

# CREACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS UTILIZANDO GEOMETRÍA DINÁMICA

Carlos Torres Ninahuanca; Maritza Luna Valenzuela  
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)  
ctorresn@pucp.pe, luna.m@pucp.edu.pe

## Resumen

El taller tuvo como objetivo principal el desarrollo de la competencia de análisis didáctico de profesores en servicio mediante la creación de problemas matemáticos y el uso de un programa de geometría dinámica. Para ese propósito, se aplicó una estrategia de creación de problemas por elaboración dada una situación que involucra una secuencia de actividades donde se incluye una situación, problema, reflexión didáctica, problema pre o pos (SPRP), cuya aplicación se ha mostrado en diversas investigaciones relacionadas a la enseñanza de la matemática. Mediante la socialización de experiencias, los participantes adoptaron una postura reflexiva valorando los aportes de la creación de problemas en su práctica docente.

**Palabras clave:** resolución de problemas, invención de problemas, enfoque ontosemiótico, geometría dinámica

## Abstract

The main objective of the problem posing workshop was to develop the in-service mathematics teacher's didactic analysis competence through problem posing tasks and the use of a dynamic geometry program. For this purpose, a problem posing strategy was put into practice, involving a sequence of tasks that includes a situation, problem, didactic reflection, pre or pos problem (SRPP). This strategy has been applied in several researches related to mathematics teaching. Therefore, by socializing the experience, the participants adopted a reflexive attitude, valuing the contributions of problem posing for their teaching practice.

**Key words:** problem solving, problem posing, Onto-semiotic Approach, dynamic geometry

## ■ Introducción

La resolución de problemas ha sido durante estas últimas décadas el enfoque predominante en la enseñanza de la matemática, de tal forma que se han elaborado diversas teorías y metodologías de enseñanza y aprendizaje con la intención de promover una enseñanza más acorde a las necesidades de cada época del transcurrir social. De acuerdo con Silver (2013) esta ha sido identificada en el ámbito académico, como un importante campo de estudio dentro la educación matemática y dicho interés se muestra en Halmos (1980), quien considera que se debe instruir a los estudiantes en la resolución de problemas, así como también en la creación de problemas. Precisamente, esta última reflexión se ha intensificado recientemente en diversas investigaciones (Singer, Ellerton y Cai, 2015, Felmer, Pehkonen

y Kilpatrick, 2016) que proponen rescatar la creación de problemas para promover el aprendizaje, el desarrollo del pensamiento matemático y el estímulo de la creatividad en profesores y estudiantes (Malaspina, 2013). De la misma forma, esta instrucción debe ser dirigida por un profesor de matemática formado en la creación y la resolución de problemas (Torres, 2016). En particular, con énfasis en la primera, ya que se ha tomado poca importancia al desarrollo de la creación de problemas, a pesar de que ésta ha sido considerada desde varias décadas como una innovación curricular y pedagógica en diversos países; por ejemplo, el caso de Singapur mostrado en Kaur, Yeap y Kapur (2009). Así mismo, tradicionalmente se ha enfatizado en la resolución y creación de problemas utilizando hoja y lápiz; sin embargo, debemos hacer uso de la tecnología para formular y resolver problemas. De ahí que, en el taller sobre creación de problemas que llevamos a cabo se propuso actividades relacionados al uso de GeoGebra para la formulación y resolución de problemas.

### ■ Propósitos y alcance

El taller se enfocó en las nociones fundamentales de construcción geométrica bajo una perspectiva de la enseñanza de la matemática. Este enfoque se sustentó en una estrategia de creación de problemas y en el análisis didáctico como herramienta para mejorar la práctica docente del profesor de matemática. Los temas matemáticos se desarrollaron siguiendo una estrategia basada en la creación de *problemas pre* o *problemas pos* en el marco de episodios de clase relacionados a la enseñanza de la matemática según la perspectiva de Malaspina (2017). También se puso énfasis en la etapa de reflexión didáctica que sugiere la estrategia para creación junto con nociones de las herramientas del enfoque ontosemiótico de la educación matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Lo anterior conlleva estimular la competencia de análisis didáctico mediante la creación de problemas.

