Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

RESIGNIFICACIÓN DE ALGUNAS NOCIONES MATEMÁTICAS EN ESCENARIOS DE LA BIOLOGÍA

Daniela Soto Soto; Karina Vilches Ponce
Universidad de Santiago de Chile; Universidad Católica del Maule. (Chile)
daniela.soto.s@usach.cl, kvilches@ucm.cl

Resumen
En Chile la modelación se ha integrado al currículo nacional como una habilidad para el desarrollo del pensamiento matemático. Asumimos la problemática que se produce cuando el profesor se ve enfrentado a desarrollar esta habilidad, la cual ha sido vagamente abordada en su formación inicial y continua. En este sentido, y a partir de un trabajo interdisciplinario que articula la Matemática Educativa y la Biomatemática, se ha logrado configurar un conjunto de propuestas de situaciones de modelación que reflejan el diálogo entre la funcionalidad de la matemática y una realidad particular: escenarios biológicos, lo cual, presumimos, da contexto y permite la resignificación de diferentes nociones de la matemática escolar. En este documento presentamos una situación de modelación que permite la resignificación de lo asintótico y las consideraciones que se debieron atender, entre ambos campos disciplinares, al momento de ser diseñadas.

Palabras claves: modelación, socioepistemología, siomatemática, situaciones de modelación

Abstract
In Chile, modeling has been integrated into the national curriculum as a skill to develop from an early age in students. We assume that the problem occurs when the teacher is faced with new structures for the teaching of mathematics, forms that have not been studied in their initial or continuous training. In the particular case of modeling, we can realize the need of reflection and action on this notion. In this sense and based on a multidisciplinary work, combining Educational Mathematics and Biomathematics, it has been possible to elaborate a set of learning situation proposals that reflect the dialogue between mathematics functionality and a specific reality: biological scenarios, which provide context and support to different notions of school mathematics. In this report, we present a modeling situation and the considerations that should be taken into account when designing it.

key words: modeling, socio-epistemology, biomathematics, modeling situations

Introducción

Hoy los actores sociales y educativos se hacen cargo de nuevas estructuras de la Matemática Escolar, por ejemplo, en los planes y programas de enseñanza media de la educación chilena se ha integrado la modelación como una habilidad para el desarrollo del pensamiento matemático. Por tanto, es importante generar reflexión continua, desde enfoques innovadores, acerca de esta práctica social, la cual ha permitido la construcción de conocimiento matemático y la aplicación de nociones matemáticas en diferentes escenarios.

Este documento refleja el esfuerzo, por parte de investigadores de campos disciplinares distintos; la Matemática Educativa y la Biomatemática, por explicitar la funcionalidad de la matemática en escenarios donde juega un rol de herramienta. Lo cual permitió el análisis, la simulación y predicción de fenómenos relacionados a la realidad observable. En particular, se estudió una noción biológica; **capacidad de soporte**, que admite la resignificación de lo asintótico. Se señala *lo asintótico* para diferenciar de la *asíntota*, concepto que ha promovido el discurso matemático escolar, aspecto que se revisará en el diseño de la situación.

Así, el propósito de este documento es presentar el rediseño de una situación de modelación a partir de la consideración de elementos de análisis en escenarios biológicos, justificar las propuestas y reflexionar acerca del diálogo que se debió llevar a cabo, entre dos campos disciplinares distintos, que se articularon con el fin de fortalecer la modelación matemática escolar.

La modelación en la educación matemática

Según Cordero (2015) existen dos grandes vertientes sobre la modelación (sin adjetivos) en la sociedad: representar la realidad y aplicar una estructura de conocimiento a una situación real, con modelos empíricos o analíticos según los intereses disciplinares (Bissell y Dillon, 2012). En particular, en la disciplina de la matemática suele definirse a la modelación como una teoría que estudia las características cualitativas de las estructuras matemáticas: se exige de un objeto predeterminado (una realidad), ya sea para ser reproducido o para ser distinguido de otros objetos. Se asume que la modelación matemática es fundamental en los métodos de investigación aplicados en otras disciplinas; en este sentido, la matemática, a través de la modelación matemática, se transforma en una herramienta para la construcción de conocimiento en diversos campos disciplinares. Desde una perspectiva más empírica, Modelar matemáticamente consiste en una acción por la cual se construyen objetos mentales que, sustentados en conceptos (componentes) y teorías matemáticas (relaciones), simulan sus correspondientes en una realidad idealizada. Estos ideales o modelos son analizados desde una perspectiva matemática con base en los intereses de los campos disciplinares que aportan el contexto. Para el marco curricular chileno, la modelación es una de las cuatro habilidades para el desarrollo del pensamiento matemático.

