REQUISITOS CONCEPTUALES DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD NORMAL COMO MODELO DE LA REALIDAD

Omar Pablo Torres Vargas, Ana María Ojeda Salazar
Cinvestav. (México)
optorres@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen
Enfocamos, cualitativa, interpretativa y abductivamente, la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de requisitos conceptuales de la función de densidad normal. El concepto, unidad del discurso científico, se constituye de la interrelación entre *objeto*, *signo* y *concepto*; su conocimiento requiere el de cálculo, el funcional y el analógico. De la observación de nueve sesiones de enseñanza de tratamiento de datos agrupados y muestreo, y de las respuestas de 24 estudiantes a un cuestionario de *Probabilidad y Estadística*, ellos asignaron cardinalidades incorrectas a subconjuntos; los cuatro estudiantes de *Cálculo Diferencial*, participantes en una estrategia de enseñanza, revelaron concepciones erróneas del comportamiento de funciones y de la continuidad. Los resultados no favorecerían la constitución de modelos explicativos de distribuciones de variables aleatorias continuas.

Palabras clave: Función de densidad normal, modelo, estocásticos

Abstract
Through quality, interpretation and abduction, we focus on the technological high school students' understanding of conceptual requirements of the function of normal density. The concept, as a unit of the scientific discourse, is made up from the interrelationship of *object*, *sign* and *concept*; knowing a concept requires its computational, analogical and functional knowledge. From the observation of nine classroom sessions, of collected data treatment and sampling, and from the responses of twenty-four students to a *Probability and Statistics* questionnaire, they assigned incorrect cardinalities to subsets. The four students of *Differential Calculus*, participating in a teaching strategy, revealed misconceptions of the behavior of functions and continuity. Such results would not favor the creation of explanatory models of distributions of continuous random variables.

Key words: function of normal density, model, stochastic

Introducción

En una investigación más amplia nos interesamos en la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) que sustentan a la distribución normal. Se analizó la enseñanza de *Probabilidad y Estadística* y de *Cálculo Diferencial* en las aulas para conocer qué tanto su puesta en juego, tal como él la plantea, contribuye a que el estudiante advierta a la actividad científica fundamentada en un sistema formal matemático. Esto es de importancia dado que el paso a la identificación de la naturaleza de los fenómenos aleatorios comienza con un acercamiento

intuitivo (Fischbein, 1975; Heitele, 1975) para posibilitar el formal. Algunos de los rasgos para promover esa orientación se revelarían en la enseñanza porque, aunque el profesor de *Probabilidad y Estadística* dé por sentado que los estudiantes de sexto semestre hacen uso de conceptos tales como intervalo, funciones, continuidad o área bajo la curva, implicados en esta asignatura, ellos aún requieren experienciarlos con un referente concreto (Torres, 2013, por ejemplo) y no basta una experiencia anterior sólo con un referente particular para advertirlos en un tejido conceptual (Steinbring, 2005).
Al interpretar el rol de un concepto en diferentes contextos (Pollatsek, Lima y Well, 1981), su conocimiento rebasaría el nivel de cálculo. Aunque el tratamiento simbólico suponga la utilización del método lógico-deductivo, bien pudiera ser resultado de seguir meramente una regla. Aquí sólo examinamos la comprensión de estudiantes de requisitos conceptuales de la función de densidad normal, en algunos temas de las asignaturas *Probabilidad y Estadística* y *Cálculo Diferencial*.

Preguntas de investigación

¿Cuáles son las características de la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) que sustentan a la función de densidad normal, de estudiantes de las asignaturas *Cálculo Diferencial* y *Probabilidad y Estadística* del bachillerato tecnológico? ¿Qué sentido dan los estudiantes bachilleres a los temas de comportamiento de funciones, área bajo la curva, datos agrupados y muestreo, previos a la enseñanza de variables aleatorias y sus distribuciones?

