Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 5 / USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

VISUALIZACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES CON APOYO DE GEOGEBRA

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Lucinda Serna Herrera, Rogelio Valdez Delgado
Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Universidad Autónoma de San Luís Potosí. (México)
larissa@uaem.mx, nehemiasmoreno@live.com, lucindaserna@gmail.com, valdez@uaem.mx

Resumen
Se describe la experiencia de instrucción de un grupo de estudiantes universitarios que cursaban la asignatura de Álgebra Lineal. Tomando en cuenta algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico, se diseñó e implementó un conjunto de secuencias didácticas para guiar el aprendizaje de las transformaciones lineales. Mediante las actividades propuestas, apoyadas en el software GeoGebra, los estudiantes lograron visualizar y comprender las nociones teóricas de linealidad y proporcionalidad participando en prácticas operacionales y discursivas relacionadas con la construcción de formas geométricas que se corresponden con las matrices de transformaciones lineales y que fueron interpretadas a través de las nociones de calibración, corte y homotecia.

Palabras clave: proporcionalidad, transformaciones geométricas, linealidad, visualización

Abstract
We describe the experience of teaching Linear Algebra to a group of university students. Taking into account some theoretical elements of the Onto-semiotic Approach, we designed and implemented a set of didactic sequences to guide the learning process of linear transformations. By means of GeoGebra software-assisted activities, the students could visualize and understand the theoretical notions of linearity and proportionality having participated in practices of calculations and discussions related to the constructions of geometric figures which are in correspondence with the matrices of linear transformations, and were interpreted through the notions of calibration, shear and homothety.

Key words: proportionality, geometric transformations, linearity, visualization

Introducción

El problema de la comprensión e interpretación del concepto de linealidad y su representación analítica es de gran importancia en las matemáticas. Se inician acercamientos a esta noción desde el nivel educativo Secundaria a través de los temas de proporcionalidad, de construcciones geométricas de segmentos proporcionales con aplicación del teorema de Tales, de las leyes de dependencia directamente proporcional, entre otros. Sin embargo, un estudio de los conocimientos previos por medio de una evaluación diagnóstica con las prácticas discursivas posteriores reveló un desempeño inadecuado en la resolución de problemas relacionados con el concepto de linealidad.

A nivel licenciatura, en la mayoría de los libros de texto que sirven de apoyo a los docentes que imparten cursos del Álgebra Lineal, la noción de linealidad es abordada mediante una definición formal presentada en términos y símbolos de espacios vectoriales, en cuyos discursos no se toman en cuenta las interpretaciones inadecuadas que pudiesen emerger del tratamiento indistinto del signo $+$ ("más") para las operaciones llamadas la "suma" (como composición de dos elementos) en cada espacio vectorial, el cual representa la operación de la suma usual de los números. Se realizó una revisión bibliográfica de los libros de texto recomendados tradicionalmente. Todos los libros de texto emplean el mismo símbolo para la operación de suma, excepto los libros de B. Kolman (Kolman y Hill, 2006) y de Rincón Mejilla (Rincón Mejilla, 2015), donde se distinguen los contextos de los espacios vectoriales correspondientes a matrices, polinomios y vectores geométricos con los signos de "suma" como $+$ encerrado en un círculo o en un cuadrado (lo mismo se aplica a la operación de multiplicación por escalar). No obstante, en la definición de aplicación lineal todos autores no enfatizan las operaciones en los espacios vectoriales correspondientes, que es lo más indispensables para evitar conflictos semióticos y lograr la comprensión de la linealidad.

Sin embargo, nuestra experiencia en la enseñanza de estos temas en el aula demuestra que es de suma importancia resaltar las diferencias entre la naturaleza de los elementos y cómo se establece la ley de operación con el empleo de los símbolos correspondientes (o subíndices indicando el espacio bajo consideración, $+_V$) para cada caso.

