

HACIA UNA PROBLEMATIZACIÓN DE LA PARÁBOLA EN SU CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

Zuleyma Sarahí Pérez Moguel, Gisela Montiel Espinosa
Cinvestav-IPN. (México)
zuleyma.perez@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

Este trabajo de investigación plantea la problematización de la cónica parábola, a través del estudio de algunos procesos de construcción geométrica provenientes del corte de un cono, como envolvente de rectas tangentes y finalmente como lugar geométrico, en particular uno histórico, en la obra “Las Cónicas” de Apolonio, y algunos reportados en propuestas de innovación didáctica. La investigación se fundamenta en la teoría Socioepistemológica y hace uso de metodologías de análisis sociohistórico y documental, para el estudio de los procesos mencionados. Nuestro objetivo es caracterizar lo propio de la parábola como cónica que permita representarla y definirla como lugar geométrico, para ello identificamos los elementos y propiedades geométricas que permitan significar esta cónica

Palabras clave: parábola, construcción geométrica, cónica, elementos geométricos, propiedades geométricas

Abstract

This research work proposes a problematization of the conic curve parabola, by the study of some geometric construction processes from the cut made on a cone, as a wrap of the tangent straight lines and finally as a locus, in particular we use a historical one, from “the Conics” of Apollonius, and some of the ones reported on didactic innovation approaches. This research is based on the Socio-epistemological Theory of Mathematics Education and uses the methodologies of socio-historical analysis and document analysis for the study of the aforementioned processes. It seeks to characterize what is particular for the parabola as a conic curve that allows us to represent and define it as a locus, for that, we identify the elements and geometric properties that let us give significance to this conic curve.

Key words: parabola, geometric construction, conic, geometric elements, geometric proprieties

■ Introducción

Por experiencia y revisión de algunos planes y programas de estudios del Nivel Medio Superior (NMS) del Sistema Educativo Mexicano, se sabe que el estudio de las cónicas, abordadas en la asignatura de Geometría Analítica, continúa dando mayor énfasis a los dominios algebraicos sobre los geométricos, enfocando el aprendizaje de los estudiantes en la algoritmia y la memorización, donde los procesos algebraicos se superponen a las *construcciones geométricas* de dichos objetos matemáticos. Es común

que para aprobar los cursos de Geometría Analítica baste que el estudiante maneje con dominio las expresiones algebraicas de las cónicas, acompañados con un *bosquejo* de la gráfica, sin embargo, su estatus en la actividad matemática es más ilustrativa; es decir, no constituye un contexto de interacción con la naturaleza geométrica de la cónica.

Es por ello, que hablamos de un significado limitado relativo a las cónicas, que puede provocar, por mencionar un ejemplo, que los estudiantes no evoquen su uso o encuentren al menos una relación de las cónicas con situaciones cotidianas. En ese sentido, se observa que es necesario equilibrar el trabajo algebraico con el geométrico en la interacción del estudiante con las cónicas, para permitirle no sólo relacionar ambos contextos, sino significar desde cada uno de ellos las características, propiedades y elementos que las conforman.

Esta problemática es identificada por otros investigadores y es el punto de partida para estudios de corte histórico (Contreras, Contreras y García, 2002) y cognitivo (Bartolini, 2005), o para iniciativas de innovación didáctica que integran actividades con materiales manipulables (Real, 2004) o ambientes de geometría dinámica. En estos identificamos la importancia y necesidad de estudiar la naturaleza propia de cada cónica, con el objetivo de entender a sus procesos de significación según el escenario donde se da su construcción geométrica. En particular, para nuestra investigación, hemos elegido a la parábola como la pieza de conocimiento matemático a estudiar, ya que incluso Apolonio de Perge, quien es el primero en escribir los estudios relacionados con cónicas, inicia con ésta y la toma como referencia para estudiar a las otras dos; y lo haremos desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) (Cantoral, 2013), para problematizarla y a partir de ello respondernos: ¿qué caracteriza a la parábola en términos de los usos y significados de sus elementos y/o propiedades, en un proceso de construcción geométrica?