Marco teórico

El discurso científico, cuyas unidades son los *conceptos*, apunta a lo disciplinar; ellas se erigen en modelo como cobertura ideológica de la ciencia y su instancia en la lógica matemática es sostén de la noción descriptiva de la actividad científica (Badiou, 1978). Es frecuente el uso de los términos “modelo” y “modelación” en los libros propuestos en los programas de estudio que rigen la enseñanza de estocásticos en el bachillerato tecnológico, no así su definición. Para estocásticos, Garfield y Ben-Zvi (2008) señalan que “modelo” se utiliza para probabilidad, mientras que la “modelación” de variables aleatorias se refiere al uso de “una simulación para generar datos para estimar probabilidades” (p. 158) mediante dispositivos aleatorios y herramientas de simulación.

Eje epistemológico

La guía continua de un curriculum en espiral para estocásticos supone incluir lo relevante de las relaciones entre realidad y contenidos matemáticos, para dotar al estudiante de modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, por lo que la enseñanza de estocásticos debería ser la mejor oportunidad para este propósito. La función de distribución normal es de gran interés por sus aplicaciones y, de las diez ideas fundamentales de estocásticos que propone Heitele (1975), ella implica a: *Medida de probabilidad* (F1), *espacio muestra* (F2), *adición de probabilidades* (F3), *regla del producto e independencia* (F4), *equiprobabilidad y simetría* (F5) y *variable estocástica* (F8). De la idea F8, interesa su distribución (Wild, 2006) y sus características de centro y dispersión (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

La idea de variación, planteada por Burril y Biehler (2013) como fundamental en estadística, consiste en identificar y medir “la variabilidad para predecir, explicar y controlar; se utiliza para describir el efecto global del cambio" (p. 9). La distribución es como "la lente por la que se observa la variación" (Wild, 2006, p. 11), en el mundo real y en los datos.

La función de densidad normal se vincula directamente con conceptos del cálculo como función, intervalos reales, la exponencial, continuidad, asintoticidad, máximos, mínimos, puntos de inflexión y área bajo la curva. El cálculo de la integral definida en un intervalo de la función de densidad determina la probabilidad no de un valor en particular (para el cual es cero pues la variable aleatoria es continua) sino de los valores que se acumulan en el intervalo acotado por los dos valores extremos; esa probabilidad corresponde al área bajo la curva definida para ese intervalo.

Eje cognitivo

Kahneman (2011) distingue dos tipos de procesos mentales como sistemas en el tratamiento de juicios y elecciones. El *Sistema 1* "opera de manera rápida y automática, con poco o ningún esfuerzo y sin sensación de control voluntario" (p. 65) y el *Sistema 2* "centra la atención en las actividades mentales esforzadas que lo demandan, incluidos los cálculos complejos, elegir y concentrarse" (p. 66).

Donaldson (1963) identifica tres tipos de errores. Los arbitrarios se caracterizan por "una falta de lealtad a lo dado. Se les ha llamado errores arbitrarios ya que el sujeto se comporta de manera arbitraria con respecto al problema cuando no está limitado por las condiciones que le impone" (p. 183); los errores ejecutivos "surgen de algún fallo en la acción de realizar las manipulaciones requeridas. Algunos defectos de concentración, de atención o de memoria inmediata suelen encontrarse en su origen" (p. 184); y los errores estructurales "se derivan de una falta de apreciación de las relaciones implicadas en el problema o para captar algún principio esencial de solución" (p. 183). De acuerdo con Saldanha y Liu (2014), las concepciones erróneas del razonamiento de los estudiantes "podrían ser causadas por dificultades lingüísticas (por ejemplo, falta de una definición clara de los términos "posible", "imposible" y "certeza"), por falta de habilidades lógicas y por la dificultad de extraer la estructura matemática desde la ejecución práctica" (p. 375).

