VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS VISTO DESDE EL USO DE EJEMPLOS. UNA PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

Nicolás Sánchez Acevedo; Luis Carlos Contreras; Leticia Sosa Guerrero
Universidad de Huelva, Universidad Autónoma de Zacatecas
nicolas.sanchez@alu.edu.es, lsosa@mate.reduaz.mx, lcarlos@uhu.es

Resumen
El conocimiento del profesor de Matemáticas es uno de los componentes de la enseñanza que tiene mayor preponderancia en el momento de identificar y evaluar las variables que inciden en este proceso. Este conocimiento se puede caracterizar desde diversos aspectos; uno de ellos es el uso de ejemplos en clase. Los ejemplos en Matemáticas son un referente didáctico a la hora de enseñar, pues muestran gran parte del conocimiento del profesor al ponerlos en juego. Varios modelos de conocimiento, desde el propuesto por Lee Shulman (1986), han intentado analizar y caracterizar la enseñanza de las Matemáticas en relación a la práctica del profesor. En este trabajo se presenta el modelo analítico de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés - Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge) como un modelo alternativo y útil a la hora de caracterizar el conocimiento puesto en juego al hacer uso de ejemplos. Se muestran algunas características de los ejemplos en Matemáticas y su relación con el modelo MTSK. Se finaliza con algunas proyecciones que pueden derivarse de la investigación.

Palabras clave: conocimiento especializado, uso de ejemplos, MTSK

Abstract
Mathematics teachers’ Knowledge is one of the teaching components that become essential at the moment of identifying and evaluating the variables that affect this process. This knowledge can be characterized from several aspects; one of them is the use of examples in classes. Examples in Mathematics constitute a didactic reference when teaching, because they show the teacher's knowledge when putting them into practice. Several models of knowledge, from the one proposed by Lee Shulman (1986) have tried to analyze and characterize mathematics teaching. In this paper, the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) analytical model is presented as a useful and alternative model for characterizing knowledge when using the examples. Some characteristics of mathematical examples and their relation with MTSK model are shown. The work concludes with some projections that can be derived from the investigation.

Key words: specialized knowledge, use of examples, MTSK

Introducción

Mucho se ha discutido sobre la importancia que tiene el conocimiento del profesor de Matemáticas al momento de enseñar. Consecuencia de ello son los grupos de investigación que se han formado especialmente en los últimos International Congress of Mathemathical Education (ICME, Alemania, 2016 y Korea, 2012), como también en los recientes Congress of European Research in Mathemamtics Education (CERME, Irlanda, 2017 y República Checa, 2015). Justamente esta preocupación es creciente, por una parte, debido a los constantes cambios a nivel social y por otra a nivel educativo. Esto hace indispensable analizar los distintos aspectos del conocimiento del profesor de Matemáticas, centrándose en analizar su naturaleza, las características del profesor cuando enseña y la profundidad del conocimiento que un profesor debe y debiese tener para llevar a la práctica su tarea docente (English, 2008). En este mismo sentido la tarea de enseñanza del profesor en el aula esta permeada por su conocimiento profesional, el cual es el soporte para diseñar, aplicar, reflexionar y actuar frente a las contingencias de los distintos fenómenos de aula y las interacciones con los estudiantes, lo que permite visualizar las respuestas de los estudiantes (Rojas, Flores y Carrillo, 2015).

Del mismo modo, el desarrollo profesional de los profesores hace necesario reconocer e identificar los conocimientos (didácticos, disciplinares) que el profesor evidencia al enseñar un tema específico. Justamente esta importancia es atribuida a los constantes cambios y demandas a los que está sometida la educación actual y por ende el profesor debiendo ajustarse a estas demandas (Reyes y Sosa, 2015)

La decisión de adoptar un aspecto para caracterizar el conocimiento puesto en juego del profesor de Matemáticas se torna complejo al asumir que la enseñanza y todo su entramado es un proceso *caótico* en términos de su complejidad, pues, por ejemplo, al momento de estar analizado la práctica del profesor desde una perspectiva curricular, afloran elementos que se relacionan con el contexto y otros aspectos. Lampert (2001) plantea que analizar la práctica de los profesores es una tarea compleja, debido a la simultaneidad, a veces diversos problemas deben ser abordados desde una sola acción; esto reviste una complicación, pues las acciones del profesor no pueden ser tomadas o analizadas de forma independiente, es decir, deben ser consideradas en todas sus interacciones.