■ Marco teórico

La TSME nos permite problematizar la matemática en juego y hablar de su aprendizaje en términos de conocimiento puesto en uso y desarrollo del pensamiento matemático.

De aquí que naturalmente nos cuestionemos sobre: ¿qué es la parábola?, ¿qué usos y significados de la parábola se identifican en las diversas construcciones geométricas reportadas?, ¿cómo los usos y significados en la construcción geométrica se expresan en su forma analítica?, ¿qué caracteriza al discurso matemático escolar relativo a la parábola?, ¿cómo los estudiantes interactúan con la parábola y le dan significado a sus elementos, propiedades y representaciones?, entre otras.

Para ayudarnos a respondernos esas preguntas, tomamos como base de esta investigación la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en tanto asume que el saber se construye, reconstruye, significa y resignifica, y sitúa estos procesos en el tiempo y el espacio, los explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa; se posiciona a la opción constructiva en la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos. Esto es, el saber se problematiza: historiza y dialectiza, con intencionalidad (Cantoral, 2013, p. 97 y 98).

Cantoral asume la historización como “Dar carácter histórico [a algo]” y “tomar [algo] carácter histórico”, y utiliza una idea de la historia que va más allá de lo cronológico factual, pues le interesa una historia crítica del desarrollo conceptual, es decir, una epistemología situada. Por lo que en este trabajo se retoma una traducción de la obra original “Las Cónicas” para el análisis de las primeras construcciones geométricas realizadas por Apolonio sobre la parábola, que nos permitirá historizar en el contexto en el que se encontraba el matemático griego, observar los avances que hasta ese momento de la historia existían sobre esta cónica, así como la evolución de los elementos geométricos y propiedades geométricas que permitieron su construcción.

Para complementar la problematización es necesaria la dialectización, que, a decir del autor, proviene de la Dialéctica como parte de la Filosofía y sirve, ante todo, para mostrar que [el algo] que se dialectiza reconoce la contradicción, no como mera errata o falla, sino que en su “sistema” la contradicción tiene un rol interno fundamental de confrontación (Cantoral, 2013, p. 53).

La problematización del saber se realiza desde el marco que configuran los principios de la teoría, a saber:

- la relación del sujeto al saber es una función del contexto (principio de la racionalidad contextualizada),
- la validez del conocimiento es relativo al escenario donde se construye (principio del relativismo epistemológico),
- los saberes se enriquecen cuando se ponen en funcionamiento en nuevas situaciones, se construyen nuevos significados (principio de la significación progresiva),
- en la base y organización de los procesos de construcción del conocimiento se identifican prácticas sociales, que a través de un modelo de anidación de prácticas explica empírica y teóricamente este proceso, desde el sujeto individual, el sujeto colectivo y el sujeto histórico (principio normativo de la práctica social).

Para explicitar la normativa de la práctica social, Cantoral propone un modelo (Figura 1) con el que explica la construcción de conocimiento basada en prácticas, transitando por los siguientes momentos: de la *acción* directa del sujeto ante el medio, a su organización como una *actividad humana* situada socioculturalmente, para perfilar una *práctica socialmente compartida*, que cae bajo la regulación de una o varias *prácticas de referencia* –la expresión material e ideológica de un paradigma– que a la vez son normadas por la *práctica social* (Cantoral, 2013).

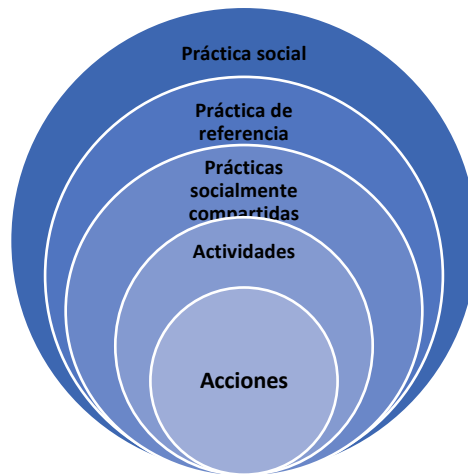


Figura 1. Modelo de prácticas anidadas (Cantoral, Montiel, Reyes-Gasperini, 2015).

