

TRABAJO GEOMÉTRICO, CON ATENCIÓN EN EL CARÁCTER DINÁMICO DE LA GEOMETRÍA Y SU PROCESO DE CONSTRUCCIÓN: ANÁLISIS INICIAL

Sergio Rubio-Pizzorno, Gerardo Cruz-Márquez, Gisela Montiel Espinosa

Cinvestav-IPN. (México)

sergio.rubio@cinvestav.mx, gerardo.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

En el presente escrito damos a conocer un análisis inicial de algunos episodios del taller “Importancia del proceso constructivo en la actividad geométrica”, realizado durante la Relme 31, el cual nos permitió –entre otras cosas– refinar nuestras posturas respecto a la relevancia del proceso de construcción, y entenderlas producto de considerar el trabajo geométrico con énfasis en el carácter dinámico de la geometría, dado por el par transformación-invariante, y de reconocer a la construcción como una práctica geométrica.

Al mismo tiempo, el contraste de los aspectos teóricos con la evidencia empírica, nos permitió advertir que, además de tener en cuenta el carácter dinámico de la geometría y su proceso de construcción, es necesario movilizar la capacidad de interpretar símbolos que atribuyen significados geométricos a los diagramas.

Palabras claves: razonamiento visoespacial, trabajo geométrico, construcción

Abstract

In this paper we show an initial analysis of certain episodes of “*Importance of the construction process in the geometric activity*” workshop, carried out in the 31st RELME, which allowed us, among other things, to improve our stances on the importance of the construction process, and to understand them as the result of considering geometric work with emphasis on the dynamic character of geometry, given by the transformation-invariant pair, and of recognizing construction as a geometric practice. At the same time, the contrast of the theoretical aspects with the empirical evidence allows us to show that besides taking into account the dynamic character of geometry and its construction process, it is also necessary to prompt the ability to interpret symbols that give geometric meanings to the diagrams.

Key words: visual-spatial reasoning, geometric work, construction

■ Introducción

En la enseñanza de la geometría escolar, podemos identificar que las propiedades métricas y figurales de los objetos, al igual que los tratamientos algebraicos, priman por sobre las propiedades y tratamientos propiamente geométricos. Por ejemplo, la caracterización escolar más usual para un ángulo recto pende de una propiedad métrica –aquel que mide 90° –, obviando, por ejemplo, su interpretación geométrica a partir de rectas perpendiculares. Otro caso es el uso del teorema de Pitágoras, donde el contexto

geométrico del triángulo rectángulo es solo una excusa para plantear una ecuación, que es resuelta mediante métodos algebraicos, para finalmente obtener un valor numérico.

Ante estas situaciones escolares, nos cuestionamos cuáles son las propiedades y métodos geométricos invisibilizados por la tradición escolar. Para comenzar a delinear respuestas a tal problemática, consideramos dos elementos teóricos de partida: en primer lugar, el razonamiento visoespacial (RV), entendido como la habilidad humana de tratar objetos mentales y concretos; y, en segundo término, las naturalezas de la geometría (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017b), que propone al proceso de construcción como una práctica geométrica que ha sido invisibilizada por la tradición escolar.

La articulación de ambos fundamentos teóricos fue la base para el planteamiento del taller aludido, cuyo objetivo de partida fue confrontar los significados escolares asociados a los objetos geométricos con el proceso de construcción de los mismos.

■ Antecedentes

Tal vez uno de los fenómenos más estudiados respecto al tratamiento escolar tradicional que reciben las nociones geométricas es la centración en los aspectos figurales de las mismas. En este sentido, estudios como los de Barrantes y Zapata (2008), y Barrantes, Barretbo y López (2014), coinciden en que la limitada cantidad y pluralidad de representaciones con las que pueden interactuar los estudiantes en clase y libros de texto propicia la emergencia de prototipos geométricos, que progresivamente constituyen “esquemas mentales inadecuados para que el alumno desarrolle un pensamiento abierto y divergente” (Barrantes, Barretbo y López, 2014, p. 24). Asociado a este fenómeno también se ha investigado el papel que juega la rigidez geométrica (Larios, 2006), los factores de visibilidad (Marmolejo y Vega, 2005; Marmolejo y González, 2008) y las propiedades gestálticas (Maracci, 2001) en actividades que involucran la interpretación y/o construcción de figuras geométricas.

Así, identificamos –a nivel de conjetura– una relación entre lo reportado en la literatura y el enfoque escolar que prioriza las propiedades figurales y métricas, así como los tratamientos algebraicos, por sobre las propiedades y tratamientos propiamente geométricos. En consecuencia, nos cuestionamos de qué forma se relacionan los seres humanos con el espacio, la forma y la medida, y, en segundo lugar, cuáles son las propiedades y métodos geométricos invisibilizados por la tradición escolar.

