Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ATIVIDADE PARA DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ESTUDANTES DOS ANOS INICIAIS POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Morgana Scheller, Zulma Elisabete de Freitas Madruga, Lori Viali

IFC–Rio do Sul, UESC, PUCRS. (Brasil)

morganascheller@yahoo.com.br, zulma.freitas@ulagos.cl, viali@pucrs.br

Resumo

Apresenta-se experiência de Modelagem na Educação desenvolvida com estudantes do 4º ano, a qual pode possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico com a utilização de linguagem simbólica na expressão de modelo matemático que resolve a situação-problema. Para isto foi desenvolvida prática de Modelagem na Educação intitulada '*Uma fita, muitas ideias*' com dezesseis estudantes do Ensino Fundamental de uma escola pública brasileira. A investigação sobre a *Fita Möebius* proporcionou condições para a obtenção de generalizações a respeito do número de fitas e largura das mesmas, quando realizado cortes longitudinais nas *Möebius*. Assim, obtiveram dois modelos expressos nas linguagens natural, tabular e simbólica. Desse modo, a atividade demonstrou que o método proporciona à criança condições para utilização de linguagem simbólica, contribuindo assim para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Palavras-chave: ensino de matemática por investigação, modelagem na educação, pré-álgebra

Abstract

We report an experience of Modeling in Education developed with fourth-grade students. It can enable the development of algebraic thinking by using symbolic language in the expression of a mathematical model that solves the problem situation. Thus, a Modeling in Education practice entitled 'A strip, many ideas' was developed with sixteen students from the Elementary School of a Brazilian public school. The investigation of Möebius strip provided conditions to obtain generalizations regarding the number of strips and their length, when making longitudinal cuts in the Möebius strip. This way, they obtained two models expressed in the natural, tabular and symbolic languages. So, the activity demonstrated that the method provides the child with conditions to use of symbolic language, what contributes to the development of algebraic thinking.

Keywords: research mathematics teaching; modeling in education; early algebra

Introdução

A Modelagem Matemática (MM) na Educação constitui-se atualmente um meio reconhecido na área da Educação Matemática para a abordagem do ensino de Matemática na perspectiva da investigação (Scheller et al, 2017; Biembengut (2011, 2007). Pode contribuir para uma educação algébrica como foco no desenvolvimento do pensamento algébrico e sua significação. Propostas curriculares orientam para o desenvolvimento de práticas de MM, as quais podem contribuir para os 'letramentos' do estudante, inclusive o matemático. Ademais, um ensino com pesquisa instiga o estudante no sentido da curiosidade em direção ao mundo que o cerca, possibilitando que o estudante possa ser protagonista na busca de conhecimento.

No entanto, os índices ilustram que o letramento matemático ainda não atende ao desejado, no Brasil. Dentre as várias tendências da Educação Matemática que visam auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem de modo a contribuir para a melhoria de tais índices está a MM, um método de ensino com pesquisa para os limites da sala de aula de Biembengut (2014). De acordo com a autora, o método pode ser utilizado em qualquer etapa da educação e, ao ser utilizado na sala de aula, a(s) criança(s) elabora(m) modelo(s), que em níveis mais avançados de ensino pode requerer linguagem simbólica, contempladas por meio de uma abordagem algébrica no ensino. Estudos, tais como os indicados anteriores, apontam que os modelos são expressos pelos que realizam as atividades de modelagem de acordo com as capacidades cognitivas e experiências que cada um possui em relação com o tema ou/e com o método. Por outro lado, no Brasil, a educação algébrica nos anos inicias da Educação Básica não estava destacada explicitamente. No entanto sabe-se que há necessidade de propostas que incentivam e orientam o desenvolvimento do pensamento algébrico já nos Anos Iniciais, como indicam o *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM (2007) e, recentemente, a Base Nacional Comum Curricular de abril de 2016 (Brasil, 2016).

