VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

Fabián W. Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
fwromero@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen
Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa se busca determinar aquellos significados asociados al cálculo de los coeficientes para representar una función dada en serie trigonométrica, con el fin de que sirva como elemento a considerar en futuros diseños de aprendizaje para la serie. Para esto se estudia el fenómeno didáctico de manera sistémica, en el caso de los coeficientes de Fourier, se pone especial atención en dos componentes: la epistemológica y la didáctica. Siempre considerando la componente social y cultural en cada una de las dimensiones. Esto permite reconocer aquellos significados gráfico-geométricos asociados al cálculo de los coeficientes y la necesidad de significar a la serie a partir de su uso culturalmente situado, previo al cálculo de los mismos.

Palabras clave: coeficientes de Fourier, socioepistemología

Abstrac
From the Socio-epistemological Theory of Mathematics Education we seek to determine those meanings associated with calculating the coefficients to represent a given function in a trigonometric series, in order to be used as an element to be considered in future learning designs for the series. For this, we study the didactic phenomenon in a systemic way, in the case of Fourier' coefficients, special attention is paid to both, epistemological and didactic components; always considering the social and cultural component in each of the dimensions. It allows recognizing those graphic-geometric meanings associated to the calculation of the coefficients and the need to approach the series from its cultural use, prior to calculating them.

Key words: Fourier coefficients, socio-epistemology

Introducción

En matemática educativa, diversas investigaciones se han preocupado por el estudio de la Serie Trigonométrica de Fourier (STF), ejemplo de ello son los trabajos de Farfán (2012) y Romero (2016), donde se sitúa a la serie como uno de los temas primordiales en el estudio del cálculo y en el desarrollo del pensamiento trigonométrico formal.

Sin embargo, en (Romero, 2016) se reporta que las investigaciones realizadas en matemática educativa alrededor de la STF han dado cuenta de diversos aspectos relacionados con la serie, pero han considerado el cálculo de los coeficientes como un algoritmo ya establecido. Cuando, en realidad, el problema de significar la STF debe considerar el cálculo de los coeficientes.

Se tiene como objetivo general significar las nociones matemáticas alrededor de la serie trigonométrica de Fourier mediante una problematización del saber matemático que dé cuenta de su construcción social; la problematización "radica en buscar las causas que conducen a los individuos a «a hacer lo que hacen» con el conocimiento en juego, es decir, hacer del saber matemático un problema «localizando y analizando su uso y su razón de ser»" (Reyes, 2011, p. 39). Por lo cual, se busca evidenciar el significado que tomaron los coeficientes de la STF en su contexto de origen, a través del estudio de la *Teoría Analítica del Calor* (1822), y que esto funcione como elemento para proponer rediseños del discurso matemático escolar vigente.

Algunos elementos teóricos

La problemática de estudio de la Matemática Educativa ha evolucionado desde sus inicios, considerando en sus principios una didáctica sin alumnos; hasta una didáctica en escenarios socioculturales (Cantoral y Farfán, 2003). Desde esta última perspectiva, una teoría que se preocupaba por la construcción social del conocimiento y su difusión institucional es la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME). Ésta sostiene que el conocimiento matemático no fue creado para la escuela, mucho menos para ser enseñado, por lo que su introducción en los sistemas de enseñanza provoca que el conocimiento cambie su estructura y su funcionalidad (Cantoral, 2013), esto provoca un distanciamiento entre el conocimiento matemático (*saber sabio*) y lo que se enseña en la escuela (*matemática escolar*).

Entonces, cuando los saberes se llevan a la escuela existe un sistema de razón que regula la organización de la matemática escolar, la TSME ha llamado a este sistema de razón como *discurso matemático escolar* (dME), del cual, es necesario conocer su funcionamiento para proponer elementos para su rediseño. Desde la TSME se propone la construcción del conocimiento matemático a través de prácticas situadas (Cantoral, 2013).