■ Consideraciones teóricas

En cuanto al primer fundamento teórico mencionado, la literatura especializada en Matemática Educativa está utilizando el término RV para agrupar los resultados de investigación sobre visualización, pensamiento espacial, razonamiento espacial, pensamiento visoespacial, razonamiento visual, entre otros; que tienen en común hablar de la actividad de imaginar objetos estáticos o dinámicos y actuar sobre ellos (Sinclair, Bartolini Bussi, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung y Owens, 2016). En este sentido, entendemos el RV como la habilidad humana de construir objetos mentales con base en la percepción-abstracción de objetos concretos y de materializar objetos mentales en objetos concretos mediante la representación. Consecuencia de admitir al RV como una habilidad humana nos es necesario preguntarnos cómo se expresa éste al llevar a cabo tareas relacionadas con la geometría.

Por otro lado, el segundo fundamento teórico aludido nos permite incorporar propiedades y métodos propios de la actividad geométrica, nos valemos del estudio realizado por Rubio-Pizzorno y Montiel (2017b) sobre las naturalezas de la geometría relativas a ciertas áreas del saber humano, específicamente las naturalezas epistémica, epistemológica y filosófica:

N. epistemológica: “la geometría es un área del conocimiento humano que, en primera instancia, se inspira en la experiencia para luego desarrollar sus elementos teóricos” (Ibíd., p. 145). Es decir, en toda la geometría (actividad, razonamiento, representación geométrica) los aspectos teóricos y concretos están intrínsecamente relacionados de manera constitutiva.

Sumado a lo anterior, reconocemos como una manera de conceptualizar a la geometría mediante los invariantes que se manifiestan a través de transformaciones espaciales, a partir de lo cual se reconoce que “la característica dinámica de la geometría [está] dada por el par transformación-invariante” (Ibíd., p. 146).

N. epistémica: “los objetos geométricos se elaboran siguiendo una estructura discursiva que pone en juego aspectos teóricos y concretos; con base en proposiciones, definiciones, postulados y comunes sentencias; empleando instrumentos que encarnan las herramientas teóricas propuestas por Euclides. Los diagramas generados de esta manera [...] manifiestan propiedades teóricas y gráfico-espaciales, como características esenciales” (Ibíd., p. 144).

N. filosófica: para que los resultados geométricos con un pretendido valor de generalidad puedan descansar sobre el trazado de representaciones particulares, es necesario una “generación de verdades geométricas universales, las cuales son producidas mediante un proceso de construcción de representaciones geométricas concretas” (Ibíd., p. 145).

En la naturaleza epistemológica se declara que la geometría misma se desarrolla a través de la manipulación de objetos concretos, que luego son teorizados. Esta idea nos permite plantear la existencia de una relación entre la manera de hacer geometría con el RV, ya que en ambos casos existe una manipulación de objetos concretos y mentales.

Por otra parte, tanto en la naturaleza epistémica, como en la filosófica se ponen en realce la manera de producir diagramas geométricos, incluso proponiendo que el proceso de construcción produce verdades geométricas universales. En consecuencia, los objetos geométricos concretos manifiestan propiedades gráfico-espaciales (captadas por la percepción) y propiedades teóricas, propias de la geometría.

■ Diseños de las actividades

Ante la problemática mencionada y con base en los aspectos teóricos aludidos, diseñamos actividades con el objetivo manifiesto de indagar en la relación entre el RV y las prácticas geométricas, y al mismo tiempo reivindicar la importancia del proceso de construcción en la actividad geométrica. Dichas actividades se dividieron en dos grandes bloques: las actividades introductorias (actividades 1 y 2), que permitieron abrir la discusión respecto a la manera en que las personas interactuamos con los objetos mentales y concretos, y favorecieron un ambiente agradable de participación y debate; y las actividades de confrontación (3 y 4), que hicieron posible carear los significados escolares asociados a los objetos

geométricos con el proceso de construcción de los mismos, esto mediante tareas donde los métodos algebraicos y las propiedades figurales y métricas no son suficientes, y, en consecuencia, se enfrenta la necesidad de atender al proceso de construcción de los objetos geométricos para responder.

Actividad 1 “Un gato”: En esta actividad (Rubio-Pizzorno y Cruz-Márquez, 2017, p. 2.1) se les pidió a los participantes que dibujaran un objeto concreto (un gato), con la intención de reflexionar sobre el proceso de representación, entendido como la materialización de un objeto mental en un objeto concreto. En particular, esta actividad pretendía generar debate sobre los factores que causan que, a pesar de partir de un mismo objeto mental de referencia, se genere una amplia cantidad de representaciones distintas.