### ■ Marco teórico

En el taller se utilizaron algunos planteamientos de la estrategia SPRP (Situación, Problema, Reflexión didáctica, Problema pre o pos) de creación de problemas para fortalecer la articulación entre competencias y conocimientos del profesor de matemáticas propuesta por Malaspina (2017) para la creación de problemas por elaboración dada una situación concreta (Malaspina, Mallar y Font, 2015). Para nuestros propósitos, adaptamos la estrategia SPRP siguiendo las siguientes etapas: (1) presentar a los profesores participantes una situación motivadora para crear problemas, (2) pedir a los participantes del taller, en parejas, crear y resolver un problema a partir de la situación dada (denominaremos a este problema como PG), (3) pedir que en parejas elaboren una configuración cognitiva de la solución del problema creado, (4) socializar y discutir los problemas creados y sus configuraciones asociadas, (5) solicitar a cada pareja de participantes que cree un nuevo problema relacionado con su PG. (se le denominará NPG). Puede ser – por decisión de la pareja – un Problema-pre, en el sentido de contribuir a comprender mejor y a resolver correctamente PG; o un Problema-pos, en el sentido de ser más retador que PG, que requiera mayor demanda cognitiva que PG. Cada pareja debe explicitar si creó un problema-pre o un problema-pos respecto a su PG. (6) Redactar una solución del problema creado (NPG). (7) Puesta en común del problema creado.

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), cuando una persona desarrolla prácticas matemática (de resolución o creación de problemas) y reflexiona entorno a estas, él o ella tiene que activar una red de

algunos o todos los objetos matemáticos presentes en la práctica. Entre estos objetos tenemos: situación problema, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos. Estos objetos se relacionarán formando configuraciones definidas como una red de objetos que intervienen y emergen de un sistema de prácticas (Figura 1); de las cuales en nuestro taller los participantes elaboraron configuraciones cognitivas (CC) que se relaciona con una perspectiva personal de los objetos matemáticos. Analizando estas configuraciones podemos obtener información acerca de la *anatomía de la solución de un problema*.

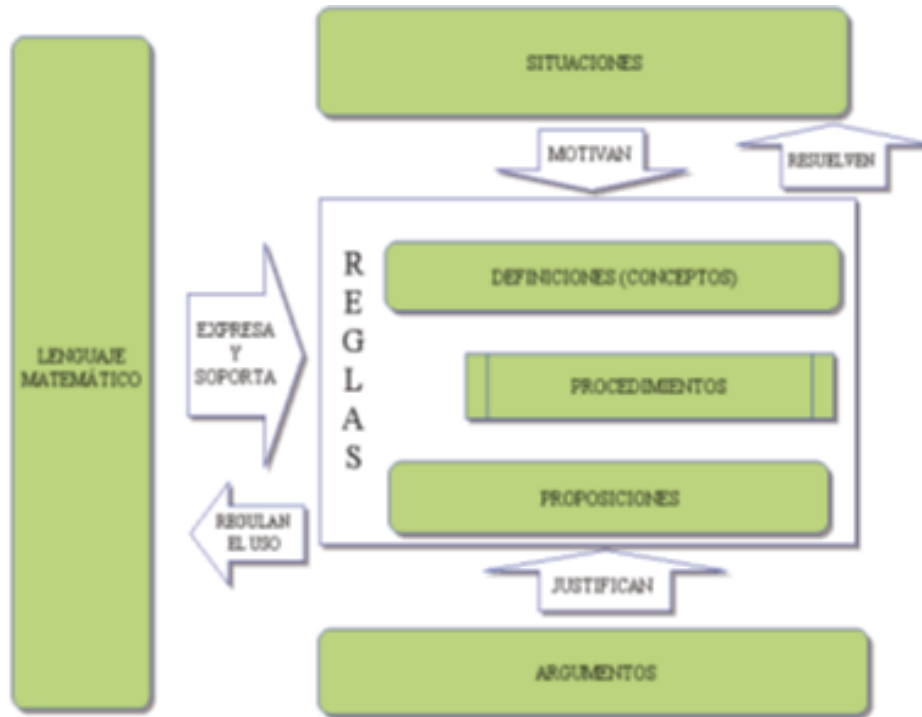


Figura 1. Configuración de objetos primarios para la Configuración Cognitiva. (Godino, Batanero y Font, 2007)

Usamos estos constructos del EOS para describir algunos objetos matemáticos que intervienen en la creación de problemas como producto de una actividad matemática. Asimismo, considerando la propuesta de Torres (2016) y Malaspina (2017) se consideran los cuatro elementos básicos de un problema matemático: información, requerimiento, contexto (intra-matemático o extra-matemático) y entorno matemático.