Marco teórico y metodología

En el diseño de las secuencias didácticas apoyadas en el uso del software GeoGebra se tomó en cuenta los fundamentos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), (Godino, 2002). La visualización, en el sentido del EOS (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012), considera la realización de prácticas visuales y prácticas no visuales, las cuales ponen en juego objetos lingüísticos y artefactos relacionados con la percepción visual, de las cuales las representaciones simbólicas son consideradas no visuales. En las secuencias didácticas llevadas a cabo con el empleo del software GeoGebra, el proceso de resolución de las tareas propuestas ha sido analizado tomando en cuenta la organización de los objetos visuales (lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos en los cuales ocurre la visualización) y la realización de los procesos de visualización y de significación. En relación con este último proceso, los objetos visuales también son considerados como antecedentes o consecuentes de funciones semióticas, es decir, algunas veces cumplen el rol de significante y otras de significado.

Las secuencias didácticas fueron aplicadas a 8 alumnos de licenciatura y consistieron en la realización de actividades relacionadas con la transformación visual de figuras regulares (como hexágono o pentágono) correspondiente a algunas transformaciones geométricas conocidas (construcciones con lápiz y papel). Para rotaciones y homotecias se pidió encontrar las representaciones analíticas (las matrices que expresan esas transformaciones respecto a unos sistemas de referencia).

Para el problema inverso (traducción de la información visual a la forma analítica): se demostraban a los estudiantes las imágenes de figuras dibujadas mediante GeoGebra, que estuviesen bajo las transformaciones lineales específicas (calibración y transvección), pidiendo reconocer la transformación aplicada y su representación analítica.

También se les propuso tareas sobre construcciones de homotecias para obtener un teorema reconocido de geometría moderna de circunferencia de los nueve puntos y de la recta de Euler. Este famoso teorema involucra muchas propiedades interesantes e importantes relacionando puntos y líneas notables de un triángulo. Su prueba con métodos de geometría euclidiana elemental se presenta en la obra de Shively (1984) que sirve como un libro de texto para los cursos designados como Geometría Avanzada o Moderna cuyo objetivo es la preparación de profesores en la matemática avanzada.

Descripción de secuencias didácticas implementadas en el proceso de instrucción guiada del tema de Transformaciones Lineales

Actividad 1: Ejercicios relacionados con la visualización de transformaciones lineales de figuras regulares (como hexágono o pentágono)

El problema de construir las imágenes de una figura bajo dadas transformaciones lineales expresadas en términos geométricos (rotación, homotecia, entre otras transformaciones geométricas conocidas) no presentaba dificultades.

Sin embargo el problema inverso, a saber, dadas figuras y sus imágenes construir la matriz de la transformación lineal dada, sí ha sido difícil (se trata de traducción de la información visual a la forma analítica para lo cual se requiere analizar ciertos elementos que se conservan y también detectar algunos patrones de cambios en las imágenes).

Por ejemplo, para encontrar la matriz de la transformación aplicada a un pentágono presentada en la Fig. 2 y 3, los alumnos realizaron prácticas guiadas para detectar elementos claves que caracterizan la transformación correspondiente.

Ejercicio 1. (Exploración empírica) Realizar dibujos de transformación de contracción (dilatación) con coeficientes dados.

Se pretende lograr entendimiento que las transformaciones lineales se expresan con una matriz 2×2 y se pueden descomponerse en tres transformaciones básicas:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

El estudio de casos particulares de las transformaciones lineales como contracción/dilatación revela que tales transformaciones son expresadas por medio de las matrices diagonales siguientes:

a) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, o su composición c) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, lo que se descubre de la representación de las imágenes correspondientes en forma matricial a partir de la expresión de las coordenadas de los punto de las imágenes como

a) $\begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

$$c)\ \begin{pmatrix} kx \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

El caso de cambio proporcional k=m, $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se denomina homotecia (similitud) y se considera en Actividad 3.

Ejercicio 2. (Prácticas computacionales y de construcción, dibujo con lápiz y papel).