Según Pollatsek *et al*. (1981), tres tipos de conocimiento están implicados en la comprensión de un concepto: de cálculo, funcional y analógico. El primero se refiere al papel de los elementos lógicamente equivalentes implicados en un concepto, identifica expresiones simbólicas y concierne al desarrollo de algoritmos y sus operaciones implicadas; el funcional se refiere a la comprensión de un concepto en un nivel significativo del mundo real; el analógico puede requerir de imágenes visuales para identificar las estructuras algorítmicas funcionales y trasladarlas a una variedad de contextos. Los autores señalaron que "el conocimiento de una regla de cálculo no sólo no implica alguna comprensión real del concepto básico subyacente, sino que de hecho puede inhibir la adquisición de una comprensión (relacional) más apropiada" (p. 202).

En la enseñanza de estocásticos es primordial "la modelación de datos para explorar las relaciones entre múltiples variables" (Garfield & Ben-Zvi, 2008, p. 145), distinguirlas como una aplicación de las matemáticas, y "examinar qué tan bien el modelo explica la variación en los datos" (Garfield & Ben-Zvi, 2008, p. 146).

Eje social

Para Steinbring (2005), el concepto matemático se constituye necesariamente de la interrelación entre *objeto*, *signo* y *concepto*. El autor utiliza este *triángulo epistemológico* en su análisis de la interacción en el aula.

En los libros de texto y en los programas de estudio que propone el bachillerato tecnológico (DEMS-IPN, 2008), la importancia atribuida a la distribución normal respecto a otras distribuciones continuas de probabilidad exige su revisión a profundidad. De igual manera, se requiere examinar los términos empleados en la propuesta institucional referidos a estocásticos, pues mediante el análisis de ellos se busca desambiguar el sentido que se les otorga en las situaciones de la enseñanza. Ya Vygotsky (1997) ha señalado que el lenguaje es un mediador entre los conceptos científicos y los que no lo son, "los primeros se aprenden en una situación de enseñanza formal, mientras que los segundos emergen a partir de la experiencia con el mundo cotidiano" (Wertsch, 1988, p. 117).

Método

La observación de la enseñanza es contextualizada, y la participante "se enfoca en la descripción de la realidad además de ayudar a los estudiantes, por etapas sucesivas, a que se sustraigan de ella poco a poco para construir progresivamente un modelo matemático" (IREM, 1997, p. 57). Por abducción (Deledalle, 1990) caracterizamos la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de la función de densidad normal, como variable aleatoria y también sólo como función. En ambos casos se consideró su comprensión de la variación. El procedimiento consistió en:

1) La aplicación de un cuestionario (C_{PE}) de cinco reactivos referidos a problemas de teoría de conjuntos, diagramas de Venn, técnicas de conteo, lógica proposicional, ponderación de ramas de un diagrama de árbol, procesos estocásticos finitos y probabilidad condicional. Se recopilaron datos en bitácora de ocho sesiones de enseñanza a 24 estudiantes (E_{pe}) de *Probabilidad y Estadística* de sexto semestre, en particular de su organización de los datos recabados en encuestas propuestas por ellos, para las que deberían distinguir entre los niveles de medición nominal, ordinal (para variables categóricas), de intervalo y de razón (para variables numéricas).

2) Se diseñó una estrategia de enseñanza adicional de comportamiento de funciones a cuatro estudiantes (E_1, E_2, E_3, E_4), del curso *Cálculo Diferencial* de cuarto semestre, en ocho sesiones en las que el investigador (I) incluyó la función gaussiana y una actividad de mediciones de estaturas. Se les aplicó un cuestionario (C_{CD}) con 24 reactivos de preguntas abiertas repartidas en tres partes, relativas al comportamiento de funciones: i) agrupar en cinco intervalos 25 mediciones, graficarlas, argumentar respecto a la función de distribución normal y sus parámetros; ii) describir, distinguir y comparar las gráficas de las funciones $f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = e^{x^2}$; iii) identificar la simetría de la función de densidad normal estándar. La referencia al dominio de una función dio paso a la de los intervalos expresados mediante desigualdades.