### ■ Metodología

El taller estuvo dirigido a profesores de matemática del nivel medio superior con conocimientos de GeoGebra a nivel intermedio. El desarrollo del taller tuvo una duración de dos sesiones (de 90 minutos cada una) y se siguió aspectos relacionados a la SRPP. En la primera sesión (Día 1) se presentó una situación motivadora para la creación de problemas (Figura 1) y entorno a esta se aplicó las etapas (1), (2) y (3) de la estrategia SRPP. Los trabajos en parejas se sustentan en las consideraciones para esta actividad formuladas por Malaspina, Mallart y Font (2015) para la creación de problemas por elaboración, así

tenemos: (a) Compartir en grupos (preferentemente a lo más de 4 integrantes) la solución del problema y las diversas respuestas a la pregunta “¿Qué pasaría sí...?”, efectuadas por cada integrante del grupo; (b) seleccionar en grupo las preguntas, analizar las posibles repuestas y decidir las modificaciones para configurar el problema; (c) escribir en grupo el enunciado del problema creado, con base en lo anterior y examinar su claridad; (d) resolver ordenadamente el problema creado; (e) atendiendo a la dificultad del problema creado y al nivel educativo en el que se pretenda emplear, pensar en la posibilidad o conveniencia de desagregarlo en problemas de dificultad gradual, (f) proponer el problema a otro grupo y pedirle solución y comentarios. En la segunda sesión (Día 2) se prosiguió con la aplicación de la estrategia SRPP en sus etapas (4), (5), (6) y (7). En la Figura 2, presentamos la situación motivadora que se utilizó en el taller para la creación de problemas utilizando GeoGebra.



**Figura 2.** Situación motivadora para la creación de problemas. Tomado de *Matemática para todos 2* (240), por A. Schmid e I. Weidig, 2002, Alemania: Klett. Derechos de autor (2002) por Instituto APOYO.

Los participantes utilizaron esta situación para crear un problema de contexto intra-matemático o extra-matemático en el marco de la geometría y siguiendo la estrategia SRPP.

### ■ Análisis de resultados

A continuación, mostramos los problemas creados por una pareja del taller.

Problema (PG):

*En un campamento se instalan dos patrullas levantando sus tiendas distantes entre ellas a 15 metros. En una reunión ambas patrullas deciden que la fogata debe ubicarse a una distancia equidistante de ambas tiendas y no mayor de 10 metros. ¿Entre qué valores debe estar la distancia a la que se debe colocar la fogata a cada tienda?*

En la Figura 3, se muestra la solución del problema utilizando herramientas de GeoGebra. La solución propuesta por la pareja se distingue por hacer uso de la mediatriz como lugar geométrico y considerando las condiciones del problema.

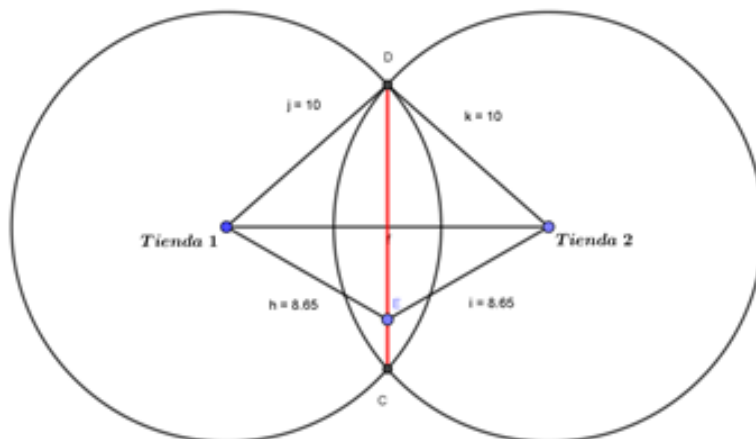


Figura 3. Esbozo de la solución utilizando GeoGebra propuesta por la pareja de participantes. (Elaboración propia)