Partindo do pressuposto que estudantes de todas as etapas da Educação Básica elaboram modelos para resolução de situação-problema em MM e que crianças dos anos iniciais ainda não possuem o domínio algébrico simbólico, como elas determinam modelos matemáticos que possibilitam a resolução do problema? Como uma atividade proposta possibilita a mobilização de linguagem simbólica pelas crianças contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico?

O estudo decorreu após revisão da literatura a respeito do tema – pensamento algébrico. Estudos de Schoenfeld (1995), Kaput (2008), Kieran (1996, 2004, 2007), Blanton e Kaput (2005), Schliemann, Carraher e Brizuela (2007), Kaput, Carraher e Blanton (2008) e Canavarro (2007) dentre outros, baseados na evolução histórica da álgebra, apontam para a importância de que o desenvolvimento algébrico e o aritmético ocorram simultaneamente, desde os Anos Iniciais da Educação Básica. A defesa é decorrente do próprio conceito de álgebra. Quando o foco refere-se à alfabetização algébrica, no cenário internacional, dentre os estudos, encontra-se a expressão '*Early Algebra*' (EA), utilizada para designar pesquisas cujos objetivos referem-se a significado diferente do costumeiro dos Anos Finais. A EA busca o reconhecimento do pensamento algébrico em atividades de matemática nos anos anteriores ao 7º Ano. Para Blanton e Kaput (2005, p. 413), o pensamento algébrico refere-se ao "processo pelo qual os estudantes generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade". Acredita-se que neste processo fazem uso de diferentes registros de representações utilizando linguagens variadas. Para estes autores o pensamento algébrico se subdivide em aritmética generalidade (generalização das operações e o pensamento relacional entre números) e pensamento funcional (descrição da variação numérica em certo domínio, ideia similar do conceito de função). Neste último é que pode ser desenvolvida a simbolização de quantidades, operações com estas, além da determinação de relações funcionais e representação gráfica que podem subsidiar a previsão de resultados. Segundo Kieran (2004, p. 149), nos anos iniciais, o pensamento algébrico

> [...] envolve o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito das atividades para as quais a linguagem simbólica pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas para álgebra e com as quais podem se envolver sem usar qualquer linguagem simbólica, tais como analisar relações entre quantidades, observar a estrutura, estudar variações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever (Tradução nossa).

Carraher, Schliemann e Brizuela (2008) e Kaput (2008) expõem que um dos meios para que os estudantes consigam este desenvolvimento é proporcionando condições para que os mesmos expressem afirmações matemáticas por meio de variadas representações como tabelas, sequências numéricas, gráficos cartesianos, notação algébrica simbólica e, claro, a linguagem natural. Considerando o potencial da MM na Educação e as características do pensamento algébrico dos Anos Iniciais, acredita-se que atividades com MM como método de ensino com pesquisa podem se constituir em uma alternativa e potencializar tais características, propiciando ao estudante condições de, inclusive, expressar simbolicamente generalizações. Nesse sentido, apresenta-se atividade idealizada e desenvolvida.

Procedimentos metodológicos

Para obter respostas às indagações presentes até então, desenvolveu-se pesquisa na perspectiva qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) em uma instituição pública de Ensino Fundamental brasileira. Participaram do desenvolvimento da atividade dezesseis estudantes (oito meninos e oito meninas) de faixa etária nove a dez anos, membros este pertencentes ao quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola do campo.

A atividade escolhida para de MM na Educação, desenvolvida em grupo de quatros elementos e denominada '*Uma fita, muitas ideias',* foi desenvolvida na perspectiva da *Early Algebra* ao longo de dez horas/aula, no primeiro semestre de 2015. A experiência pautou-se na concepção de Modelagem na Educação de Biembengut (2014) de acordo coma as três fases, não disjuntas, denominadas de:

Fase 1 - *percepção e apreensão* - envolve a percepção no reconhecimento da situação-problema relativa ao tema e apreensão na familiarização com o assunto a ser modelado.