3) Las respuestas de E_3 y E_4 al cuestionario y sus desempeños en la actividad motivaron su entrevista, semiestructurada (Zazkis y Hazzan, 1999), para obtener más datos de su comprensión de ideas fundamentales de estocásticos.

La enseñanza y las dos entrevistas se videograbaron y transcribieron para su análisis.
Aplicamos el triángulo epistemológico en el análisis de la interacción en el aula (Steinbring; 2005). Mediante la célula de análisis (Ojeda, 2006) caracterizamos las enseñanzas PE y CD señaladas en 1) y 2), las respuestas a los cuestionarios y a las entrevistas.

Resultados

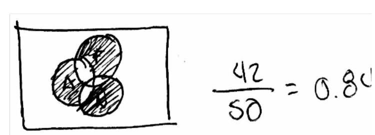
En general, al privilegiar en la enseñanza de *Probabilidad y Estadística* el conocimiento de cálculo (Pollatsek *et al.*, 1981) de cardinalidades de conjuntos, los estudiantes no los interpretaron como eventos de un espacio muestra. La enseñanza adicional de comportamiento de funciones a los estudiantes de *Cálculo Diferencial*, que privilegió la representación figural, resultó en que centraron su atención en la curva trazada de una función y no en la relación de las variables dependiente e independiente respectivas.

Probabilidad y Estadística

Como antecedente a la identificación de los eventos que corresponden a los valores de una variable aleatoria, las respuestas al cuestionario C_{PE} revelaron dificultades para identificar subconjuntos y errores al asignar cardinalidades, a partir de 19 respuestas al tercer reactivo. El diagrama de Venn que trazó el estudiante E_{pe} (véase la Figura 1) no corresponde al referente, a saber: *encontrar la probabilidad de que un estudiante de un grupo de 50 tomado al azar leyera al menos uno de tres idiomas, dado que: 30 leen francés (F), 20 leen alemán (A), 5 leen náhuatl (N), 2 leen F y N, 3 leen A y N, 2 leen A y F y uno lee los tres idiomas*; más bien correspondería a la proposición "lee uno y solamente un idioma"; por su asignación incorrecta de cardinalidades asignó una probabilidad incorrecta.

mediciones.**Situación de referencia**:
Que un estudiante de un grupo de 50, elegido al azar, lea cuando menos uno de tres idiomas.

Signo:**Signo**:



Variable estocástica.**Concepto**:
Evento del espacio muestra.

Figura 1. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) para "espacio muestra".

La Tabla 1 caracteriza su respuesta.

Tabla 1. Análisis (Ojeda, 2006) de la respuesta de E_{pe} al tercer reactivo del cuestionario C_{PE} e identificación de errores cometidos (Donaldson, 1963).

Contexto PE 6o semestre **Situación**	**Ideas fundamentales de estocásticos**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**	**Tipos de error**
Distribución de 50 estudiantes por su lectura de tres idiomas. Que uno elegido al azar lea al menos uno.	Medida de probabilidad, Espacio muestra, Variable aleatoria, Muestra.	Número (racional y decimal), operaciones aritméticas (división).	Lengua natural escrita, signos numéricos, diagrama de Venn.	Probabilidad, 50 estudiantes, al azar, cuando menos, un estudiante.	Arbitrario: no considera cardinalidades Ejecutivo: sin vinculación numérica del referente.

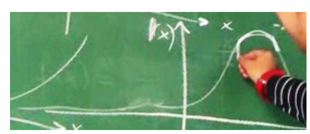
Aunque E_{pe} puso en juego el *Sistema 2* (Kahneman, 2011) al elegir las regiones sombreadas de su diagrama de Venn, su asignación de cardinalidades no corresponde ni al evento que él propuso ($n\{A \cup F \cup N\} - (n\{A \cap F\} + n\{A \cap N\} + n\{N \cap F\}) + 2n\{A \cap F \cap N\} = 44$ estudiantes) ni al evento en el tercer reactivo ($n\{A \cup F \cup N\} = 49$ estudiantes). Esto revela un "error arbitrario" (Donaldson, 1963, pp. 183-185) al ignorar parte de la pregunta, pues no consideró las cardinalidades de las intersecciones de los conjuntos de su diagrama; y un "error ejecutivo" (Donaldson, 1963, p. 184) originado por alguna falta de atención en su razonamiento al ofrecer una solución numérica desvinculada de la situación referente (véase la Tabla 1).