De la Figura 3, se determina la solución del problema y la distancia de la fogata ( $x$ ) a cada tienda varía según la expresión:  $7.5 \leq x \leq 10$ . Esta solución se obtuvo de forma simple utilizando las herramientas del GeoGebra. Ahora bien, profundizando en la CC de la solución propuesta por la pareja, destacamos que los objetos matemáticos que identifican son: punto en el plano, segmento, circunferencia, distancia entre dos puntos en el plano, punto medio de un segmento. Asimismo, respecto a los elementos de un problema, destacan que la información se relaciona con la ubicación de las tiendas y la fogata, también las condiciones relacionadas a la separación entre tiendas y la fogata; para el requerimiento se tiene las posibles distancias que cumplan la condición del problema; el contexto es extra-matemático y el problema se ubica-en forma general- en el entorno de la noción de mediatriz. Por otro lado, respecto al lenguaje se observa que utilizaron representación de puntos (D, C, E), las ecuaciones que por defecto te arroja GeoGebra sobre las circunferencias y rectas; también, las representaciones gráficas para la mediatriz, circunferencia, segmento, recta. Algunos de los conceptos asociados al problema son: plano, punto, recta, segmento, distancia entre dos puntos en el plano. El procedimiento para la obtención de la solución al problema se inicia con el esbozo de los requerimientos del problema y los pasos para la construcción de la mediatriz como lugar geométrico. Respecto a los argumentos, la pareja de participantes no llegó a proponer ningún argumento.

#### Nuevo problema (NPG)

Con el objetivo de colocar una mesa circular equidistante de las tres tiendas y que quepa dentro del área indicada, y esté lejos de la madriguera de serpientes, las tiendas fueron movidas como se muestra en la Figura 4. Además, para no dañarse con los cactus y aislarse de las madrigueras, cercará con alambrcn [se debe cercar el área del cactus con alambrcn] y se usará repelente de serpientes, de costo S/ 25 la unidad, necesitando 2 por día. Sabiendo que el perímetro de la región donde están las serpientes es 14m, el perímetro de la región del cactus es 4m, los costos de materiales: S/ 8 cada metro de alambrcn, S/ 4 cada estaca, S/ 5 cada metro de plástico para cubrir la madriguera, 4 clavos para cada estaca, cada clavo cuesta S/ 0.2.

- (a) Determinar a qué distancia de cada tienda se debe colocar el centro de la mesa.
- (b) Calcular el número de días que podrán quedarse como máximo, si disponen de S/ 600.

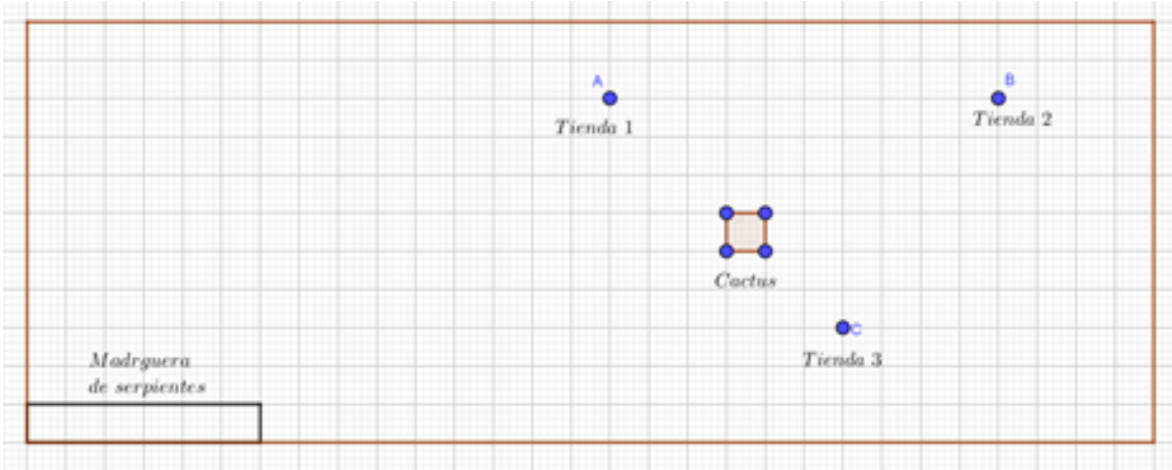


Figura 4. Distribución de las tiendas (Elaboración propia)