No início da atividade o pesquisador, de posse de duas tiras retangulares de papel, indagou a turma sobre a quantidade de superfícies em cada uma delas. Após o apontamento das hipóteses sugere à turma a união das extremidades de cada uma das fitas de modo a obter um anel cilíndrico e uma fita de *Möebius*. Posteriormente solicita que, com auxílio de um lápis colorido, percorra longitudinalmente cada uma das fitas de modo a obter respostas a fim de confirmar as hipóteses. Solicita que registre suas observações a respeito de cada uma das fitas e procure justifica-las. Na sequência, questiona sobre o que a turma pensa ocorrer se cortar a fita longitudinalmente ao meio. Em seguida solicita que seja efetuada a secção e o registro do encontrado e sua justificativa para tal. Para finalizar a fase, toda a turma é instigada após a percepção dos primeiros cortes nas fitas a buscarem mais informações sobre o que constitui a *Fita de Möebius* e onde é utilizada. Além das informações obtidas pelas crianças na tarefa de casa, a pesquisadora proporcionou à turma uma série de textos sobre o assunto, o qual foi estudado pelas crianças para que, ao final, elaborassem um pequeno texto sobre o assunto.

Fase 2 - *compreensão e explicação* – refere-se a compreensão na formulação do problema, explicitação na formulação do modelo matemático e explicitação na resolução do problema a partir do modelo.

Embora o problema possa advir dos estudantes, nesta atividade, o pesquisador sugere a situação-problema ao grupo, visto sua intencionalidade de *Early Algebra.* Assim apresentou a situação problema: *O que acontece com a largura da largura da fita e com o número de fitas, na medida em que aumentam as secções longitudinais na fita de Möebius?* Para isto proporciona condições para a obtenção de dados e solicita o registro escrito das percepções feitas ao efetuarem cada uma das secções nas fitas, sempre aumentando o número de 'riscos', conforme Figura 1.

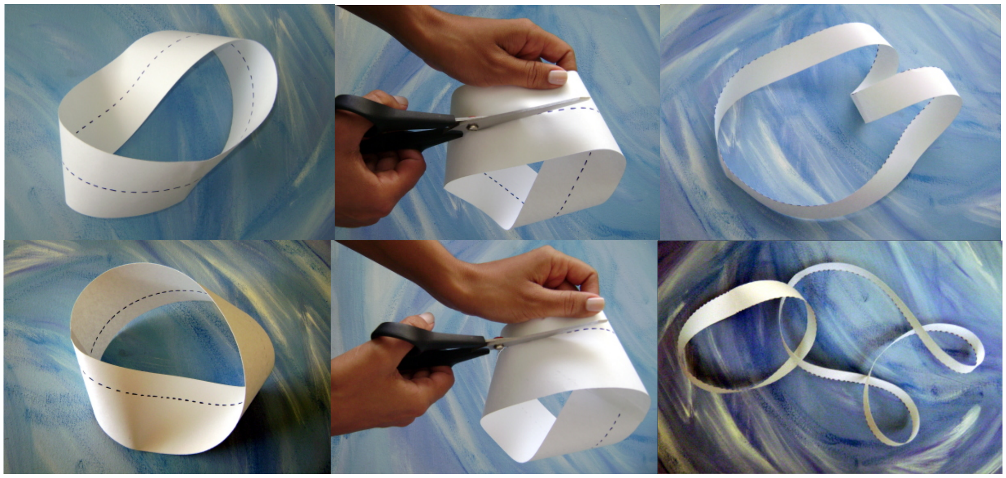


Figura 1. Ilustração da realização de secção longitudinal (ao meio e terça parte) na fita de Möebius. Fonte: http://www.unifal-mg.edu.br/extensao/?q=logo_extensao (2014)