Desde esta consideración, son varios los modelos de conocimiento que han tratado de caracterizar y describir el conocimiento que evidencia el profesor al enseñar un tópico específico (por ejemplo, Shulman, 1986 y Ball, Thames y Phelps, 2008). Como parte del grupo "Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM)", de la Universidad de Huelva, se propone el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (*MTSK, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), el cual permite profundizar en el conocimiento del profesor de Matemáticas, pero a diferencia de otros modelos, que este permite integrar e interrelacionar este conocimiento desde su característica especializada como definitoria (Escudero, Flores y Carrillo, 2012).

Uno de los aspectos que permitiría evidenciar un conocimiento especializado del profesor de Matemáticas es la selección y uso de ejemplos cuando enseña y pone en juego la gama de conocimientos, tanto matemáticos como didácticos para lograr aprendizajes en los estudiantes.

Los ejemplos son uno de los elementos más utilizados por el profesor para intentar explicar y mostrar propiedades, conceptos, definiciones, etc. Según Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky

(2006) la razón de la enseñanza de las matemáticas, por medio de la presentación de ejemplos, es que los estudiantes los aprecian como algo genérico y como modelos de uso futuro para poder resolver problemas de la misma estructura. La selección y uso de ejemplos por parte del profesor de matemáticas, permite evidenciar aspectos de su conocimiento especializado cuando ejemplifica en el aula.

En este trabajo se presenta el modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK) como instrumento para caracterizar este conocimiento en relación al uso de ejemplos.

Marco teórico

En los últimos años, la investigación centrada en el conocimiento del profesor de Matemáticas se ha visto incrementada debido a la necesidad de conocer y reflexionar en torno a las prácticas de enseñanza. Uno de los primeros trabajos que pretendió analizar el conocimiento del profesor es el de Shulman (1986), quien supuso una importante contribución en relación a la comprensión de los elementos sobre el conocimiento del profesor.

El trabajo de Shulman es uno de los pioneros en esta línea de investigación, del cual muchos otros se han apoyado para construir modelos más específicos, particularmente centrados en el conocimiento didáctico del contenido.

Otro de los trabajos que han sido aporte en este ámbito es el de Ball, Thames y Phelps (2008) quienes propusieron un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas articulado sobre la base de dos de los dominios establecidos en los trabajos seminales de Shulman (1986). El modelo de Ball et al., (2008) se diferencia del de Shulman, en que el conocimiento lo clasifica en dos grandes dominios, el conocimiento del contenido, el cual tiene por subdominios al: conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento en el horizonte; por su parte, el conocimiento didáctico del contenido está constituido por: conocimiento del contenido y la enseñanza, conocimiento de contenido y los estudiantes y el conocimiento del curriculum.

Tomando como base de análisis el modelo de Ball *et al.,* (2008), como las reflexiones llevadas a cabo en el Grupo de Didáctica de las Matemáticas de las Universidad de Huelva en relación a la nomenclatura del carácter especializado del conocimiento del profesor de Matemáticas llevó al grupo a proponer un modelo integrador en su especialización que afecta a todos los subdominios y no solamente a un subdominio, como lo propone el equipo de Ball et al., (Escudero, Flores y Carrillo, 2012; Flores, Escudero y Carrillo, 2013).

Nuestro foco está puesto en el *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK). Este modelo se considera una propuesta teórica y una herramienta metodológica que nos permite analizar la práctica del profesor de matemáticas (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014). El modelo se ve representado en la figura 1.

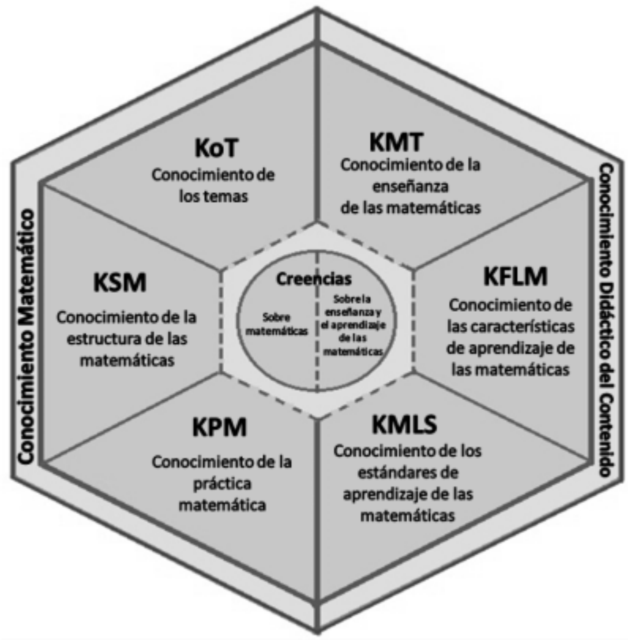

Figura 1. Modelo de Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*MTSK)* (Carrillo, Contreras y Flores, 2013).

