de que la frecuencia observada puede aproximarse a la probabilidad de un evento, este último resultado devino de la continuación del trabajo realizado por Bernoulli y es un caso particular de la generalización de lo que se llama Teorema Central del Límite. En el caso de Thomas Simpson él se centró en el estudio de los errores en las observaciones astronómicas, basado en esto introdujo la idea de distribución continua de probabilidad.

La obra matemática de Thomas Bayes

Thomas Bayes, reverendo ingles nació en Londres en 1702 y murió el 17 de abril de 1761 en Tunbridge Wells, Kent. Respecto de su formación, los historiadores tienen la hipótesis de que se inició en el área de las matemáticas como alumno de De Moivre, ya que en la época en la que Bayes era adolescente, De Moivre se dedicaba en Londres a ser profesor de matemáticas y justamente por esta cuestión se considera que Bayes aprendió de él sobre la teoría de las probabilidades.

Las contribuciones de Bayes a las matemáticas son las siguientes obras, en 1731 escribe *Divine Benevolence or an Attempt to prove that the Principle End of Divine Providence and Government is the Happiness of this Creatures* y en 1736 publicó *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of The Analyst* bajo el pseudónimo de John Noon. De acuerdo con Gómez (1994) la segunda obra señalada, se difunde como defensa de los matemáticos aplicados, frente al ataque que recibían por el obispo Berkeley, circunstancia que se considera le permitió incorporarse a la Royal Society como miembro en 1742.

Posterior a estas publicaciones, *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance* donde se introduce la idea de probabilidad condicional y otra obra de 1766 referente a la divergencia del logaritmo neperiano, fueron las últimas obras de Bayes publicadas por Richard Price después de su muerte.

Respecto a la obra de Bayes de 1764 que nos interesa analizar, fue escrito por Price y comunicado mediante una carta dirigida a John Canton en 1763. En este escrito se plantea de manera explícita el problema que pretende resolver, el cual consiste en lo siguiente: *Dado el número de veces que un suceso ha ocurrido y el de veces que no ha ocurrido, se requiere calcular la probabilidad de que la probabilidad de su ocurrencia en un solo experimento esté entre cualesquiera dos valores prefijados* (Bayes, 1764). Dicho problema se conoce como el problema de las causas a través de los efectos observados.

El ensayo *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance* se estructura de una carta preliminar, el problema y dos secciones. Es en la segunda sección donde el autor obtiene la solución al problema antes mencionado, sin embargo, para este reporte solo nos centraremos en el análisis de los primeros dos postulados y el lema 1 correspondientes a la sección II.

■ Parte de la obra de Bayes (1764). La medida de la probabilidad

En este apartado solo mostraremos un extracto del documento original de 1764 de Thomas Bayes. La sección II comienza con dos postulados (Figura 1), uno en el que se introduce la distribución uniforme y otro en el que se realiza una construcción geométrica que representará un experimento de Bernoulli (Gómez, 1994).

S E C T I O N II.

Poſtulate. 1. I Suppoſe the ſquare table or plane A B C D to be ſo made and levelled, that if either of the balls *o* or W be thrown upon it, there ſhall be the ſame probability that it reſts upon any one equal part of the plane as another, and that it muſt neceſſarily reſt ſomewhere upon it.

2. I ſuppoſe that the ball W ſhall be 1ſt thrown, and through the point where it reſts a line *os* ſhall be drawn parallel to A D, and meeting C D and A B in *s* and *o*; and that afterwards the ball O ſhall be thrown $p+q$ or n times, and that its reſting between A D and *os* after a ſingle throw be called the happening of the event M in a ſingle trial. Theſe things ſuppoſed,

Figura 1. Postulado 1 y 2 de la obra de Thomas Bayes (1764)

A partir de estos dos postulados se configura una construcción de un cuadrado que permitirá calcular las probabilidades de que al lanzar una bola esta quede en alguna sección del cuadrado ABCD (Lema 1), basado en un experimento que simula un modelo binomial.

Pasamos a ilustrar el mecanismo (Figura 2) que se propone mediante los postulados. Primeramente, se supone un cuadrado unitario ABCD, una mesa de billar, según Pearson y Fisher (citado en Landro y González, 2012) en el cual al hacer rodar una bola y observar en qué punto se detiene, la probabilidad del punto donde se detenga la bola, será la misma para cualquier región del cuadrado ABCD. Como segundo momento, en el lugar donde se detuvo la bola, se traza una recta paralela a BC, denominemos a este segmento como os, de tal modo que ABCD quedará dividido en dos regiones. Al lanzar una segunda bola *n* veces, la probabilidad de que quede a la derecha de os se considerará como la probabilidad de éxito, importará la frecuencia del evento, denotemos como M, el evento que la bola quede entre AD y os.