Durante a realização dos cortes (até seis riscos), o pesquisador reforça a importância do registro das observações no caderno, visto que aqueles se constituem os dados para a resolução do problema, porém não infere sobre a o tipo de linguagem a ser utilizada para tal. Em seguida, sugere à turma a discussão sobre o obtido e durante a mediação aborda ou reforça conceitos matemáticos auxiliares (fração, razão, operações com decimais, dentre outros) que subsidiam a elaboração do modelo que resolve a situação problema. A sistematização das informações é incentivada pelo professor com a argumento de 'escrever mais resumido, em menos espaço', forma está utilizada e que direciona para o extrapolar a linguagem natural para a forma tabular. Esta parte é a mais desafiadora e necessita que o professor medeie a ação por questionamentos e não pelo apontamento de soluções, de modo que sejam as crianças que sugeriram os procedimentos e exercitem o pensamento criativo, crítico e argumentativo. São as indagações que farão com que as crianças cheguem ao modelo e resolvem a situação problema.

3) *significação e expressão* - envolve a significação na interpretação da solução e validação do modelo e a expressão do processo e do resultado.

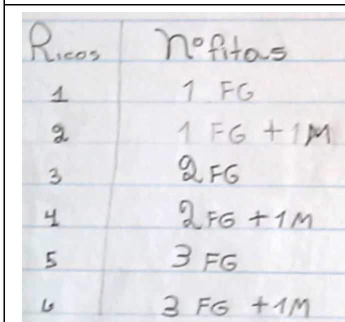
A partir do modelo, as crianças interpretaram a solução verificando se o mesmo atende ao proposto. Compararam por visualização os dados da tabela e os obtidos a partir de demais cortes. Também compararam os valores obtidos pela generalização com aqueles discriminados na tabela. Posteriormente, devem organizar as informações no caderno, apresentando os resultados a outras turmas da escola ou em feiras e amostras de conhecimento, de modo que o novo conhecimento seja explicitado.

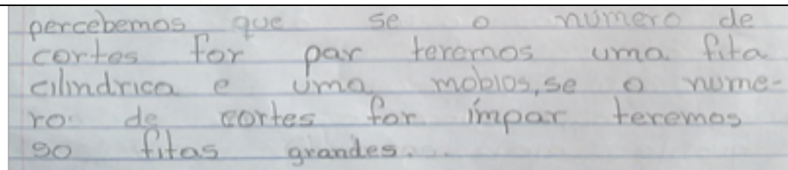
Alguns resultados da atividade

A atividade de Modelagem evidencia que práticas desenvolvidas em qualquer etapa de escolaridade obtêm resultados que evidenciam desenvolvimento cognitivo. Na Figura 2, apresenta-se uma síntese do expresso pelas crianças na atividade explicitada anteriormente.

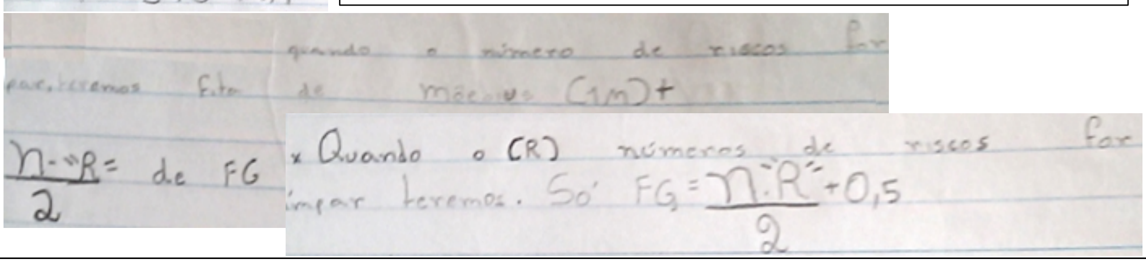
Estratégia escolhida - Confeccionar várias fitas de *Möebius* de mesma largura, fracionando cada uma delas em várias partes (ao meio, terça parte, quarta parte, ...). Anotar considerações decorrentes da observação na própria fita, após, todos juntos com o professor anotando na lousa, organizar em tabelas as informações obtidas, observando até o sexto corte, o número de fitas e largura da fita até o fracionamento total de cada uma delas.

Representação das percepções obtidas pelos Estudantes 5 e 9 e modelo matemático, elaborados a partir da obtenção de dados oriundos dos cortes e expressos nas linguagens natural, tabular e simbólica.