El modelo está conformado por dos dominios, uno de ellos referido al Conocimiento Matemático, el cual incluye tres subdominios: a) Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT), es el conocimiento de los conceptos, procedimientos, fenomenologías y fundamentación teórica del tema en cuestión (en el ejemplo anterior, significados de la división, de la fracción y de la división y suma de fracciones, algoritmos para realizar estas operaciones con fracciones, o la idea de fracciones equivalentes); b) Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM), en relación al contenido matemático en las conexiones, que supone ver, entre otras cosas, la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y la matemática elemental desde un punto de vista avanzado (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013) y c) Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM): que se relaciona con las formas de hacer y proceder en matemáticas que un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática. El otro dominio es el referido al Conocimiento didáctico del contenido, el cual incluye los subdominios: a) Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM) que se refiere al conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de un concepto, así como el conocimiento de la forma en que los alumnos aprenden un cierto contenido, b) Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) que incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor impulsar el desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales y c) Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje en Matemáticas (KMLS) el que está conformado por los referentes que indican en qué momento debe aprenderse cada contenido y a qué nivel de profundidad.

Ejemplos y ejemplificación

El uso de ejemplos en clase de Matemáticas su importancia y relevancia no son discutibles, por ejemplo Rowland (2008) plantea que para que los estudiantes aprendan de los ejemplos es necesario hacer una diferenciación entre los de tipo inductivo (para dar ejemplos de algo de tipo general) y la otra es un uso de los ejemplos en que estos son los llamados ejercicios (con carácter ilustrativo y enfocado al aspecto práctico). También los ejemplos son usados al inicio de la clase, como forma de explicación o aclaración o para justificar un procedimiento, es decir, los ejemplos son una parte intrínseca del pensamiento matemático, el aprendizaje y la enseñanza, en especial, en relación a la conceptualización, generalización, abstracción, argumentación y pensamiento analógico (Zodik y Zaslavsky, 2008).

En relación con el concepto de ejemplo, este es definido por distintos autores diferenciándolo del concepto de ejemplificación. Zaslavsky (2010, p. 107) usa el concepto de ejemplo instruccional, el que define como "un ejemplo que es ofrecido por el profesor y que presenta una relación entre el contexto y un tópico particular de aprendizaje. Watson y Mason (2002a) menciona que un ejemplo es un caso particular de un concepto más amplio (idea, concepto, técnica, etc.) para que los estudiantes puedan razonar. Para Zodik y Zaslavsky (2008) los ejemplos son vistos como casos particulares sobre los que podemos pensar y generalizar hacia una clase o forma más. La diferencia con el proceso de ejemplificación es que este es usado para describir alguna situación en la que se ofrece algo más específico, lo que permitiría representar una clase más amplia que pudiese llamar la atención de los estudiantes (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky, 2006). Para Watson y Mason (2005), el término e*jemplificación* es usado para describir alguna situación en que algún objeto específico pueda ser presentado como representante de una clase más general, centrando de esta manera la atención en una determinada dirección.

Una tarea importante dentro de esta área es la de su clasificación. Para Figueiredo, Contreras y Blanco (2009) el interés está centrado en el objetivo que se busca, los clasifican de acuerdo: a su definición, su representación, sus características, sus aplicaciones internas y sus aplicaciones externas. Bills *et al.,* (2006) proponen una clasificación de acuerdo a la naturaleza en: ejemplos resueltos, ejercicios a resolver por los estudiantes, ejemplos genéricos (conceptos o procedimientos), contraejemplos y no ejemplos.

El MTSK de un profesor permitiría informar de varios elementos al momento de enseñar Matemáticas, en particular, cuando planifica y diseña las lecciones de clases en relación a los tipos de tareas que éste selecciona dependiendo de los objetivos que se planteen de acuerdo al nivel y temática matemática. En cierto sentido el uso de ejemplos, en el sentido de la decisión de elección, podría entregar información específica del KMLS de un profesor, pues pueden verse evidenciados elementos sobre si los ejemplos que aparecen en los libros de texto o documentos curriculares son idóneos para los estudiantes en relación a su contexto y nivel de desarrollo cognitivo, además de saber qué ejemplos son adecuados considerando sus aprendizajes previos.