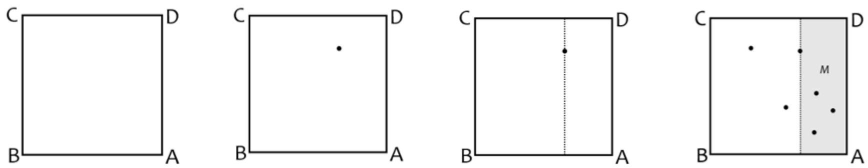

Figura 2. Simulación del experimento basado en los postulados. Diseño propio.

A partir de esta construcción geométrica se basará para demostrar el lema 1 de la sección II de su ensayo. Mostraremos el lema, luego la demostración que se hace y por último un análisis resaltando las prácticas asociadas. La imagen (Figura 3) ilustra cómo se matematiza la probabilidad usando ideas de la proporcionalidad en miras a dar solución al problema propuesto en la obra, cuyo resultado, es lo que se conoce actualmente como teorema de Bayes.

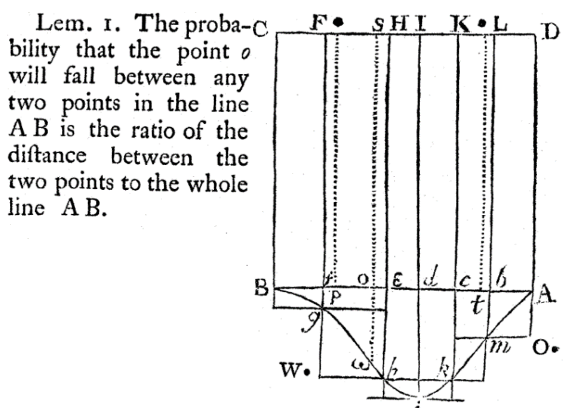

Figura 3. Lema 1, Sección II de la obra de Thomas Bayes (1764)

Lema 1. La probabilidad que un punto o caiga entre dos puntos cualesquiera de la línea AB es la razón de las distancias entre los dos puntos y la longitud de toda la línea AB.

Los argumentos geométricos de la afirmación que realiza Bayes en su obra (lema 1), se basan en la consideración por una parte de medidas conmensurables y por otra la inconmensurabilidad. A continuación, se muestran las ideas en que está fundada la prueba.

En la primera parte se considera la *conmensurabilidad*. Sean *b* y *f* dos puntos cualesquiera de la línea *AB* y a través de ellos se trazan *fF*, *bL*, paralelas a *AD* que cortan a *CD* en *F* y *L* (Figura 4, izquierda). Entonces si los rectángulos *Cf*, *Fb* y *LA son conmensurables* entre sí, pueden dividirse en partes iguales, es decir, rectángulos denotados por la letra *v* (Figura 4, derecha) y tenemos lo siguiente:

$$Cf = v * x, Fb = v * y, LA = v * z, \text{ donde } x, y, z \text{ corresponden al número de partes}$$

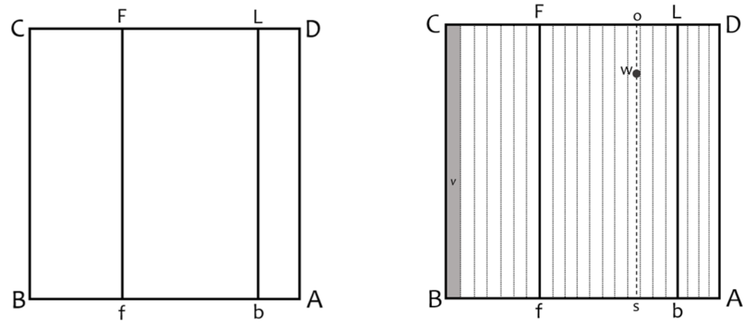

Figura 4. Conmensurabilidad de los rectángulos Cf, Fb y LA, Lema 1. Diseño propio.

Al lanzar la bola W, la probabilidad de que pare sobre cualquier número de estas partes iguales será la suma de las probabilidades de que pare sobre cada una de ellas, (ya que los sucesos son inconsistentes); y su suma — ya que la probabilidad de que pare sobre cualquiera de las partes iguales es la misma —, es la probabilidad de que pare sobre cualquiera de las partes iguales multiplicada por el número de partes.