La aproximación sistémica de la TSME

La investigación en TSME problematiza el saber matemático de manera sistémica, estudia las relaciones entre epistemología, procesos cognitivos y procesos de institucionalización vía la enseñanza y la dimensión sociocultural. Para este reporte de investigación se pondrá especial atención a las dimensiones epistemológica y didáctica, es decir, las circunstancias que hicieron posible la construcción del conocimiento matemático y el cómo vive el saber en el sistema didáctico.

Para esto se desarrolló la primera fase de una Ingeniería Didáctica, en cuyo análisis preliminar se estudió la Teoría Analítica del Calor (Fourier, 1822), tomando en consideración su contexto histórico-social, para evidenciar el papel de la práctica social en la construcción de este conocimiento, en particular, para este reporte, el rol que juega en el cálculo de los coeficientes de Fourier.

El cálculo de los coeficientes de Fourier

Fourier en la Teoría Analítica del Calor dedica una sección a la expansión de una función dada en serie trigonométrica. Para lo cual sigue el siguiente esquema, de demostraciones:

1. Cualquier función impar $\varphi(x)$ se puede desarrollar como una serie de senos.
2. Cualquier función par $\psi(x)$ se puede desarrollar como una serie de cosenos.
3. Cualquier función $f(x)$ se puede escribir como suma de una función par y otra impar.

A partir de esto concluye que cualquier función se puede escribir como una serie infinita de senos y cosenos. Reinterpretando los resultados de Fourier, podemos considerar una función $f(x)$, donde $x \in (0,2\pi)$, se puede representar de la manera:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Fourier logra deducir cómo se deben calcular los coeficientes a_n y b_n, hoy en día llamados coeficientes de Fourier, estos son:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

A continuación, se expone la manera en la que Fourier realiza el cálculo de estos coeficientes y su relación con el ambiente fenomenológico de surgimiento de la STF, el problema de la propagación del calor.

Siguiendo el esquema de demostración descrito anteriormente, en primer lugar, Fourier demuestra que una función arbitraria e impar $\varphi(x)$ se puede representar como serie de senos, es decir, se pueden determinar los valores de $a, b, c, d, \dots$ en la ecuación:

$$\varphi(x) = a \operatorname{sen} x + b \operatorname{sen} 2x + c \operatorname{sen} 3x + d \operatorname{sen} 5x + \cdots$$

Luego, reinterpretando las ideas de Fourier al lenguaje matemático actual, desarrolla la función $\varphi(x)$ en serie de potencias alrededor de $x = 0$, y sustituye las derivadas sucesivas por constantes $A, B, C, D, E, \dots$ con lo que obtiene un sistema con infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas (Figura 1).

$$\begin{aligned}
A &= a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + 5\,e + \text{etc.} \\
B &= a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + 5^3 e + \text{etc.} \\
C &= a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + 5^5 e + \text{etc.} \\
D &= a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + 5^7 e + \text{etc.} \\
E &= a + 2^9 b + 3^9 c + 4^9 d + 5^9 e + \text{etc.} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Figura 1. Sistema de ecuaciones de Fourier (1822, p. 212)

Luego asegura:

> En consecuencia, consideramos sucesivamente los casos en que tendríamos que determinar una incógnita por una ecuación, dos incógnitas por dos ecuaciones, tres incógnitas por tres ecuaciones, y así sucesivamente a infinito. Supongamos que denotamos, como sigue, un sistema diferente de ecuaciones análogas a aquellas a partir de las cuales debemos derivar los valores del coeficiente. (Fourier, 1822, p. 213, la traducción es nuestra)

Así, Fourier resuelve sistemas de ecuaciones particulares y determina un patrón en las soluciones de los mismos; luego generaliza sus resultados a la solución del sistema infinito, evidenciando su gran dominio aritmético, concluye que, en general $\int_0^\pi \varphi(x) \operatorname{sen} nx\, dx$ es el coeficiente de $\operatorname{sen} nx$ en el desarrollo en serie trigonométrica de $\varphi(x)$.