En la Figura 5, se muestra la solución para la parte (a) del problema utilizando herramientas de GeoGebra. La solución propuesta por la pareja se distingue por la construcción geométrica del circuncentro (ubicación de la mesa) y considerando las condiciones del problema.

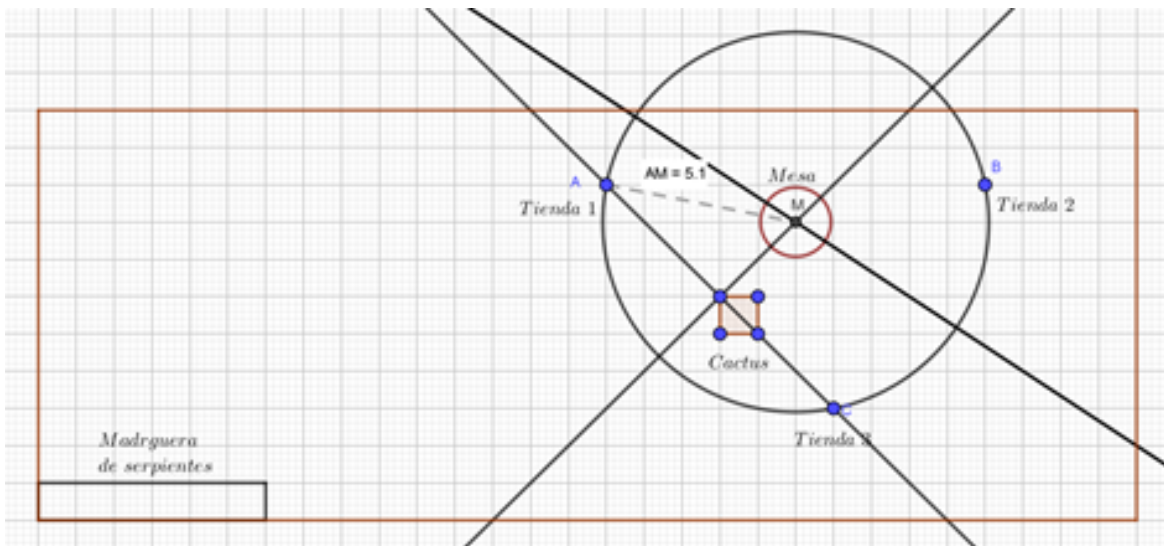


Figura 5. Ubicación de la mesa equidistante de las tres tiendas según condiciones del problema. (Elaboración propia)

Para determinar la solución a la parte (b), la pareja elaboró una propuesta en el contexto de funciones costo fijo y costo variable (ver Figura 6).

$$\begin{aligned}
 d &= \text{\# de días a permanecer en el lugar.} \\
 f_{\text{costo}} &= \text{costo fijo} + \text{costo variable} \\
 &= \underbrace{(14+4)m \times \frac{9.8}{m}}_{\text{alambre}} + \underbrace{(14+4) \text{ estacas} \times \frac{5/4}{\text{estaca}}}_{\text{estacas}} + \underbrace{14m \times \frac{5/5}{m}}_{\text{plástico}} \\
 &\quad + \underbrace{4 \text{ cables} \times (14+4) \text{ cables} \times \frac{5/0.2}{\text{cable}}}_{\text{cables}} + \underbrace{2 \text{ frascos} \times \frac{9/25}{\text{frasco}} \times d}_{\text{frascos}} \\
 f_{\text{costo}} &= 144 + 22 + 20 + 14.4 + 50d \\
 \text{Si } f_{\text{costo}} &= 600 \text{ disponible} \\
 600 &= 300.4 + 50d \\
 d &= \frac{299.6}{50} \approx d = 5.992 \\
 &\text{pueden quedarse max 5 días.}
 \end{aligned}$$

Figura 6. Propuesta de solución de la pareja a su problema creado. (Elaboración propia)

Dado la naturaleza del taller, luego de la creación de los problemas NPG, no se exigió la elaboración de las configuraciones cognitivas asociadas a las soluciones de estos problemas.