Sobre la base de sus principios, la TSME toma en cuenta la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento *social, epistemológico, cognitivo y didáctico*, en la vida de los seres humanos, mostrando los procesos de adaptabilidad, empíricamente comprobables, que permiten alcanzar algún grado de satisfacción en los actos del conocer (Cantoral, 2013). Si bien la teoría configura perspectivas sistémicas para analizar y explicar los fenómenos didácticos, por cuestiones de método, realiza estudios en cada una de las dimensiones, manteniendo siempre la centración en el *conocimiento puesto en uso*, a lo que reconocemos como *la naturaleza social de la matemática* o, dicho de forma sintética, *lo matemático*.

En este marco, el trabajo que aquí presentamos propone un estudio en la dimensión epistemológica, para llevar a cabo una historización, y en la dimensión didáctica, para llevar a cabo una dialectización; con el objetivo de elaborar una hipótesis epistemológica relativa a la construcción de significados geométricos de la cónica parábola y con ello ampliar la explicación a los fenómenos didácticos y explicitar las bases de comunicación del discurso Matemático Escolar. Para la historización, haremos un análisis de “*Las Cónicas*” de Apolonio, mientras que, para la dialectización, analizaremos algunas propuestas de innovación didáctica basadas en construcciones geométricas de la cónica parábola.

■ Consideraciones metodológicas

El estudio corresponde a una investigación cualitativa-interpretativa en el campo de la Matemática Educativa, en dos momentos: de historización y de dialectización.

Para el primer momento, se realizó un Análisis Cualitativo de Contenido, en sus fases *Contextual y Textual*, de la fuente secundaria *Las Cónicas*. El análisis contextual se orientó por la propuesta metodológica, para estudios socio-históricos, de Espinoza (2009); que, al reconocer una obra como *una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una expresión intelectual global*; provee de elementos para la construcción social de la parábola desde la racionalidad contextualizada y el relativismo epistemológico.

Para el análisis textual, se estructuró una estrategia (sistema de reglas) en tres niveles: micro, meso y macro, a partir de la propuesta de Cruz-Márquez y Montiel (2017), antecedidos por un pre-análisis, como familiarización con la obra (Tabla 1).

PRE-ANÁLISIS

- Describir la obra.
- Clarificar elementos del lenguaje (verbal y matemático).
- Selección justificada de las unidades a analizar.

ANÁLISIS

Nivel Micro

- Identificar una estructura discursiva.
- Analizar desde los cuestionamientos: ¿qué hace?, ¿cómo hace?
- Identificar el objetivo de cada unidad analizada.

Nivel Meso

- Analizar cada unidad desde el cuestionamiento ¿para qué hace?, con el objetivo de reconocer la relación entre las unidades analizadas y estructurar bloques.
- Identificar el objetivo del bloque.

Nivel Macro

- Síntesis de los dos niveles anteriores.
- Articulación con el análisis contextual.

A continuación, se presenta parte del pre-análisis y parte del análisis a nivel micro de una unidad:

Tabla 1. Sistema de reglas para el Análisis Cualitativo de Contenido, para *Las Cónicas de Apolonio*.

PRE-ANÁLISIS
<ul style="list-style-type: none"> ○ Se seleccionaron los primeros tres libros del tratado de <i>Las Cónicas</i> de Apolonio, donde encontramos todas las proposiciones relacionadas con la parábola. Algunas de esas proposiciones son sobre definiciones, otras sobre propiedades geométricas y otras sobre formas de construcción. ○ Encontramos que parte del lenguaje utilizado por este matemático y los cuales define previamente, son conceptos como: cono, diámetro, vértice, eje del cono, sección cónica, tangentes, ordenadas, punto medio, entre otros.
ANÁLISIS
Nivel Micro

- En la proposición 11 del libro primero de *Las Cónicas* se enuncia la parábola como cónica. Para obtener ésta se parte un cono de manera que el ángulo del plano que corta al cono sea paralelo a uno de los lados del triángulo obtenido al cortar el cono por un plano que pase por el eje. Es decir, podemos mirar que el plano que corta al cono para obtener así la parábola debe ser paralelo a la generatriz de dicho cono.
- En general al realizar sus demostraciones, Apolonio parte de hipótesis en las que supone algunas situaciones como ciertas y toma elementos geométricos previamente definidos. Es decir, sus demostraciones carecen del rigor con el que actualmente las conocemos, más bien consistían en volver a la hipótesis planteada al principio para decir que la proposición era cierta.