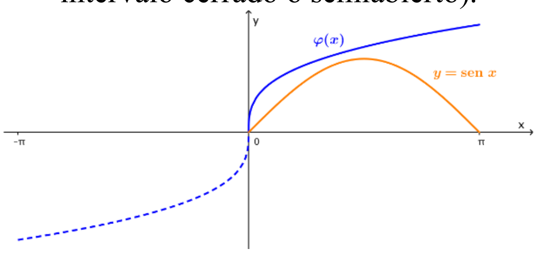
La fórmula obtenida por Fourier trae consigo un problema, pues para él la noción de integral es la de antiderivada, lo que conlleva a la pregunta ¿a qué es igual la integral de una función arbitraria? Fourier, consciente de este detalle, señala:

> …si la función $\varphi(x)$ está representada por la ordenada variable de una curva arbitraria cuya abscisa se extiende de $x = 0$ a $x = \pi$, y si construimos sobre esta misma parte del eje la curva trigonométrica conocida, cuya ordenada es $y = \operatorname{sen} x$; será fácil de representar el valor de un término integral. Para cada abscisa x, a la cual corresponde un valor de $\varphi(x)$, y un valor de $\operatorname{sen} x$, multiplicamos este último valor por el primero, y en el mismo punto del eje levantamos una ordenada proporcional al producto $\varphi(x) \operatorname{sen} x$. Será formada por esta operación continua, una tercera curva, cuyas ordenadas son las de la curva trigonométrica, reducida proporcionalmente a las ordenadas de la curva arbitraria que representa $\varphi(x)$. Hecho esto, el área de la curva reducida tomada de $x = 0$ a $x = \pi$, dará el valor exacto del coeficiente de $\operatorname{sen} x$; y cualquiera que sea la curva dada por $\varphi(x)$, sea que podamos asignar una ecuación analítica o que no depende de alguna ley regular, es evidente que siempre se utilizará para reducir en cualquier forma la curva trigonométrica; de modo que el área de la curva reducida tiene, en todos los casos posibles, un valor determinado que da el coeficiente de $\operatorname{sen} x$ en el desarrollo de la función. Es lo mismo para el coeficiente siguiente. (Fourier, 1822, p. 234, la traducción es nuestra)

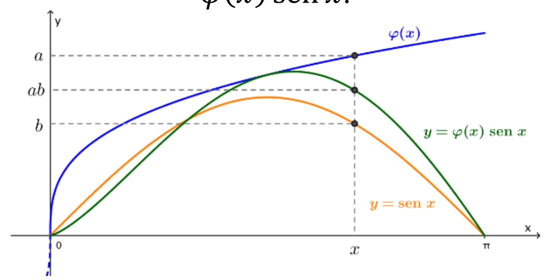
La Tabla 1 resume argumentos geométricos dados por Fourier:

Tabla 1. Reinterpretación de los argumentos de Fourier para el cálculo de los coeficientes.

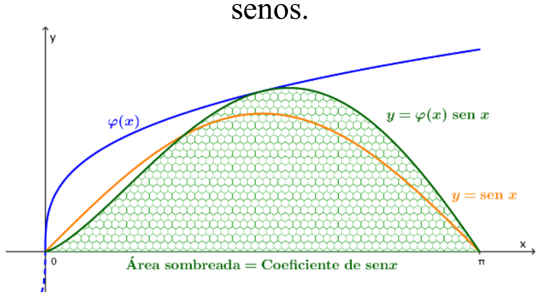
1. Se considera una función impar $\varphi(x)$ y se grafica junto con la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ (podría ser un intervalo cerrado o semiabierto).