Dada una matriz de transformación lineal encontrar las imágenes de unas figuras planas:
$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

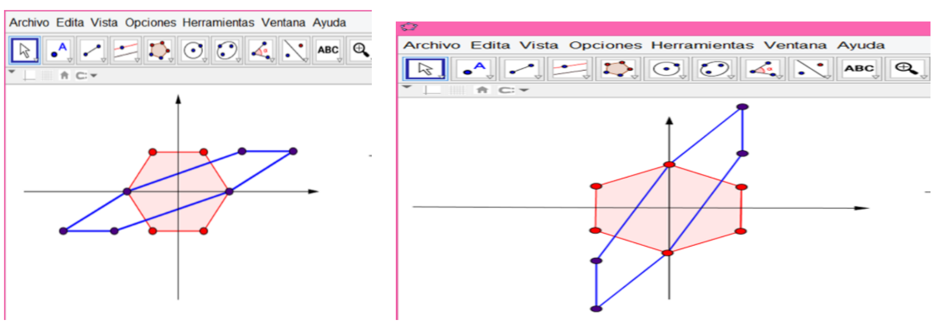

Figura 1 Transformaciones de hexágonos con matrices triangulares. (Elaboración propia)

En este ejercicio detectamos un conflicto semiótico relacionado con el modo de representación de los vectores de coordenadas: como filas o como columnas.

En las prácticas computacionales, para buscar coordenadas de puntos específicos de las imágenes, algunos estudiantes multiplicaron la fila de coordenadas por la matriz dada por la derecha, mientras que otros estudiantes, el vector-columna por la matriz del lado izquierdo (depende de cómo los enseñaron en los cursos previos) y los resultados fueron distintos (lo que se puede observar en la Fig. 1). Esto da evidencia de una comprensión inadecuada del concepto de matriz de una transformación lineal respecto a una base. Fue posible negociar con los estudiantes el significado de la matriz de transformación a través del proceso de construcción de las imágenes de manera visual porque unos alumnos obtuvieron la dilatación a lo largo del eje OX y a los demás a lo largo del eje OY (Fig. 1).

Se observó en la realización de prácticas discursivas emergentes que fue necesario cuestionar los datos iniciales, su significado teórico (la definición de la matriz de transformación) y legitimidad de los procedimientos empleados de manera automática.

Ejercicio 3 derivado de prácticas discursivas

Encontrar que las columnas de coordenadas y las filas de coordenadas se transforman por las leyes significativamente distintas con cambio de la base inicial.

Para los estudiantes avanzados se diseñaron ejercicios sobre formas lineales, de tal modo que el análisis de las leyes de cambio de las coordenadas de los vectores fila y los vectores columna (correspondientes a un cambio de la base en el espacio inicial) los llevó a descubrir que estas leyes son esencialmente diferentes (una matriz es la inversa de la transpuesta de la otra).

Además, las coordenadas organizadas en filas representan un objeto matemático llamado forma lineal, cuya representación geométrica es la línea recta y no un vector de posición (este hecho tiene realización clara en física, representando uno la partícula y el otro la onda). Por eso el espacio de filas forma el llamado espacio dual al espacio vectorial inicial.

Ejercicio 4. Encontrar la matriz de la transformación lineal a partir de dibujos (problema inverso: traducción de la información visual a la forma analítica).

Se demostraban a los estudiantes las imágenes dibujadas con el empleo de software dinámico GeoGebra, que estuviesen bajo una transformación específica.

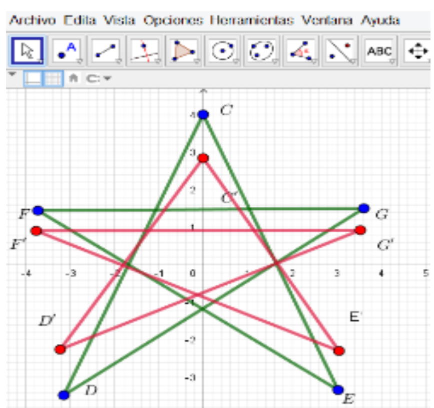

Fig. 2. Contracción del Pentágono. (Elaboración propia)

La exploración de la Fig. 2 del pentágono deformado (prácticas guiadas) revela que las abscisas de los puntos homólogos (inicial M y su imagen M') se conservan, $x = x'$, pero las ordenadas sufren disminución en este caso particular, $y' = my$.