Actividad 2 “¿Qué vemos?”: Complementando a la primera, esta actividad pretendía comenzar la reflexión sobre el proceso de percepción-abstracción, tomando como punto de partida una misma imagen (una fotografía de un cielo nublado) y solicitando se identificaran en ella tantos objetos como sea posible. En especial, nos interesaba discutir sobre las causas de la diversidad de objetos mentales identificados, pese a tener el mismo objeto concreto de referencia (Ibíd., 2017, p. 2.1).

Actividad 3 “Abstracción de esencias”: El objetivo de esta actividad fue (Ibíd., 2017, p. 3.1) confrontar la manera tradicional de trabajar en geometría con una forma constructiva de hacerlo. La primera se caracteriza –entre otras cosas– por el uso de representaciones estáticas, la interpretación de símbolos que dotan cierto significado geométrico a los objetos y la desestimación de propiedades dinámicas; en cambio la segunda se basa en la característica dinámica de la geometría dado por el par transformación-invariante.

Para intencionar esta confrontación se dispuso de un diagrama con apariencia de cuadrado (Ver en Rubio-Pizzorno y Cruz-Márquez, 2017, p. 3.1), en el cual toda la información que aparece en él es veraz. La tarea consistía entonces en determinar, a la luz de la información que se pueda extraer de las propiedades teóricas y gráfico-espaciales del diagrama, a qué polígono correspondía. Se esperaba que los asistentes pudieran concluir que el diagrama correspondía a un cuadrado, resultado que se puso a prueba mediante la característica dinámica de la geometría, es decir, aplicando transformaciones e identificando qué permanece invariante.

Actividad 4 “Generación de invariantes”: Luego de reconocer la importancia del proceso de construcción en el trabajo geométrico –cuando se trabaja con una conceptualización de la geometría con base en las transformaciones y los invariantes–, se propuso la presente actividad para que los asistentes intentaran construir representaciones geométricas que encarnaran cierto objetivo teórico declarado *a priori*, por ejemplo, que el diagrama sea un trapecio rectángulo.

Para lograr este objetivo se propone que, en primer lugar, identifiquen las propiedades esenciales del cuadrilátero a construir, y luego puedan llevar a cabo tales propiedades en un proceso de construcción. Finalmente, se instó a los asistentes a que utilizaran la *prueba del arrastre* para comprobar si el proceso de construcción realizado fue adecuado para lograr el propósito declarado *a priori*; en caso de no serlo, se pretendía identificar los aspectos a corregir para lograr el objetivo.

En esta tarea se pretendía explotar el potencial epistémico, epistemológico y filosófico que guarda la prueba del arrastre en los ambientes de geometría dinámica:

En este uso del arrastre es posible identificar aspectos epistémicos (poner en juego la relación dialéctica entre elementos teóricos y concretos, al manipular diagramas para identificar invariantes), epistemológicos (emplear el par transformación-invariante, como propiedad dinámica, en el trabajo geométrico) y filosóficos (dotar de propiedades geométricas a los diagramas, mediante un preciso proceso de construcción, y abstraer la esencia de toda la clase de objetos geométricos que el diagrama específico está representando). De esta manera, concluimos que la prueba del arrastre emerge como convergencia y síntesis de aspectos epistémicos, epistemológicos y filosóficos, en los ambientes de geometría dinámica (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017b, p. 147).

■ Trabajo geométrico, poniendo atención en el carácter dinámico de la geometría y su proceso de construcción

Para desarrollar el análisis se dispone de la siguiente caracterización de los componentes del trabajo geométrico considerando su carácter dinámico:

RV como una habilidad humana movilizada en el trabajo geométrico

La forma en que las personas afrontamos tareas que relacionan con objetos mentales y concretos se basa en nuestra experiencia personal, aspectos perceptuales y conocimientos previos. De este modo, se espera que a partir de un referente (mental o concreto) cada sujeto hará una interpretación propia, diferente de la realizada por otras personas, aunque todas ellas compartan ciertos elementos esenciales del objeto al que se hace referencia. Bajo esta perspectiva, las personas abordan de una manera flexible las tareas en las que estén involucrados los objetos mentales y los concretos, aunque dicha tarea corresponda a una actividad geométrica, donde todos sus objetos están completamente definidos y determinados.

■ Carácter dinámico de la geometría

Desde una conceptualización de la geometría que se base en la interacción entre transformaciones, invariantes y el espacio, como la propuesta por Klein (1985), reconocemos el carácter dinámico de la geometría representado por el par transformación-invariante, y esto supone una manera dinámica de trabajar con los objetos geométricos y un uso de esquemas dinámicos para afrontar actividades geométricas.