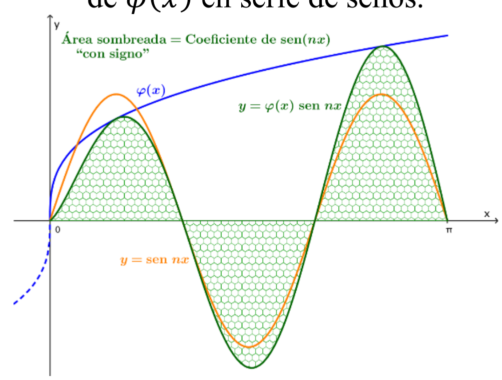
2. Para cada abscisa x, multiplíquese los valores que le corresponden en $\varphi(x)$ y $\operatorname{sen} x$. Y para esa misma abscisa levante una ordenada proporcional a $\varphi(x) \operatorname{sen} x$.



3. En esta nueva curva, cuyas ordenadas son las de la curva trigonométrica reducidas proporcionalmente a la curva arbitraria $\varphi(x)$, el área en el intervalo $(0, \pi)$, dará el valor exacto del coeficiente de $\operatorname{sen} x$ en el desarrollo trigonométrico de $\varphi(x)$ en serie de senos.



4. Este proceso se generaliza para calcular el coeficiente de $\operatorname{sen} nx$ en el desarrollo trigonométrico de $\varphi(x)$ en serie de senos.



Fuente: Tomada de Romero (2016, p. 74).

Luego de hacer esto Fourier comenta el procedimiento que se utiliza hoy en día para demostrar el cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica, el cual consiste en considerar la serie:

$$\varphi(x) = b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx + \cdots$$

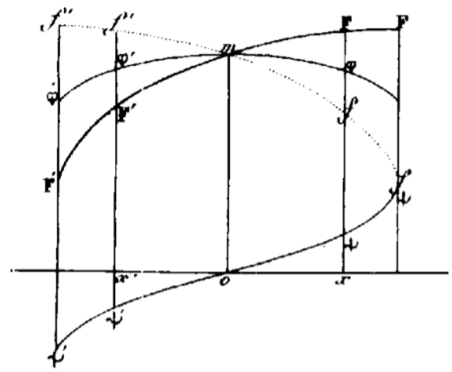
Se multiplica por $\operatorname{sen} nx$, con lo que resulta:

$$\varphi(x) \operatorname{sen} nx = b_1 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx + b_2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} nx + \cdots + b_n \operatorname{sen}^2 nx + \cdots$$

Se integra término a término desde 0 hasta π, con lo que se concluye que $b_n = \int_0^{\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} nx$, a partir de la ortogonalidad de la función seno.
Fourier realiza un análisis análogo para representar una función par $\psi(x)$ en serie de cosenos:

$$\psi(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$

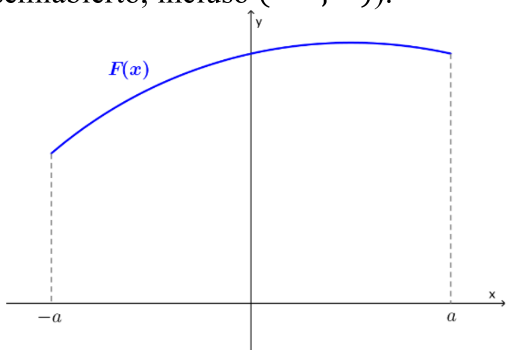
Concluye que $a_n = \int_0^\pi \varphi(x) \cos nx$. Ahora bien, ya demostrado que dos funciones, una impar y la otra par, se puede desarrollar en serie de senos y cosenos, respectivamente, Fourier demuestra de manera analítica, al igual como se hace hoy día en la escuela, que una función cualquiera se puede representar como suma de dos funciones, una par y la otra impar. La demostración analítica que proporciona Fourier es la que se da hoy día en la escuela, pero previo a su demostración realiza una construcción geométrica al respecto, la cual se omite en la escuela, además de no ser un recurso metodológico para demostrar un teorema actualmente, pues en el actual dME alrededor de la STF predomina el contexto algebraico (Rodríguez, 2009). La construcción geométrica presentada por Fourier es la siguiente, donde la Figura 2 es la proporcionada por él para esta construcción:

> Cualquier función $F(x)$, representada arbitrariamente en el intervalo de $-\pi$ a $+\pi$, siempre se puede dividir en dos funciones tales que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. De hecho, si la línea $F'F'mFF$ representa la función $F(x)$,
>
> 
>
> *Figura 2.* Gráfica proporcionada por Fourier (Fourier, 1822, p. Pl.II)
>
> y elevamos por el punto 0 la ordenada $0m$, dibujamos por el punto m a la derecha del eje $0m$ el arco mff similar al arco $mF'F'$ de la curva dada, y a la izquierda del mismo eje dibujamos el arco $mf'f'$ similar al arco mFF ; entonces pasaremos por el punto m una línea $\varphi'\varphi'm\varphi\varphi$ que dividirá en dos partes iguales la diferencia entre cada ordenada xF o $x'f'$ y la ordenada correspondiente xf o $x'F'$. También trazaremos la línea $\psi'\psi'0\psi\psi$, cuya ordenada mide la diferencia de la ordenada de $F'F'mFF$ con la de $f'f'mff$. Haciendo esto, las ordenadas de la línea $F'F'mFF$ y de la línea $f'f'mff$ designadas una por $F(x)$ y la segunda por $f(x)$, obviamente tenemos $f(x) = F(-x)$; denotando también la ordenada de $\varphi'\varphi'm\varphi\varphi$ por $\varphi(x)$, y la de $\psi'\psi'0\psi\psi$ por $\psi(x)$, tendremos
>
> $$F(x) = \varphi(x) + \psi(x) \text{ y } f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = F(-x)$$
>
> entonces
>
> $$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}F(x) + \tfrac{1}{2}F(-x) \text{ y } \psi(x) = \tfrac{1}{2}F(x) - \tfrac{1}{2}F(-x)$$
>
> concluimos
>
> $$\varphi(x) = \varphi(-x) \text{ y } \psi(x) = -\psi(-x)$$
>
> (Fourier, 1822, p. 254, la traducción es nuestra)

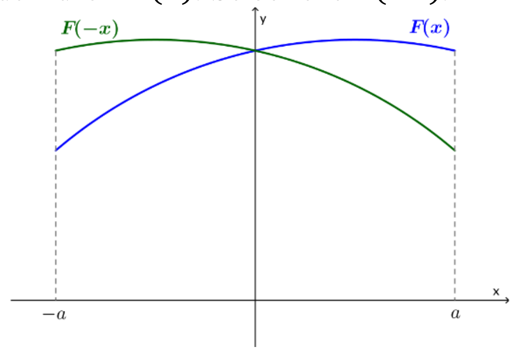
En la Tabla 2, utilizando un lenguaje actual, se puede reinterpretar la construcción geométrica de Fourier de la manera siguiente:

Tabla 2. Reinterpretación de los argumentos de Fourier para la representación de una función como suma de dos funciones, una par y la otra impar.

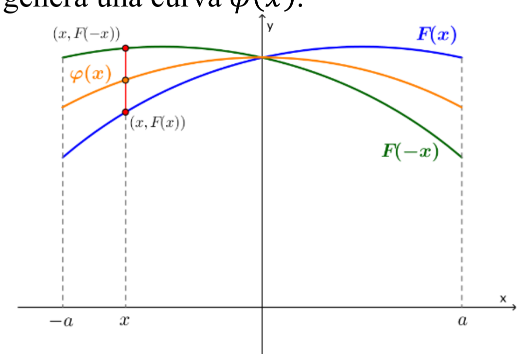
1. Considérese una función arbitraria $F(x)$ definida en un intervalo $[-a, a]$, con $a \in \mathbb{R}^+$ (podría ser un intervalo abierto o semiabierto, incluso $(-\infty, \infty)$).