O número de fitas é sempre a metade, por exemplo, o 6. A metade de 6 é 3. Então, 3 fitas grandes enroladas. Como é par tem mais uma de Möebius. O 5, a metade de 5 é 2,5. Não dá para ter meia fita, então nós aumentamos 0,5 e ficam 3 fitas (E5).



Em relação a largura da fita afirmaram ser $\frac{1}{s}$ da largura original quando se fazer ‘R’ riscos nela. A linguagem escolhida - o ‘s’ que vem depois do ‘R’ no alfabeto para representar a ideia de sucessor.

Figura 2. Estratégia escolhida pelos estudantes diante da situação-problema e representações para os modelos obtidos na atividade de Modelagem Matemática. Fonte: Os autores (2017).

Nos apontamentos orais e escritos conclusivos observou-se que as crianças utilizam conceitos matemáticos e apresentam raciocínio matemático bastante desenvolvido para o nível em que se encontram. Visto que os primeiros estão fortemente identificados com quatros tipos de sistemas simbólicos chave (linguagem natural, numérica, geométrica e notação algébrico-simbólica), cada um com função importante a desempenhar e com regras de expressão e lógica interna (Schliemann et al, 2003). Movimentar-se de um para outro foi essencial e necessário para os estudantes determinarem o modelo. Fato considerado difícil por Schliemann, mas possível por esses estudantes dos Anos Iniciais. Confirmando os apontamentos English (2010) e English e Waltters (2004a, 2004b), os estudantes extrapolaram o simples levantamento de dados. No processo de resolução das situações-problema apresentaram estratégias criativas/reflexivas para resolver as mesmas e diferentes linguagens para um mesmo objeto matemático (modelo) e a utilização de diferentes registros ora ocorreu pela mediação incentivadora do professor, ora por iniciativa dos próprios estudantes. O papel do professor nas atividades foi determinante para o desenvolvimento do pensamento algébrico, principalmente para que os mesmos utilizassem dentre os diferentes registros.

Na segunda generalização, referente a largura da fita, as crianças buscaram expressar o que era mais significativo para elas, aquela simbolição que fazia mais sentido naquele contexto. O pesquisador conduziu a discussão para os estudantes concluíssem que a largura da fita seria o sucessor de *'r'(r+1)*. No entanto, a linguagem escolhida foi equivalente, uma vez que o 's' que vem depois do 'r' na sucessão alfabética. Para Kaput (2008), as crianças devem ser encorajadas a utilizar seus próprios recursos e também a utilizarem a notação convencional, pois todos os dois processos enriquecem e aprofundam os raciocínios algébricos. A ideia de sucessor foi justificada pelos estudantes na sequência das letras do alfabeto, portanto, a linguagem matemática pode se constituir com auxílio de outros tipos de linguagem. Percebeu-se então que as crianças conseguem emitir considerações que levam a emissão de uma generalização, porém ainda não dominam uma linguagem pertinente uma vez que não é de seu conhecimento, mas já possuem uma que é equivalente. Ilustram desta forma que estão envolvidas em um movimento na zona de desenvolvimento proximal próximas de um nível de desenvolvimento potencial (Vygosty, 1984). No entanto, se pode afirmar que elas pensaram algebricamente. Pensamento este que se manifestou quando elas, vivenciando uma situação, desenvolveram o processo matemático de generalização a partir da observação das fitas e dos dados organizados nos quadros, utilizando variados recursos de linguagem cada vez mais sofisticados, conforme descritos por Kaput (2008) e Carraher; Schliemann e Brizuela (2008): a linguagem visual, a numérica, a natural e a simbólica.