Si organizamos esta información en columnas podemos escribir $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ my \end{pmatrix}$, o representándolo en la forma matricial, tenemos $\begin{pmatrix} x \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Las matrices diagonales de este tipo expresan la contracción hacía el eje Ox, si $m < 1$ (o cambio de unidad de medida a lo largo del eje Oy).

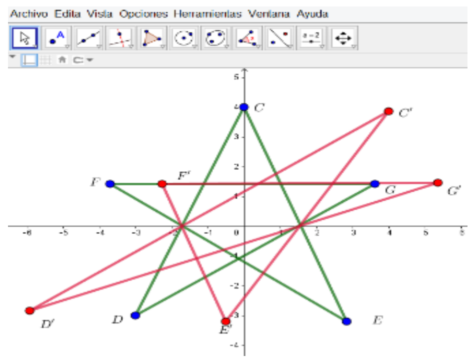

Fig. 3. Transvección del Pentágono. (Elaboración propia)

En el análisis del dibujo en la Fig. 3, detectamos que en este caso las ordenadas se conservan, $y' = y$, mientras que las abscisas se cambian de un modo específico, aumentando cada vez en un valor diferente (empleando geometría euclidiana podemos detectar el patrón): $x' = x + sy$, y siguiendo la representación en columnas y luego en su forma matricial, resulta la ley de transformación $\begin{pmatrix} x+sy \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con una matriz triangular con el determinante 1 (se denomina matriz triangular únimodular). Tal transformación tiene nombre de transvección, corte o inclinación.

Actividad 2: Para los alumnos con deficiencias en los conocimientos previos

Se diseñaron los ejercicios guiados con una secuencia de preguntas respecto al concepto de linealidad--proporcionalidad directa.

Ejercicio 1a.

Establecer la relación funcional y gráfica de temperaturas de Centígrados y de Fahrenheit, poniendo énfasis en la concordancia de unidades de escalas sobre los ejes de acuerdo con las proporcionalidades de medidas de temperaturas (con el objetivo de contraponer la función con la gráfica de línea recta y noción de linealidad).

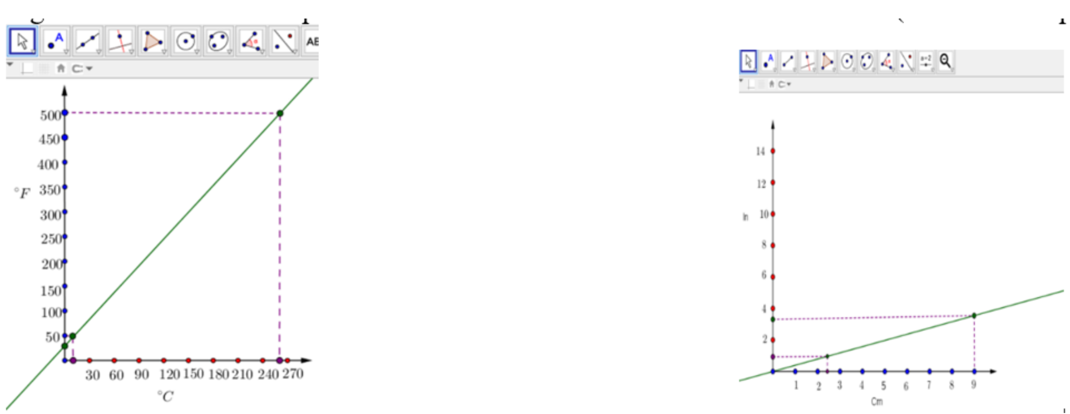

Figura 4. Relación de temperaturas no es lineal mientras de medidas es lineal (directamente proporcional) (Elaboración propia)

Ejercicio 1b

Realizar la calibración de los ejes correspondientes a la relación entre sentimenteros y pulgadas (usando el teorema de Tales).