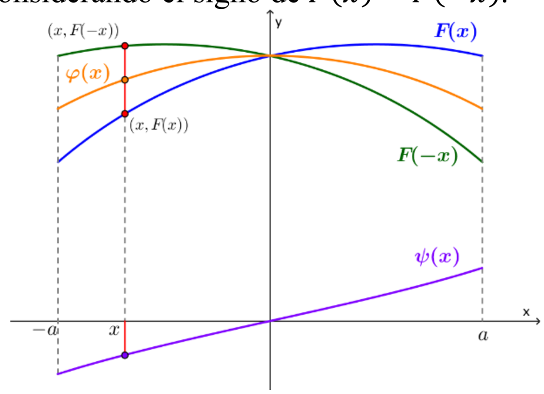
2. Realice una reflexión respecto del eje de las ordenadas a $F(x)$. Se obtiene $F(-x)$.



3. Pada cada x en $[-a, a]$, se toma el punto medio del segmento cuyos extremos son $(x, F(x))$ y $(x, F(-x))$, genera una curva $\varphi(x)$.



4. Pada cada x en $[-a, a]$, se genera la curva $\psi(x)$, con la mitad de la medida del segmento cuyos extremos son $(x, F(x))$ y $(x, F(-x))$, considerando el signo de $F(x) - F(-x)$.



Fuente: Tomada de Romero (2016, p. 76)

Para Fourier, con esta demostración logra lo que deseaba generalizar, pues dado que una función arbitraria se puede representar como suma de una función par y otra impar, y estas se pueden desarrollar en serie trigonométrica de senos y cosenos, respectivamente, entonces la función inicial se puede representar en serie trigonométrica de senos y cosenos.

Reflexiones finales

A partir de la aproximación sistémica de la TSME es posible observar aquellos significados geométricos y gráficos detrás del cálculo de los coeficientes de Fourier, él visualiza en la gráfica todos los pasos necesarios al lado de la operatoria aritmética que le permite calcular los coeficientes para la STF.
Se puede asegurar entonces que, en la forma de trabajo de Fourier, la manera de construir el conocimiento matemático relativo al cálculo de los coeficientes está ligado a la coordinación y articulación de diferentes miradas del objeto, una geométrica-gráfica y la otra algebraica-analítica, para validar la segunda en la primera.

En este sentido, el cálculo de los coeficientes de Fourier es un problema con características propias independientes del ambiente fenomenológico el que se origina la STF (la conducción de calor). Por lo que del trabajo de Fourier se evidencia que *la forma de acercarse al objeto (los coeficientes de Fourier) debe incluir movilidad en al menos dos registros de representación: el geométrico y el algebraico-analítico, en donde nociones como operación de funciones, integral definida y ortogonalidad de las funciones trigonométricas, desde una interpretación geométrica, cobran gran importancia*.

A pesar de que Fourier realiza un trabajo meramente matemático sin relación directa al contexto físico, es requerida una significación a partir del uso de la serie trigonométrica, previo al estudio del cálculo de sus coeficientes (Romero, 2016). Es decir, se requiere reconocer a la serie trigonométrica como una herramienta de predicción para fenómenos estables de variación periódico-acotada, previo a la significación del cálculo de los coeficientes.

Además, se evidencia que el dME predominante no promueve aquellos significados geométricos para el cálculo de los coeficientes, ni la significación previa de la serie trigonométrica a partir de su uso, lo cual podría ser un elemento importante para el diseño de situaciones de aprendizaje en las que se quiera significar a la STF.

Agradecimientos

Fabián W. Romero quiere agradecer al Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) por su apoyo para la asistencia a las actividades de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 31 en la ciudad de Lima, Perú. Además, agradece a la Universidad de Costa Rica por su apoyo para la realización de esta investigación.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa S.A.
Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 255-270.
Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa S. A.
Fourier, J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur*. París: Chez Firmin Didot, père et fils.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rodríguez, M. (2009). *Una matemática funcional para el ingeniero. La serie trigonométrica de Fourier*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier. Pautas para un diseño de intervención en el aula*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
doi: 10.13140/RG.2.2.14118.63048