Como parte de la estrategia SRPP, los participantes socializaron sus problemas creados y discutieron sobre las posibles potencialidades de estos problemas para la enseñanza utilizando el GeoGebra (Figura 7).

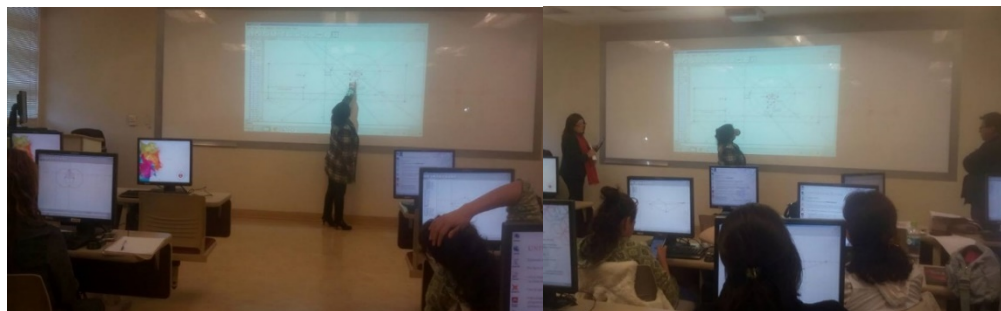


Figura 7. Socialización de problemas. (Elaboración propia)

### ■ Conclusiones

De la descripción de la CC elaborada por la pareja de participantes, se observa que competencia matemática está desarrollada, dado que utilizan conocimientos relacionados a la mediatriz y su aplicación en un contexto específico. Sin embargo, existe indicios para suponer que su competencia de análisis didáctico está en proceso de consolidarse, dado que no completaron sus CC. Esta afirmación se muestra en la mayoría de los participantes; en particular, en el reconocimiento de argumentos y proposiciones en las CC. El resultado anterior respalda lo encontrado en el trabajo de Torres (2016) y sugiere una preparación previa para el desarrollo de esta actividad.

A pesar de que las CC fueron parcialmente elaboradas, las reflexiones asociadas a este constructo fueron resaltantes, ya que los problemas (como el NPG creado por la pareja de participantes) fueron más elaborados, en el sentido que eran más ambiciosos y rescataron mejor el uso y aprovechamiento del GeoGebra como recurso didáctico, dado que se puede hacer simulaciones más elaboradas que al hacerlas utilizando lápiz y papel. A su vez, los participantes mostraron disposición a promover actividades de creación entre sus estudiantes dado que la experiencia vivenciada en el taller-como consecuencia de la elaboración de las CC y la socialización de los problemas- fue gratificante.

### ■ Implicaciones

Creemos importante profundizar y aplicar la estrategia SRPP puesto que se muestra como efectiva para la creación de problemas dada una situación o requerimiento específico. Tal como lo muestra Malaspina (2017) y Torres (2016), crear un problema puede ayudar a mejorar la formación docente y reflexionar sobre su práctica matemática.

### ■ Referencias bibliográficas

- Felmer, P., Pehkonen, E. y Kilpatrick, J. (Eds.) (2016). *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. New York, NY: Springer.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (2), 127-135. doi: <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519-524.
- Kaur, B., Yeap, B. H. y Kapur, M. (2009). *Mathematical Problem Solving: Yearbook*. World Scientific.
- Malaspina, U. (2013). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 41 – 49.
- Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, [enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html](http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html)
- Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*, (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: ERME.
- Schmid, A. & Weidig, I. (2002a). *Matemática para todos 2: secundaria* (Versión traducida y adaptada al español por el Instituto APOYO). Stuttgart, Alemania: Klett.
- Silver, E. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157-162. doi: <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3>
- Singer, F., Ellerton, N. y Cai, J. (Eds.). (2015) *Mathematical Problem posing: From research to effective practice*. New York: Springer.
- Torres, C. (2016). *Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico*. Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.