Ejercicio 2

Establecer la aplicación biunívoca entre dos segmentos geométricos en una posición arbitraria. Esta práctica exploratoria les permitió descubrir la diferencia crucial entre las transformaciones conocidas, a saber, que la conservación de la proporcionalidad (por ejemplo, punto medio) se logra solamente en unas posiciones específicas. En los dibujos que representaban sus acercamientos para lograr correspondencia biunívoca se visualizan violaciones de proporcionalidad, debido a que los segmentos se encontraban relacionados bajo una proyección cónica, es decir, una transformación que aunque transforma puntos colineales en los puntos colineales, no es una transformación lineal en el sentido de linealidad de transformaciones de espacios vectoriales (no son euclidianas ni afínes, sino que proyectivas).

Actividad 3: Homotecia en el contexto de la geometría euclidiana

Ejercicio

Construir la Recta de Euler y la circunferencia de 9 puntos.

En cualquier triángulo ABC, los tres puntos: H, punto de intersección de alturas (ortocentro), punto G de intersección de medianas (centro de gravedad) y el circuncentro O se encuentran en una recta (llamada recta de Euler). Además el punto G se encuentra entre los punto H y O y divide el segmento OH en la razón $1{:}2$, es decir, $OG{:}GH = 1{:}2$.
Demostración:

Por las propiedades de medianas podemos considerar la homotecia γ con el centro en el punto G y coeficiente $k = -\frac{1}{2}$. Entonces cualquier vértice V se transforma en el punto medio M_V del lado opuesto a este vértice. Por eso la imagen de la cualquier altura (recta (VH)) se transformará a la recta $(M_V\,O)$—mediatriz (debido a que estas rectas son paralelas, siendo ambas perpendiculares al mismo lado, y como $\gamma(V) = M_V, \gamma(VH) = M_V O$.) Entonces $\gamma(H) = O$, y tomando en cuenta la razón absoluto de la homotecia γ, tenemos $|GO|{:}|GH| = 1{:}2$, lo que significa que el punto G se encuentra entre los puntos H y O. Con esto obtenemos la recta de Euler que contiene puntos H, O, y G .

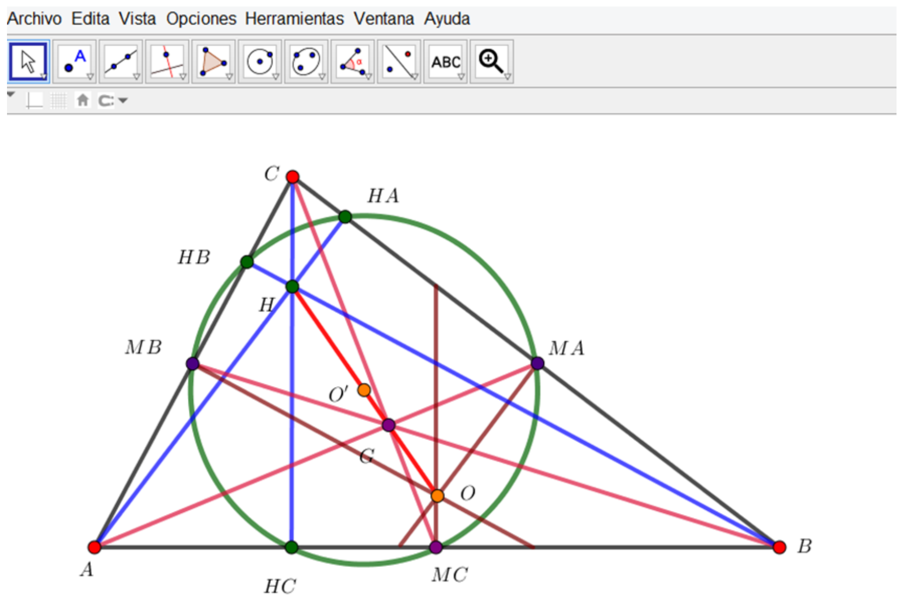

Figura 4. Circunferencia de nueve puntos y la recta de Euler. (Elaboración propia)