Considerações Finais

O estudo procurou evidenciar o potencial de uma atividade de MM para o desenvolvimento do pensamento algébrico quando propiciou a utilização de linguagem (pré) simbólica. Similar aos estudos de Schliemann e Carraher (2002) e Blanton e Kaput (2005) dentre outros, percebeu-se na atividade, que crianças dos Anos Iniciais conseguem raciocinar sobre funções sendo capazes de descrever modelos matemáticos em linguagem natural, tabular e simbólica. A presença das fitas fracionadas, os quadros e tabelas elaboradas, a linguagem natural e a simbólica se tornaram, nesta prática, importantes estruturas no raciocínio matemático das crianças, pois em torno delas que os estudantes desenvolveram o pensar algebricamente. Para Canavarro (2007, p. 106), "a possibilidade de utilização de diversas formas de representação amplia as hipóteses dos alunos mais jovens conseguirem organizar o seu pensamento, para além de facilitar a sua comunicação, nomeadamente ao considerarem-se as representações não convencionais."

Percebeu-se que as crianças em atividades de EA não conseguem obter a generalização (uma fórmula) de modo tão natural e rápido, uma vez que utilizam suas próprias maneiras de expressão não convencionais. Isso porque elas não estão familiarizadas com 'letras' para 'escrever resumidinho' e, até mesmo, expressar uma variável. O processo de generalização é um processo que exige do professor paciência na mediação de forma a conduzir a criança a expressar o que consegue perceber nas várias representações semióticas anteriores à representação algébrica. Trata-se de um processo gradual. A leitura/estudo das figuras e tabelas e devida reflexão sobre o que está sendo realizado auxilia o estudante a determinar o próximo número não presente na representação e assim, obter a generalização, expressando-a por meio de uma notação matemática. É um processo de reflexão sobre a ação realizada e a expressão das várias significações dadas a ela.

Referências bibliográficas

Biembengut, M. S. (2014). *Modelagem no ensino fundamental*. Blumenau: Edifurb.

Biembengut, M. S. (2011). Modelagem na Educação Matemática e Ciências nos anos inicias do Ensino Fundamental. *Educação Matemática em Revista*, 12(1), 29-41.

Biembengut, M. S. (2007). Modelling and applications in primary education. In W. BLUM et. al. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education – discussion document.* pp. 451-456. New York: Springer.

Blanton, M. & Kaput, J.J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: *uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora.

Brasil. (2016). *Base Nacional Comum Curricular* - proposta preliminar. 2. Versão revista. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Brasília: MEC, SEB.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81-118.

English, L. D. (2010). Modeling with complex data in the primary school. In Lesh, R. et al. (Eds.), Modeling students' mathematical modeling Competencies. *ICTMA 13* (pp. 287-300). New York: Springer.

English, L. D. & Watters, J. J. (2004a). Mathematical Modelling with young children. In: Høines, J.; Fuglestad, A. B. (Eds.). *The 28 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen (pp. 335-342).

English, L. D. & Watters, J. J. (2004b). Mathematical modeling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), pp.58-80.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In: Kaput, J.; Carraher, D.; Blanton, M. (Eds.). *Algebra in the Early Grades.* pp.5-17. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J.J., Carraher, D. & Blanton, M. (Eds.). (2008). Algebra in the Early Grades. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), pp.139-151.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. ALSINA et al. (Eds.). In *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*. pp. 271-290. Sevilha, Espanha: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, 16 (1), 5-26.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Trabalho original publicado em 2000. Tradução da Associação de Professores de Matemática (APM). Lisboa: APM/IIE.

Scheller, M. et al. (2017). Modelagem nos anos iniciais da educação básica: como os estudantes modelam situações-problema? *Ciência & Educação*, 23 (1), 197-217. Doi: http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320170010012.

Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical understanding: Everyday versus idealized reasoning. *Developmental Review*, 22(2), 242–266.

Schliemann, A. D. et al. (2003). Algebra in Elementary School. *27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Honolulu, HI, July.

Schliemann A. D., Carraher D. W. & Brizuela B. M. (2007). Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1995). Report of Working Group 1. In C. B. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), The algebra initiative colloquium (Vol. 2, pp. 11–18). Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement.

Vygotsky, L.S. (1984). *A formaçao Social da mente*. Sao Paulo: Martins Cortez.