Nivel Meso

- Estamos realizando esta parte del análisis.

Nivel Macro

- Estamos realizando esta parte del análisis.

En el nivel micro, los cuestionamientos analíticos *qué hace* y *cómo hace*, nos permiten identificar en los datos el nivel de *acción* del modelo de anidación de prácticas; mientras que, en el nivel meso, con el cuestionamiento analítico *para qué hace*, identificamos el nivel de *actividad*. En ese sentido, acciones y actividades, funcionan como código (deductivo) para el análisis de datos. Resulta relevante señalar que, en el nivel micro de análisis, incluso previo a responder los cuestionamientos analíticos, se llevan a cabo las actividades matemáticas en juego, es decir las construcciones geométricas; lo que resulta fundamental para identificar y recuperar los *usos* y *significados*, que se pierden o se transforman en los procesos de transposición didáctica del saber.

Para la dialectización, se realiza el análisis de las propuestas de innovación didáctica, para determinar las acciones y actividades, y así confrontar *usos* y *significados* con los encontrados en la historización.

■ Avance en el análisis de datos para la historización

La obra donde analizamos las construcciones de Apolonio, es: “Científicos Griegos”, y contiene la traducción, de Francisco Vera, de los primeros siete libros de *Las Cónicas*.

Análisis Contextual

A partir de la metodología propuesta por Espinoza (2009), la fuente (Vera, 1970) vista como una traducción casi fiel de la obra “*La Cónicas*” de Apolonio, será entendida como una producción con historia ya que nuestro interés está en comprender los medios de significación utilizados en la obra por Apolonio, que permiten describir o definir a la parábola como una sección del corte de un cono por un plano con ciertas condiciones. Se observa una organización y redacción con tintes de Euclides, pues en realidad sus

tiempos no distan mucho, asumiendo que Euclides vivió aproximadamente del año 330 a.C. al 275 a.C. y Apolonio del 262 a.C. al 180 a.C.

Las primeras menciones de las cónicas se remontan a Menecmo y a Aristeo el Viejo, es decir, al siglo IV a.C., de manera elemental, pues la Geometría del espacio no había llegado todavía al estatismo intelectual alcanzado ya por la plana. Si se empleaba el compás en ciertas construcciones, su movimiento no intervenía en ninguna demostración evidentemente cierta, sino solo en la curva descrita, considerada estáticamente, es decir, se apoyaban de las construcciones realizadas por el compás para visualizar la curva y a partir de lo que observaban demostrar sus hipótesis.

Apolonio fue quien le dio los respectivos nombres de “parábola”, “elipse” e “hipérbola” a cada una de las cónicas y el origen de estos nombres es de algunos verbos; el primero significa poner en paralelo y justifica su tesis por el hecho de que el eje de la parábola, es decir, la intersección del plano secante según el eje, es paralelo a un lado del triángulo; los otros dos verbos son sinónimos de exceder y faltar, y hace observar que la suma del ángulo cónico y el formado por el eje de la curva con la generatriz es en la hipérbola mayor que dos rectos y en la elipse es menor.

Por tanto, la obra *Las Cónicas* es una expresión de los trabajos del autor y de otros matemáticos que trabajaron con las cónicas, que sintetiza los pensamientos de los matemáticos y presenta una versión oficial de los resultados obtenidos además de una manera general, realizando los cortes y construcciones a partir de un cono oblicuo.