Por otro lado, desde la investigación al seno de la disciplina Matemática Educativa, existen diferentes visiones acerca de lo que significa modelar. Una mirada cognitiva, concibe a la modelación a partir de la estructura de las representaciones y los registros semánticos que establecen relaciones con los procesos cognitivos de los individuos (Cordero, 2015). Para profundizar más al respecto puede consultarse a Blum (2002). Una mirada didáctica, señala que es necesario implementar la modelación en el aula a través de proyectos y resolución de problemas (Aravena, Camaño y Giménez, 2008). Desde esta perspectiva se destaca la aplicación de los conocimientos matemáticos a situaciones reales que estén en estrecha relación con la temática de estudio y sean susceptibles a la formulación matemática propuesta. Solar, Azcárate, y Deulofeu (2012) reconocen los procesos de modelización como competencias matemáticas. Todos los trabajos anteriormente mencionados dan cuenta de la importancia de la modelación en el aula y muestran que, al margen de los intereses y preocupaciones en torno a la modelación, se presume que está ligada con la realidad. Este es un aspecto significativo cuando se piensa en integrar esta habilidad a la formación de un ciudadano.

La teoría socioepistemológica (TS) ha señalado que es importante considerar las diversas realidades donde se expresa, emerge y se usa el conocimiento matemático. A estos diferentes contextos se les denomina *escenarios*, algunos de ellos son: el histórico epistemológico, el cotidiano, los escenarios culturales, de la escuela y de los diferentes dominios disciplinares. Específicamente, para la TS, reconocer estos escenarios ha permitido la resignificación progresiva de algunas nociones de la matemática escolar (Cantoral, 2013), y la consideración de categorías transversales que permiten la construcción del conocimiento matemático. Para esta investigación se considera la categoría Modelación-Graficación (M-G) construida por Suárez (2014), la cual expresa un argumento que permite vislumbrar la funcionalidad del conocimiento matemático.

Desde la TS, se considera que la M-G es una práctica socialmente compartida que permite la construcción del conocimiento, por tanto, se puede encontrar en los escenarios y situaciones propias de cada comunidad. De esta forma, un aspecto innovador es primero reconocer y explorar escenarios donde la M-G es una práctica, que permite la construcción de conocimiento, con el fin de diseñar situaciones que promuevan la resignificación de diferentes nociones de la matemática escolar. En otras palabras, mientras la mayoría de las perspectivas en torno a la modelación buscan situaciones reales en donde se apliquen conocimientos matemáticos específicos (por ejemplo: función lineal, cuadrática, entre otras), e identificar los procesos que lleven al estudiante a la adquisición conceptual del objeto, la propuesta de este trabajo es examinar las prácticas de la comunidad de conocimiento específica, para luego proponer las situaciones que harán emerger conocimientos matemáticos.