En la actualidad, los ambientes de geometría dinámica representan un soporte material que permite manipular los objetos geométricos de una manera dinámica, a través del arrastre, su característica definitoria, entendido como una “transformación continua en tiempo real” (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351). Sumado a lo anterior, la prueba del arrastre actúa como un mecanismo de comprobación basado en la aplicación de una transformación y la identificación de los invariantes que permanecen a través de tal transformación.

■ Proceso de construcción como generador de invariantes

Para asegurar la generalidad de los resultados geométricos que se obtienen de trabajar con representaciones concretas, es necesario realizar un proceso de construcción adecuado, para lo cual se necesita cumplir dos condiciones: (1) Seguir un proceso de construcción “con base en proposiciones, definiciones, postulados o comunes sentencias”, y (2) “emplear instrumentos que encarnen las herramientas teóricas” declaradas en los *Elementos* (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017a, en prensa).

■ Análisis y discusión del taller

Luego de haber declarado los propósitos del taller y describir las actividades construidas en consecuencia, se presenta el análisis de algunos episodios del taller, a la luz del RV como una habilidad humana flexible y situacional movilizada en el trabajo geométrico, el proceso de construcción como generador de invariantes y de la característica dinámica de la geometría.

Los episodios seleccionados dan cuenta de hechos claves y representativos ocurridos durante el taller, en los cuales se manifiestan las características del trabajo geométrico considerando su carácter dinámico. De esta manera se contrasta la intención de las actividades y lo que realmente provocaron en las acciones y reflexiones de los asistentes al taller.

Episodio 1 “¿Qué polígono es?”: En la actividad 2, al solicitar a los asistentes que identificaran objetos en la fotografía proyectada, se obtuvo una amplia cantidad y variedad de respuestas (e.g. robot, personas, país, ratón, bota). Así, al discutir sobre la diversidad de objetos obtenidos, los participantes aluden a diversas razones: “Yo creo que las imágenes que están allí, así, tal cual, evocan cosas diferentes en nuestra mente de acuerdo a la experiencia que tenemos”. Éste tipo de comentarios nos permite ubicar a la experiencia y condiciones situacionales como factores en la asociación de objetos mentales a objetos concretos.

Ésta manera de movilizar el RV también se manifiesta al llevar a cabo tareas geométricas, con la salvedad de que en estas últimas el referente corresponde a un ente objetivado, debido a las propiedades teóricas y universales que está representando. Por ejemplo, en la actividad 3 se propone a los asistentes realizar un trabajo similar al llevado a cabo con la fotografía del cielo nublado, pero ahora con un diagrama geométrico. Las respuestas fueron tan diversas como la cantidad de asistentes, pero luego de una discusión se llegó a un consenso entre todos ellos: “Tiene cuatro lados iguales, porque tiene líneas perpendiculares (dos ejes). Por esos ejes se ve que [el diagrama] es simétrico; yo lo percibí así, pero realmente no hay medidas”; otro comenta “es una figura de cuatro vértices y cuatro lados. Entonces es un cuadrilátero. Sus cuatro ángulos internos son rectos, entonces puede ser rectángulo. El ángulo del centro, formado por las diagonales es recto, entonces puede ser un cuadrado. [...] Entonces ya concluí que es cuadrado”.

Así, a partir de captar propiedades del diagrama e interpretar los signos presentes, los participantes fueron declarando las relaciones que encontraban. Aunque sus aproximaciones a la actividad fueron distintas e inspiradas en la experiencia personal y los conocimientos previos, se logró alcanzar un consenso respecto al objeto representado, un cuadrado.

Episodio 2 “Ya no es cuadrado”: En la segunda parte de la actividad 2, se propicia el momento de confrontación de los significados geométricos escolares (estáticos, con arraigo en métodos algebraicos y propiedades gráfico-espaciales), con una manera de tratar a los objetos geométricos, considerando el carácter dinámico de la geometría.

En la primera parte de la actividad 2 los asistentes consensuaron que el diagrama presentado correspondía a un cuadrado. A continuación, se les pidió que utilizaran la herramienta *Relación* de GeoGebra (Kovács, 2015), para corroborar los argumentos propuestos en el análisis de la figura presentada. La discusión comenzó cuando la herramienta mostró que, por ejemplo, la longitud de los segmentos *c* y *d* son iguales, pero que no es cierto en general (ver Imagen 1, izquierda).