Ahora buscamos la imagen del circuncentro $O,\ \gamma(O) = O'$: por la definición de la razón de homotecia tenemos $\frac{GO\prime}{GO} = -\frac{1}{2}$, lo que significa que $\gamma(O) = O'$ y la circunferencia S con el centro O, se transforma en la circunferencia s con el centro O', que es el punto medio del segmento HO. Entonces para cualquier vértice $V, \gamma(OV) = O'M_V$, lo que implica que los puntos medios de los lados del triángulo se encuentran sobre la circunferencia s con el centro O' y del radio r que es la mitad del radio del circuncírculo.

En el dibujo realizado con el apoyo de GeoGebra observamos que la circunferencia s con el centro O' pasa por los pies de las alturas H_V: fácil probar que el centro O' se proyecta en el punto medio del segmento que une punto medio M_V con el H_V, y entonces es equidistante de dichos puntos, lo que significa que el pie de la altura H_V pertenece a la circunferencia s. Con esto tenemos 6 puntos notables sobre la circunferencia s.

Más aún, detectamos, analizando el dibujo, que la circunferencia pasa por los puntos medios K de los segmentos HV. Para averiguarlo, consideremos otra homotecia ω con el centro en el órtocentro H y el coeficiente $k = \frac{1}{2}$. Como $\omega\ (S) = s$, tenemos que $\omega\ (OV) = O'K$, siendo K el punto medio del segmento HV. Dada la relación entre los radios, el punto K se encuentra en la circunferencia s, la cual tiene nombre de la circunferencia de 9 puntos.

Conclusiones

El empleo de GeoGebra, por parte de profesor para demostrar los diagramas correspondientes a las secuencias didácticas, facilitó a los alumnos visualizar los efectos de variación de los valores de las entradas de cada una de las tres matrices de transformaciones en la descomposición de una transformación lineal arbitraria en el plano. GeoGebra permitió resaltar la transformación de las figuras bajo una transformación de transvección (corte, sesgo o inclinación) la cual simplemente expresa el paso de los ejes perpendiculares a los oblicuos, es decir, pasar a un sistema de coordenadas afines (marco de referencia afín). También mediante GeoGebra fue posible visualizar la linealidad: aunque las figuras se deformaron drásticamente (pues, no se conservaban las medidas como en transformaciones rígidas o de isometrías, ni los ángulos como en transformaciones de similitud), sin embargo nuestra percepción visual permite reconocer la figura inicial debido a un invariante afín de conservación de proporciones entre los puntos colineales en las imágenes bajo transformaciones lineales y el paralelismo.

Otro aspecto importante del empleo del software en la secuencia didáctica fue el que permitió mostrar que las relaciones lineales se conservan, en el sentido de conservación de combinaciones lineales, que corresponde a la conservación de proporciones (e.g., el punto medio de un segmento se transforma a el punto medio de su imagen, el centro de gravedad se transforma en el centro de gravedad de la imagen, esta es precisamente la razón por la cual somos capaces de reconocer las figuras que han sido transformadas linealmente).

Otro beneficio es relacionado con la explicación de las representaciones analíticas de las transformaciones: para contracciones la matriz tiene una forma diagonal, lo que se debe a la existencia de dos vectores propios que se observan en los dibujos, mientras en el caso de transvección, la matriz es triangular y no puede ser reducida a una forma diagonal, pues no existen dos vectores propios como se manifiesta la imagen de la figura transformada. Así se logra visualización del objetivo principal del curso relacionado con "diagonalización".

Referencias bibliográficas

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 30*(2), 109-130.

Kolman, B. y Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal*. México: Pearson Educación.

Rincón Mejilla, H. A. (2015). *Álgebra Lineal.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Shively, L. S. (1984). *Introducción a la geometría moderna.*México: CIA Editorial Continental S.A. de C.V.

Circunferencia de los nueve puntos. (sf) Recuperado el 22 de mayo de 2017 de https://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_de_los_nueve_puntos