La Biomatemática y la modelación matemática

Uno de los primeros indicios sobre cómo dialoga la matemática con otras disciplinas y sobre el uso de la matemática para describir relaciones abstractas entre variables cuantificables, que representan aspectos de la observación de la realidad, es decir a la práctica de modelar matemáticamente, se remontan a Galileo, Gilbert, entre otros, en el siglo XVII (Dougherty y Neto, 2006). Un siglo más tarde, la construcción de la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales emerge desde las Leyes Gravitacionales de Newton en el siglo XVIII, a partir de los trabajos de Euler, Lagrange, Laplace, Hamilton, Poincaré, entre otros, (Dyson, 1972). Específicamente, a fines del siglo XVIII Malthus, es uno de los primeros autores que modela el crecimiento poblacional, a partir de consideraciones sociales, este autor publica su ensayo formulando a través de evidencia empírica un modelo de crecimiento exponencial en 1798. Este modelo se utilizó para evidenciar la necesidad de generar políticas de control de natalidad en Londres (Mathus, 1888). A partir del ensayo de Malthus, Verhults observa que el crecimiento de la población humana, no sólo está determinado por el número de nacimientos y muertes, sino que también existen variables externas que intervienen en el cambio de una población, por lo que el crecimiento exponencial puede ser realista en un corto plazo, pero en el largo plazo es necesario considerar nuevas variables involucradas en el proceso. Es así como, Verhulst escribe sobre los modelos de crecimiento de las poblaciones desde una perspectiva matemática, por lo que los primeros indicios formales sobre la irrupción matemática en la ecología de poblaciones se remontan a inicios del siglo XIX (Verhulst, 1845). Un hecho destacable del trabajo de Verhulst, es la introducción de la capacidad de soporte de un sistema (en inglés *Carrying Capacity*), la cual llama en su trabajo el *límite extremo de una población*, y la calcula para Bélgica en 6 millones y para Francia en 40 millones, basado en su modelo que él mismo nombra de *Logístico* y en los datos estadísticos poblacionales existentes y de fuente que el autor considera oficial. Apunta a que existen limitados recursos ambientales, principalmente tierras de cultivo, y que éstos limitan el crecimiento de una población.

Desde el siglo XIX, la Biomatemática aparece constituyendo un espacio común entre dos campos disciplinares, la Biología y la Matemática. En este lugar común, biólogos y matemáticos dialogan para la construcción y validación de modelos que permiten comprender fenómenos y/o procesos complejos. En este sentido, algunos autores afirman que los modelos matemáticos en las ciencias de la vida son necesarios para dar un carácter predictivo y analítico a este campo disciplinar siendo una componente importante del área de la Biología Teórica.

En este trabajo se reconoce la importancia de la matemática como herramienta que permite dar explicaciones a fenómenos en otras disciplinas, como la biología, y construir conocimiento nuevo en ambos campos disciplinares. Sin embargo, se considera que para que esto sea vinculado con la educación de un ciudadano, será importante el diálogo entre la Matemática Educativa y la Biomatemática. A continuación, se presentará la metodología que se utilizó para promover este diálogo entre estas dos disciplinas y el resultado será materializado en un rediseño de una situación de modelación, que se fundamenta en la modelación-graficación como una práctica socialmente compartida, que ha reconocido la Matemática Educativa, y el estudio de dinámica poblacional, específicamente la noción de capacidad de soporte, como una práctica propia de la comunidad de biomatemáticos.

Situación de resignificación de la Asintoticidad

Este documento reporta las diferentes etapas por las que debieron transitar investigadores de diferentes campos disciplinares, para generar un diálogo interdisciplinar, que buscó obtener como producto final, un conjunto de situaciones de modelación que aportaron al desarrollo de esta habilidad. De esta forma, la unidad de análisis es el diálogo interdisciplinar, lo cual llevó a la síntesis de tres etapas del rediseño de una situación de modelación: la funcionalidad, los momentos y las crisis. Para ello, se tomará una de las situaciones de modelación diseñada, la cual tiene por objetivo la resignificación de lo asintótico en un escenario biológico, particularmente en dinámica poblacional. Esta propuesta es un rediseño de la investigación desarrollada por Domínguez (2003) desde la disciplina de la Matemática Educativa. Este autor propone una situación que resignifica la noción de asíntota presente en el discurso matemático escolar; donde los significados recaen en una recta que nunca toca a la función de la cual es asíntota. Esto lo desarrolla a partir de tres momentos: la asíntota como una recta, la asíntota como una curva y la rapidez de la asíntota.

Las tres etapas del diálogo interdisciplinar son:

Primera etapa: *la funcionalidad del conocimiento matemático en el escenario*
Se estudiaron los significados gráficos de la asíntota en la dinámica de poblaciones. Una asíntota marca la tendencia, la estabilidad de la dinámica de poblaciones. En particular, la búsqueda documental en ambientes de ecología llevó a destacar un concepto dentro del contexto de la dinámica de poblaciones que evidencia la funcionalidad de lo asintótico, este es: *la capacidad de soporte*, la cual hace referencia a potencial abiótico donde la población se encuentra localizada, es decir, representa el número máximo de individuos sostenible en el *hábitat*.