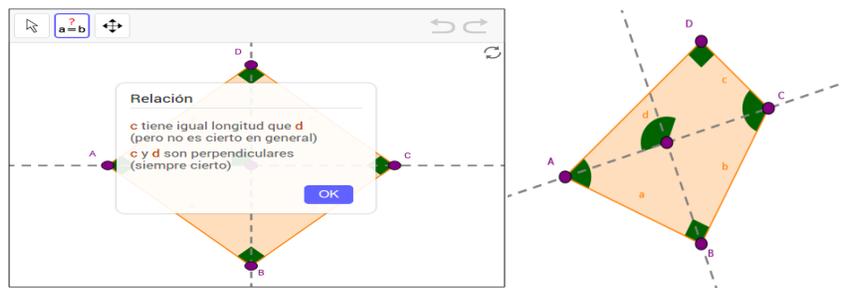


Imagen 1: Uso de la herramienta Relación (izquierda) y comportamiento general del diagrama (derecha).

Luego se arrastraron los vértices del polígono, con el objetivo de que el diagrama mostrara su comportamiento más general (sólo uno de sus ángulos internos es recto. Ver Imagen 1, derecha). A partir de esta actividad se comenzó a discutir sobre el carácter dinámico y la importancia del proceso de construcción en el trabajo geométrico: “Yo no podría decir si es un cuadrado. [...] Si tú dibujas eso en una hoja de papel, donde no se va a mover nada, y si yo lo veo así, de una forma estática, yo digo ‘eso es un cuadrado’. Pero si tú estás en un ambiente de geometría dinámica y lo que tú quieres construir es un cuadrado, tiene que cumplir una serie de requisitos, tiene que cumplir propiedades matemáticas [las cuales] que deben permitir que cuando yo arrastre, no cambie la figura y las propiedades se mantengan. Eso depende si me hubieras dado el dibujo en un papel, es una cosa; pero si estás en Cabri o en GeoGebra tendría que haber visto cómo lo construidas”. Finalmente, otro asistente concluye que para asegurar que la construcción sea un cuadrado, es necesario: “hacer la construcción correcta, es decir, mantener las relaciones que yo quiero, es decir, hacer la construcción a partir de esas relaciones”.

■ Conclusión

Si bien en el segundo episodio encontramos evidencia de la relevancia del proceso de construcción en el trabajo geométrico cuando se pone atención al carácter dinámico de la geometría, también hubo argumentos a favor de la interpretación de símbolos que representan propiedades geométricas, sobre todo cuando se trabaja con objetos geométricos en ambientes estáticos. Este último aspecto no estaba considerado en el propósito del taller, y nos parece una cuestión relevante a la hora de caracterizar de manera amplia y robusta el trabajo geométrico a partir de prácticas.

■ Referencias bibliográficas

- Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto. Revista de Educación*, 27(1), 55-71.
- Barrantes, M., Barretbo, I. y López, M. (2014). La componente visual de la geometría en los libros de textos de secundaria. *Revista Premisa*, 16(62).
- Goldenberg, E. y Cuoco, A. (1998). What is Dynamic Geometry? En: R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (351–367). New Jersey, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates. ISBN: 0-8058-1949-5
- Klein, F. (1985). El Programa de Erlangen. *Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación*, 2(4). En <http://valle.fciencias.unam.mx/titulacion/4e.pdf>
- Kovács, S. (2015). The Relation Tool in GeoGebra 5. En F. Botana y P. Quaresma (Eds), *Automated Deduction in Geometry: 10th International Workshop, ADG 2014* (pp. 53–71). Coimbra, Portugal: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-21362-0
- Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(3), 361-382.
- Maracci, M. (2001). Drawing in the problem solving process. En J. Novotná (Ed.), *Proceedings of 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 478-488). Praga, República Checa: Charles University.
- Marmolejo, G. y González, G. (2008). Algunos elementos a tener en cuenta en la enseñanza de las figuras geométricas en la educación básica. En Luque, Carlos Julio (Ed.), *Memorias XVIII Encuentro de Geometría y VI encuentro de Aritmética* (pp. 53-66). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Marmolejo, G. y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas. En Luque, Carlos Julio (Ed.), *Memorias XV Encuentro de Geometría y III encuentro de Aritmética* (pp. 661-693). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Rubio-Pizzorno, S. y Cruz-Márquez, G. (2017). Importancia del proceso constructivo en la actividad geométrica [Libro GeoGebra]. doi: 10.13140/RG.2.2.10569.44647
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017a). Construcciones dinámicas. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017b). Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. En P. Perry (Ed.), *23 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 143 - 148). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. ISSN: 2346-0539
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691–719. doi: 10.1007/s11858-016-0796-6