En consecuencia, la probabilidad de que la bola W pare sobre el [cuadrado] *Fb* es la probabilidad de que pare sobre cualquiera de las partes iguales multiplicada por el número de partes iguales de *Fb*; y la probabilidad de que pare en algún sitio entre *Cf* o *LA*, es decir, de que no pare sobre *FB* es la probabilidad de que pare sobre una de las partes iguales multiplicada por el número de partes iguales de *Cf*, *LA* tomadas conjuntamente.

$$P(w\ en\ Fb) = v * y, \quad \text{donde } v \text{ representa la unidad de medida común}$$
$$P(w\ en\ Cf\ o\ LA) = P(w\ no\ esté\ en\ Fb) = v * (x+z)$$

Por tanto, la probabilidad de que [la bola] pare sobre *Fb* es a la probabilidad de que no pare sobre *Fb* como el número de partes iguales de *Fb* es al número de partes iguales de *Cf, LA* en conjunto, o como *Fb* es a *Cf, LA* en conjunto, o como *fb* es a *Bf, Ab* juntos.

$$\frac{P(w\ en\ Fb)}{P(w\ no\ en\ Fb)} = \frac{y}{x+z} = \frac{Fb}{Cf+LA} = \frac{fb}{Bf+Ab}$$

Basado en las propiedades actuales que el discurso escolar trata, la probabilidad de que pare sobre *Fb* es a la probabilidad de que pare sobre *Fb* sumada a la probabilidad de que no pare sobre *Fb* como *fb* es a *AB*, o como la razón *fb* y *AB* es la razón entre *AB* y *AB*.

$$\frac{P(w\ en\ Fb)}{P(w\ en\ Fb)+P(w\ no\ en\ Fb)} = \frac{Fb}{Fb+Cf+LA}$$
$$= \frac{fb}{fb+Bf+Ab} = \frac{\frac{fb}{AB}}{\frac{AB}{AB}} = \frac{fb}{AB}$$
$$\frac{P(w\ en\ Fb)}{1} = \frac{fb}{AB} \quad \Rightarrow \quad P(w\ en\ Fb) = \frac{fb}{AB}$$

En síntesis, según la bola W pare o no sobre *Fb*, el punto *o* estará o no entre *f* y *b* y, por consiguiente, la probabilidad de que el punto o esté entre *f* y *b* es el cociente entre *fb* y *AB*.
Si los rectángulos *no son conmensurables*, la última probabilidad no puede ser ni mayor ni menor que la razón de *fb* a *AB*. Para probarlo, en el escrito Bayes procede por contradicción. La idea para esta prueba (caso menor) consiste en tomar dos puntos cercanos de modo que *pt* fuese mayor que *fc* y los tres segmentos *Bp*, *pt* y *tA* fuesen conmensurables (Figura 5, izquierda). Y realizar un procedimiento empleando las ideas anteriormente detalladas. Concluyendo que la probabilidad de que el punto *o* esté comprendido entre *f* y *b* no puede ser menor que la razón entre *fb* y *AB*. Para el caso mayor lo que realiza es tomar los dos puntos cercanos de modo que *pt* fuese menor que *fc´* y los tres segmentos *Bp*, *pt* y *tA* fuesen conmensurables (Figura 5, derecha).

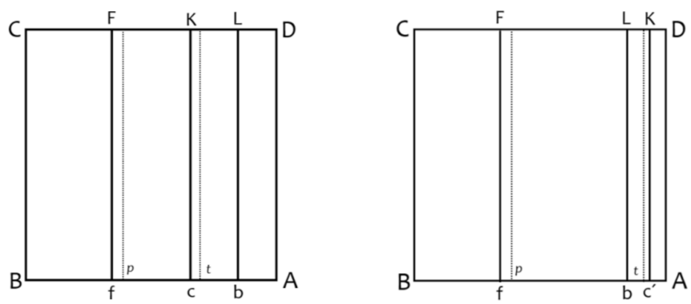

Figura 5. Conmensurabilidad de los rectángulos *Bp*, *pt* y *tA*. Diseño propio

En síntesis, ya que la probabilidad de que *o* esté comprendido entre *f* y *b*, no puede ser menor y tampoco puede ser mayor que la razón entre *fb* y *AB*, ésta debe ser igual. Es decir, la probabilidad de que *o* esté comprendido entre los puntos *f* y *b* es la razón entre *fb* y *AB*.

De acuerdo a la prueba presentada, en el análisis destacamos los siguientes elementos: para determinar la probabilidad, en específico, su medida, Bayes destaca dos casos basados en su construcción geométrica que simula un experimento. A partir de la ubicación de dos puntos (*f* y *b*) sobre la base (*AB*) del cuadrado unitario, divide el área en tres regiones y considera en ellas conmensurabilidad e inconmensurabilidad.