Segunda etapa: *los momentos de la situación*
En esta etapa se relacionó *la capacidad de soporte* con los tres momentos construidos por Domínguez

(2003) en su propuesta. Se resignificó la noción de asintoticidad como la capacidad de soporte de un sistema biológico, lo cual dio paso a reestablecer momentos: *La Capacidad de soporte como una asíntota horizontal*, *la Capacidad de soporte como una curva asintótica a la función población* y *la rapidez del comportamiento de la capacidad de soporte*.

Tercera etapa: *las crisis que permiten la resignificación*
Se identificaron las crisis dentro de la situación que permitirían la resignificación de la capacidad de soporte como lo asintótico. Gráficas como las que se muestran en la Figura 1 se presentan dentro del primer momento de la situación de modelación. Donde se desarrolla un análisis sobre el comportamiento de una población de organismos vivos.
Los momentos de la situación de modelación son:

Momento 1: En el primer momento de la situación de modelación se transita de la argumentación gráfica a la algebraica de la noción de capacidad de soporte, donde se introduce la noción de límite y de asintoticidad.

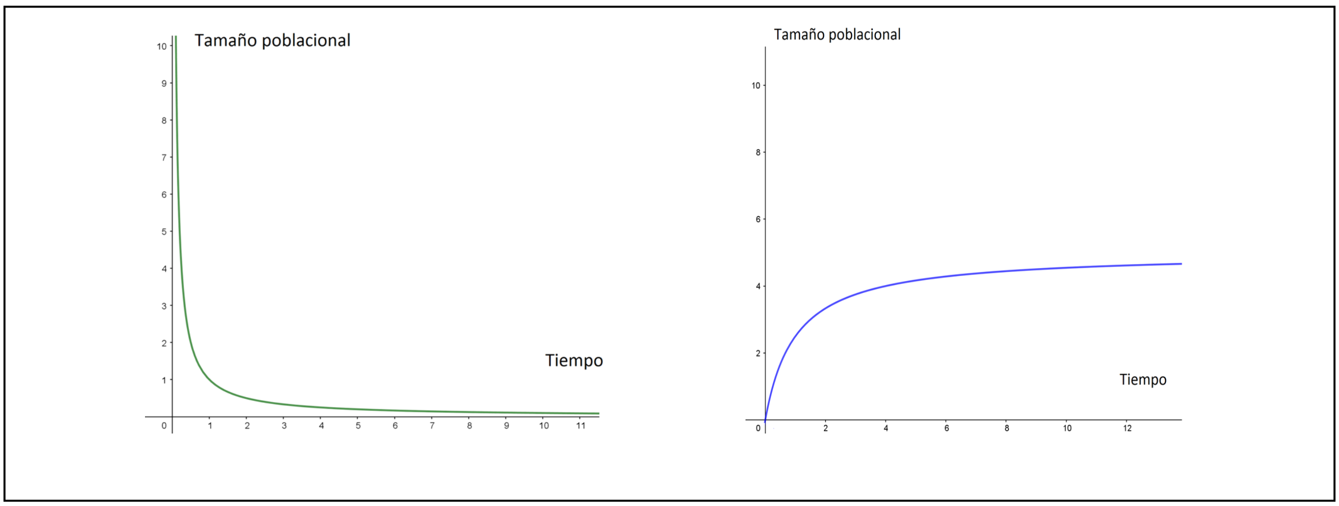

Figura 1. Primer Momento de la situación de modelación, pregunta 1.

Se desarrollan preguntas como las siguientes:

Construya una función que represente la dinámica de una población no constante que cumpla, $\lim_{t\to\infty} f(t) = K$*; donde f(t) es la función que modela la población y K la capacidad de soporte.*

Este primer momento se concluye con la siguiente pregunta: *¿Cuál es la relación entre la población y su capacidad de soporte?* Aquí se espera que los estudiantes argumenten a través de la noción de asíntota para establecer que la capacidad de soporte es la recta que marca la tendencia de la población.