Análisis Textual

Además de realizar un análisis de las construcciones geométricas que realizó Apolonio, así como de las demostraciones de éstas, realizamos las reconstrucciones apoyados del software GeoGebra, ya que es un programa que permite abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas a través de la experimentación y manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

Para construir/obtener la parábola, Apolonio tuvo que enunciar primeramente ocho definiciones y diez proposiciones, a continuación, presentamos la proposición que enuncia la parábola:

11. Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte a la base según una perpendicular a la del triángulo según el eje, si el diámetro de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo, el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono paralelamente a la intersección del plano secante y el de la base del cono hasta el diámetro de la sección, equivale al rectángulo formado por la recta que separa en el diámetro del lado del vértice de la sección y por una cierta recta cuya razón a la situada entre el ángulo cónico y el vértice de la sección es la misma que la del cuadrado de la base del triángulo según el eje al rectángulo formado por los otros dos lados del triángulo. Llamaremos parábola a tal sección.

El proceso de reconstrucción de las construcciones de Apolonio con el software GeoGebra nos permite hacer trazos exactos y con eso analizar a profundidad los elementos y propiedades que configuran la parábola, la siguiente imagen es parte de esta reconstrucción:

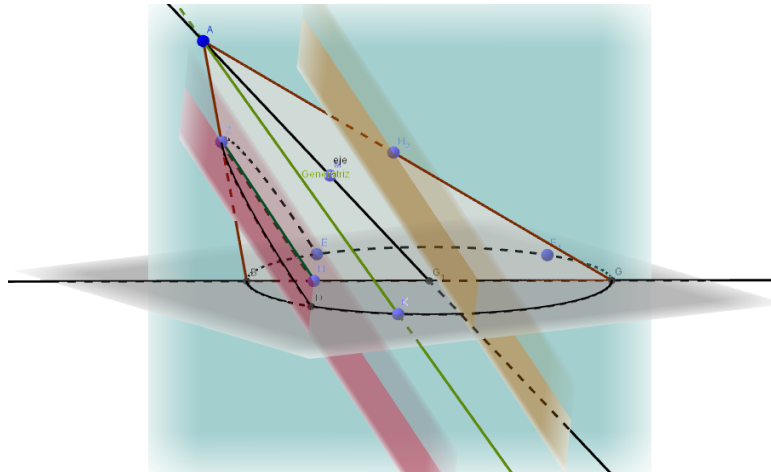


Figura 2. Reconstrucción de la parábola como corte de un cono.

■ Reflexiones finales

En este momento de la investigación, estamos realizando el análisis de los procesos de construcción geométrica que propone Apolonio para tener un punto de partida relativo al saber (historizar), y estamos encontrando elementos geométricos necesarios para la construcción de la parábola, tales como la semejanza de triángulos, el trazo de planos y rectas paralelas, el trazo del diámetro de las secciones generadas al cortar el cono, el trazo de rectas tangentes, entre otros. Posteriormente se analizaron las construcciones geométricas de las propuestas de innovación didáctica, es decir, dialectizamos, encontrando que algunos de los elementos geométricos que aparecieron en la historización permanecen aún en las construcciones de la parábola como lugar geométrico más actuales, por ejemplo, el diámetro que utilizó Apolonio que ahora se define como el eje de la parábola y permite observar la simetría contenida en ésta.

Consideramos que centrándonos en el aprendizaje del estudiante, iniciar con las construcciones geométricas de las cónicas podría contribuir a que adquiera realmente significados sobre éstas, para comprobar esta hipótesis, iniciamos con la cónica parábola.

■ Referencias bibliográficas

- Bartolini, M. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. En J. Kilpatric, C. Hoyles, O. Skovsmose y P. Valero (Eds.) *Meaning in Mathematics Education* (pp. 39-60). Italia:Springer.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Editorial Gedisa, S.A.
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática* 8, 9-28.
- Contreras, A., Contreras, M., & García, M. (2002). Sobre Geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Relime* 5(2), 111-132.
- Cruz-Marquez, G. y Montiel, G. (2017). Emergencia de las nociones trigonométricas en el Almagesto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 981-989.
- Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría. Cinvestav. México, D.F.
- Real, M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *SUMA* 46, 71-77.
- Vera, F. (1970). *Científicos griegos*. Aguilar, S.A. Ediciones, Juan Bravo, 38, Madrid, España.