Espacios de ejemplos

Los espacios de ejemplos se refieren a la representación mental de ejemplos por medio de imágenes, de expresiones matemáticas o alguna técnica para resolver una tarea en relación a algún contenido matemático. Un espacio de ejemplo es una experiencia en la que vienen a la mente una o más clases de objetos matemáticos a la vez relacionados con métodos de construcción y asociaciones, a cada espacio al que se tiene acceso se genera por diversos motivos o aspectos conocidos como variables que pueden ser accesibles y según nuevos ajustes estructurales es posible componer y recomponer (Goldenberg y Mason, 2008). Un ejemplo de espacio de ejemplo es el propuesto por Figueiredo (2010) para las funciones cuadráticas, en este caso pueden presentarse distintas imágenes como $y = 2x^2 - 10$, o de forma más general podría pensarse en $f(x) = ax^2 + bx + c$, objetos que son más característicos en estudiantes y profesores, pero otras representaciones pueden presentarse como, $f(x) = (x - a)(x - b)$ la que puede no ser tan visible al no contenerla expresión "x^2". Otros ejemplos pueden ser atribuibles a otras funciones como por ejemplo $\mathrm{y} = \log_a x$ o de forma más particular $\mathrm{y} = \log_2 x$ o su equivalente por su definición $a^y = x$. Esta característica podría aportar información en relación al KoT de un profesor. Se asume como base que el conocimiento de un profesor debe suponerse mayor al que tiene un estudiante, así por ejemplo un estudiante puede resolver una ecuación cuadrática incompleta por el método de la fórmula y un profesor debe poder resolver desde el método de factorización, por fórmula, por medio de una gráfica o tabla de valores; incluido este aspecto en la categoría de fenomenología. Por ejemplo las formas de representación que puede verse y entenderse una función, desde una forma gráfica, tabular, sagital, factorizada, canónica, que podría aportar información desde las formas de representación con las que cuenta un profesor para lograr aprendizajes.

Variación

La noción de variación, dentro del área de enseñanza de las Matemáticas, se asemeja a la capacidad del aprendizaje en relación a lograr hacer nuevas distinciones, es decir, tener la capacidad de discernir *algo de algo (la variación de una variable en relación a otra que se deja constante)* y poder relacionarlo con (en el sentido de un contexto) Marton y Booth (1997, citado en Figueiredo, 2010). Este tipo de aprendizaje, llamado por discernimiento, es aquél que permite discernir algo donde existe variación; si nada es variado, no será posible establecer esta distinción (Marton y Booth, 1997). Un ejemplo de variación es el que proponen Figueiredo, Contreras y Blanco (2009). Ellos analizan la noción de transparencia y variación en funciones; uno de ellos es en relación al ejemplo $f(x) = a(x - h)^2 + k$. En este ejemplo las letras a, h y k tiene relación con la posible contracción o expansión del gráfico y el sentido de la concavidad. Estas tres letras representan las tres dimensiones de variación posibles de este caso y las respectivas ampliaciones de cambios en los números reales para la letra h y la k y un IR-{0} para la letra a. En caso de tener un a=0, este sería un no ejemplo de función de segundo grado. La incorporación de aspectos de variación en tareas matemáticas por parte del profesor podría entregar evidencia de su KSM, debido a que los ejemplos son un soporte en la construcción de elementos y tópicos futuros de los estudiantes en relación a las conexiones de complejización, por ejemplo ir desde el aprendizaje de funciones lineales o cuadráticas, hasta llegar a la idea general de funciones polinomiales. Un indicio de conexiones de simplificación dentro del KSM del profesor, puede verse reflejado, de forma particular, al considerar el tema de funciones lineales como un aprendizaje previo para introducir el tema de funciones cuadráticas al momento de encontrar los ceros de la función como intercepto con el eje de las abscisas.

Transparencia

La noción de transparencia de un ejemplo está relacionada con la representación que se utiliza para un concepto cualquiera. En el trabajo de Lesh, Behr y Post (1987) se designan los sistemas representativos con el nombre de: *Opacos* o *Transparentes.* Según Figueiredo (2010) "Una representación transparente es aquella que no tiene ni más ni menos significado que la idea o estructura que representa. Una representación opaca enfatiza unos aspectos de la idea o estructura y atenúa otros". (p. 113). Los trabajos de Zazkis y Sirotic (2010) han dado cuenta de la comprensión sobre el concepto de número irracional, específicamente se han centrado en la influencia de las diferentes representaciones. Zazkis (2005) compara sobre el conocimiento que se tiene de la definición de número primo y de número irracional y cómo estos son percibidos. En ambos trabajos se alude al concepto de "opacidad" y "transparencia" de número irracional. En relación al concepto de función cuadrática, el profesor podría considerar los siguientes ejemplos:

(a) $y = (x + 1)(x - 3)$; (b) $y = (x + 1)2 - 4$; (c) $y = x2 - 2x - 3$.