Momento 2: En el segundo momento de la situación de modelación se espera resignificar la asíntota desde la concepción como la "recta que nunca toca a la función", a la asíntota como una "función que marca la tendencia de otro comportamiento". Se formulan preguntas como las siguientes:

Supongamos que la capacidad de soporte del planeta tierra es variable, en la cual estamos incluyendo nuevos factores ambientales, sociales, entre otros, que hacen variar la capacidad de soporte con relación al tiempo como se muestra en las siguientes figuras:

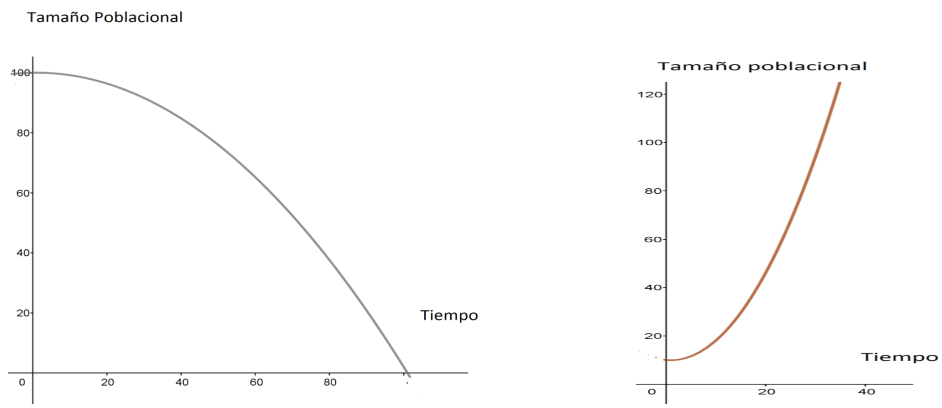

Figura 2. Momento 2 de la situación de modelación, pregunta 1.

3. Construya una función $f(t)$ de dinámica de población para cada inciso, que cumpla que cuando el tiempo tienda a infinito, $f(t)$ tienda a la función $k(t)$ (función capacidad de soporte) para los siguientes k(t): a) $k(t) = 3$; b) $k(t) = t^2 + 1$; c) $k(t) = sin\ (t)$.
5. Determina la capacidad de soporte para el comportamiento de las siguientes poblaciones.

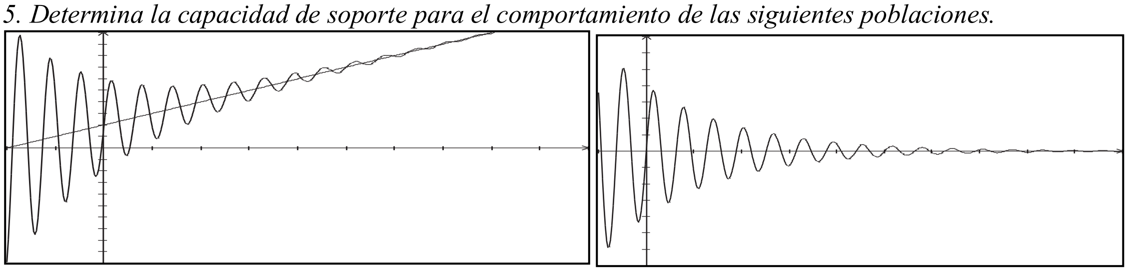

Figura 3. Momento 2 de la situación de modelación

Además, en este momento se busca determinar la relación entre la función y la asintoticidad. Esto es que: $\lim_{t \to +\infty} f(t) - k(t)$ es igual a 0.

Momento 3: El tercer momento de la situación de modelación busca la discusión respecto de la rapidez de la asintoticidad. La primera pregunta de este momento es la siguiente:

1. *En la gráfica la población es la curva de color negro. Indique el color de su capacidad de soporte. Justifique.*

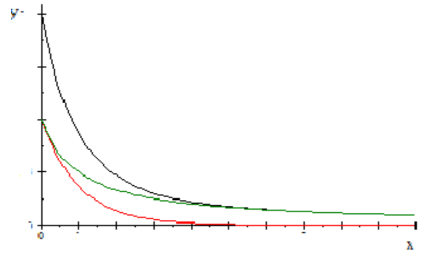

Figura 4. Momento 3 de la situación de modelación, pregunta 1.