Cuando los rectángulos son conmensurables la primera práctica que se pone en acción es la de *comparar* la cual implica la selección de variables y el establecimiento de relaciones, para este caso las relaciones que se establecen son tres (la parte de interés en cada una de las relaciones es la región comprendida entre los puntos seleccionado, es decir, *f* y *b*):

$\frac{y}{x+z}$ la relación entre el número de partes iguales,

$\frac{Fb}{Cf+LA}$ la relación entre las áreas y

$\frac{fb}{Bf+Ab}$ la relación entre los segmentos.

En cada una de estas razones que se establecen, identificamos que de manera general se compara lo que respecta al suceso de interés ($w\ en\ Fb$) con lo que respecto al suceso complementario ($w\ no\ en\ Fb$), lo que varía es la magnitud. Otra práctica que identificamos es el establecimiento de la *igualación* entre las relaciones, lo que se caracteriza como *equivaler* y cuyo fin es mantener un invariante entre las relaciones dadas, es decir, al igualar las relaciones, si bien varían las magnitudes (número de partes, segmentos y áreas) la razón que se establece se conserva (resulta invariante), con ello se ha construido una medida que permitirá *medir* la probabilidad. En consecuencia, se ponen en juego prácticas como *comparar, medir, igualar* que permitirán construir una medida para la probabilidad, la cual se expresa mediante el establecimiento de relaciones entre magnitudes.

Además, dos tipos de relaciones que emergen ante la comparación, siendo la *unidad de referencia* distinta, son: razón entre el suceso w esté en Fb y w no esté en Fb y razón entre el suceso w esté en Fb y la unidad, es decir, el suceso w esté en Fb y el complemento w no esté en Fb

Cuando las medidas son inconmensurables, es decir, los rectángulos *Cf*, *Fb* y *LA son inconmensurables,* el autor identifica puntos cercanos a *f* y *b* de modo tal que los rectángulos sean conmensurables, dicha acción corresponde a establecer una *unidad de medida*. De manera similar al caso conmensurable establecerá una seria de comparaciones entre relaciones para determinar la medida de probabilidad. Como bien se destaca en este lema, la noción de lo proporcional emerge como una manera de establecer la relación entre dos magnitudes y darle significado a la probabilidad.

■ Reflexiones finales

Con el objetivo de estudiar la naturaleza del saber, es decir, localizar y analizar el uso y razón de ser del teorema de Bayes, identificamos una idea principal, la noción de proporcionalidad, como una manera de cuantificar la probabilidad y que se encuentra en la base de las primeras proposiciones que se proponen en la obra de Bayes en miras de dar solución al problema de las causas a través de los efectos observados.

La proporcionalidad se presente entonces como resultado de un escenario que demanda de la cuantificación de la incertidumbre (experimento tipo binomial basado en los dos postulados) y juega un rol importante en la construcción del teorema de Bayes. Se identificaron las prácticas de comparar, igualar y conmensurar postulados en la investigación de Reyes-Gasperini (2016) que competen al modelo de anidación de prácticas de la proporcionalidad.
Para finalizar una idea del presente análisis del lema, es entender la probabilidad en términos del establecimiento de una relación entre magnitudes, ya sea de segmentos o de áreas, más que como un cociente aritmético. El significado de la probabilidad está ligado a una relación entre áreas (razón) y es la idea que se mantiene invariante en las pruebas que emplea este autor (Bayes) a través de toda su obra matemática. En síntesis, los argumentos basados en la construcción geométrica y la proporcionalidad constituyen las primeras evidencias que el autor emplea para la construcción del teorema de Bayes.

■ Referencias bibliográficas

Bayes, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 53, 370-418.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa Editorial.

Carranza, P. y Fuentealba, J. (2010). Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *24*, 57-68.

Díaz, C. y De la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la Estadística. *Epsilon*, *59*, 245-260.

Espinoza, L. y Cantoral, R. (2010). Una metodología para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23* (pp. 889-897). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gómez, M. (1994). El problema de la probabilidad inversa: Bayes y Laplace. En E. Bustos, J. García-Bermejo, E. Pérez, A. Rivadulla, J. Urrutia y J. Zofío (Eds.), *Perspectivas actuales de lógica y filosofía de la ciencia* (pp. 385-396). España: Siglo XXI de España Editores.

Landro, A. y González, M. (2012). Bernoulli, De Moivre, Bayes, Price y los fundamentos de la inferencia inductiva. *Cuadernos del Cimbage*, *15*, 33-56.

León, N. A. (2008). Errores y dificultades en la resolución de problemas verbales inherentes al teorema de Bayes. *Paradigma, 29*(2), 187-219.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.