Estas tres representaciones son diferentes, pero de la misma función. Así, cada ejemplo es transparente para algunas características de la función y opaca con respecto a otros. La transparencia en el uso de ejemplos, aun cuando es un elemento característico y más evidente en clases de Matemáticas, se lleva a cabo desde una reflexión más subjetiva. Este aspecto puede entregar información relevante del KFLM de un profesor, pues la selección de ejemplos depende mayoritariamente del nivel y contexto educativo, pero principalmente del objetivo que se quiera abordar al usar ejemplos, es decir, si lo que se pretende es, por ejemplo abordar el tema de función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$, para analizar los puntos de intersección con la abscisa, la selección de los ejemplos será aquella en la que estén expresados como factores, es decir $(x + \alpha)(x + \beta) = 0$ y no en su forma general; ejemplo que sería transparente a esta característica y mostraría indicios del KFLM, al considerar los dificultades que pueda tener un estudiante con otro tipo de representación. Con esto se puede identificar en cómo cree que pueden aprender los estudiantes y qué tipos de ejemplos presentarían mayores o menores dificultades al ser introducidos para apropiarse de concepto. Además, la inclusión de este elemento, podría aportar indicios del KMT de un profesor, por ejemplo en el uso de recursos y materiales adecuados para mostrar aspectos de transparencia y opacidad, el diseño de actividades didácticamente *"ricas"* para construir conocimiento desde la base de actividades apropiadas para los estudiantes.

Proyecciones

En este trabajo se pone de relieve la importancia relevancia que tiene el uso de ejemplos, en el conocimiento especializado que tiene que tener el profesor de Matemáticas al momento de planificar las lecciones y saber qué ejemplos dan sustento teórico práctico a esta(s) elecciones, los modos de usarlos y, en qué momento proponerlos en clase de Matemáticas. La información sobre este conocimiento (MTSK del profesor), sin duda aportaría evidencia significativa sobre el conocimiento especializado del profesor vista desde nuestro modelo análisis de conocimiento, MTSK. Por otra parte, pretendemos contribuir a la caracterización del conocimiento del profesor, centrados en sus dominios y subdominios, específicamente en lo que vislumbramos (a priori) en relación al del KoT, KSM, KMT, KFLM y posiblemente de su KMLS. La detección de estos subdominios a través de las categorías definidas en el modelo, permitirían caracterizar e indagar sobre las formas de enseñanza del profesor de Matemáticas, tanto desde la materia como desde la didáctica, en relación a los sustentos que permiten apoyar qué tipo de conocimiento apoya la elección y uso de esos ejemplos. Finalmente pretendemos contribuir con elementos teóricos a la investigación sobre la línea de conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, en general; y en particular lograr extender los indicadores que actualmente están definidos para estos subdominios propuestos.

Referencias bibliográficas

Ball D. L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education, en J. Novona, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *(1)*, 126-154. Prague, Czech Republic: PME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Escudero, D., Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y F.M. Rodríguez (Eds.), *Memorias de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 35-42.

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). New York: Routledge.

Figueiredo, C. (2010). *Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional*. Tesis Doctoral no publicada. Extremadura, España: Universidad de Extremadura.

Figueiredo, C., Contreras. L.C., y Blanco, L. (2009). A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. *Revista ZETETIKÉ FE/UNICAMP*, *17*(32), 29-60.

Flores, E., Escudero, D., y Carillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Goldenberg, P., y Mason, J. (2008). Shedding light on and with examples spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183-194.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, Conn.: Yale University Press.

Lesh, R., Behr, M., y Post, M. (1987). Rational number relations and proportions. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41–58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Marton, F., y Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Reyes, A., y Sosa, L. (2015). Caracterización del conocimiento matemático de los profesores en formación para enseñar el significado de razón. Actas del XIII Congreso Nacional de Investigación Educativa, (pp. 1-11). Chichuahua.

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de Educación Primaria al enseñar los números racionales. *Boletim de Educação Matemática*, *29*(51).

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 149-163.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Watson, A., y Mason, J. (2002a). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377- 385). Norwich, UK: PME.

Watson, A., y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching. In M. K. Stein, & Kucan, L. (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 107-128). New York: Springer.

Zaslavsky, O., y Lavie, O. (2005). *Teachers' use of instructional examples*. Paper presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brazil.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2-3), 207-217.

Zazkis, R. y Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link, *CBMS Issues in Mathematics Education*, *16*, 1-27.

Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 165-182.