Se espera concluir que la relación $\lim_{t\to+\infty} f(t) - k(t)$=0 no es suficiente para determinar cuál es la asíntota de una función. La segunda pregunta es:

2. Dada la población $\mathrm{f(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + \frac{1}{\mathrm{t}+1}$, decreciente en el tiempo, deseamos encontrar su capacidad de soporte. Determine usando el criterio

$$\lim_{\mathrm{t}\to+\infty} \mathrm{f(t)} - \mathrm{k(t)} \ (1)$$

¿Cuál de las siguientes funciones $\mathrm{k}_1(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$ o $\mathrm{k}_2(\mathrm{t}) = \frac{1}{\mathrm{t}+1}$ corresponde a la capacidad de soporte del medio en el cual habita?

Figura 5. Momento 3 de la situación de modelación

El nuevo criterio que aparece es que el límite del cociente entre la función y su asíntota debe ser igual a 1.

Estos tres momentos no solo permiten resignificar el concepto de asíntota a la noción de un comportamiento con tendencia: lo asintótico, sino que generan el análisis desde una noción propia del estudio de dinámica poblacional; la capacidad de soporte. Como se ha señalado la dinámica poblacional muestra al conocimiento matemático puesto en uso (como herramienta) en escenarios biológicos (Biomatemática) y por tanto la resignificación progresiva (Cantoral, 2013).

Reflexiones finales

El trabajo interdisciplinario llevado a cabo entre los dos campos disciplinares señalados, ha permitido la discusión de aspectos fundamentales para la construcción o rediseños de situaciones de modelación. La importancia de la modelación en la escuela es la relación que produce entre la realidad y la matemática. Justo esta consigna es donde los diferentes estamentos y grupos preocupados por el desarrollo del pensamiento matemático en la escuela han adoptado.

En este documento se presentó el rediseño de una propuesta que se había desarrollado bajo una visión socioepistemológica, acerca de la asintoticidad (Domínguez, 2003). El aporte del diálogo conjunto entre la Matemática Educativa y la Biomatemática fue explicitar la funcionalidad de lo asintótico en un escenario de dinámica poblacional. Se ha mostrado el diálogo como un proceso de tres etapas para el rediseño: identificación de la funcionalidad, diseño de los momentos y búsqueda de la crisis dentro de la situación.

Este equipo interdisciplinario también ha construido situaciones partiendo de ideas de la Biomatemática en dialogo con la Matemática Educativa. Esto ha permitido diseñar situaciones de modelación que no han sido presentadas en este escrito por asuntos de espacio. Sin duda este es un esfuerzo que permitirá consensuar, discutir y contribuir a la modelación en la educación matemática.

Referencias bibliográficas

Aravena, M. Caamaño, C y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11(1)*. 49-52.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational studies in mathematics, 51(1),* 149-171.

Dyson, F. J. (1972). Missed opportunities. *Bulletin of the American Mathematical Society, 78(5),* 635-652.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. Ciudad de México: Gedisa.

Cordero, F. (2015). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz. *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la Matemática Educativa* (pp.59-88). Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Dougherty, E. R., y Braga-Neto, U. (2006). Epistemology of computational biology: mathematical models and experimental prediction as the basis of their validity. *Journal of Biological Systems*, 14(01), 65-90.

Malthus, T. R. (1888). An essay on the principle of population: or, A view of its past and present effects on human happiness. *Reeves & Turner*.

Poincaré, H. (1914). Science et méthode (1908). Book II.

Smith, R. L., & Smith, T. M. (2007). *Ecología*. Pearson Education.

Solar, H., Azcárate, C., & Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 133-154.

Suárez (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Verhulst, P. F. (1845). Recherches Mathématiques sur La Loi D'Accroissement de la Population, *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 18,* Art. 1, 1-45.

Bissell, C., & Dillon, C. (Eds.). (2012). Ways of thinking, ways of seeing: mathematical and other modelling in engineering and technology (Vol. 1). Springer Science & Business Media.