Cálculo Diferencial

En el curso regular de *Cálculo Diferencial*, la *continuidad* ya se había tratado. En la séptima sesión de la estrategia, I pidió a E_4 que señalara en la gráfica de la función gaussiana el intervalo en el que ésta es continua ($(-\infty, \infty)$) —que correspondería al espacio muestra de la variable:

I: ¡Ah!, entonces, ¿dónde es continua?, ¿en qué intervalo?
E_4: Desde menos infinito hasta antes de aquí [señala cerca de un punto de inflexión en la gráfica (Figura 2)].

Situación de referencia: Continuidad en un intervalo de la función de densidad normal. ⟷ **Signo**:



Concepto: Continuidad.

Figura 2. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005): Caracterización de continuidad.

E_4 enfocó el trazo, conjunto de parejas ordenadas de la curva, sin disociar las variables dependiente e independiente. Al centrar su atención en la curva, reveló su indistinción entre cambio de concavidad y continuidad en un intervalo en el que la función es creciente (véase la Figura 2). Este error, estructural (Donaldson, 1963), presagia interpretaciones erróneas de E_4 de la normal, por ejemplo, la falta de identificación de que los resultados de repetidas mediciones de una estatura son valores de una variable aleatoria continua, que la desviación estándar no se interprete como una medida de variación respecto a la media o que la probabilidad de una variable aleatoria normal para un intervalo dado no se asigne al área bajo la curva entre los valores de ese intervalo por no reconocer sus dos valores extremos. Es decir, no se advertiría a la normal como un modelo de fenómenos aleatorios del mundo real, por ejemplo, de la distribución de las estaturas de los individuos.

Tabla 2. Análisis (Ojeda, 2006) de la participación de E_4 en sesión de enseñanza e identificación de errores (Donaldson, 1963).

Contexto CD (7ª sesión de enseñanza). **Referente**	**Ideas fundamentales de estocásticos**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**	**Tipo de error**
Función de densidad normal.	Variable aleatoria.	Función de variable real, intervalo, continuidad, asintoticidad, punto de inflexión, concavidad, infinito, producto cartesiano.	Signos algebraicos, gráfica de la función de densidad normal.	Función, continua, intervalo.	Estructural: indistinción entre cambio de concavidad y continuidad en un intervalo.

El séptimo reactivo del cuestionario C_{CD} pidió indicar la estatura con mayor frecuencia de ocurrencia de un conjunto de datos unimodal. El desempeño de E_4 en ese reactivo reveló su indistinción entre un valor de la variable estocástica continua "estaturas de estudiantes de cuarto semestre" elegido por el criterio de mayor número de repeticiones en un conjunto de mediciones efectuadas ($x_i = 173.2$ cm.) con uno calculado mediante un algoritmo que describe un efecto global de las mediciones como un parámetro y que no necesariamente figura en una lista de las mediciones de estaturas efectuadas ($\overline{x} = 163.3$ cm.) (véase la Figura 3).

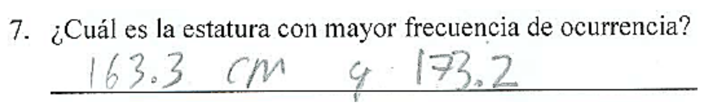

7. ¿Cuál es la estatura con mayor frecuencia de ocurrencia?
163.3 cm y 173.2

Figura 3. Respuesta de E_4 al séptimo reactivo del C_{CD}.

La respuesta de E_4 (véase la Figura 4) develó su interpretación errónea del fenómeno aleatorio.

Situación de referencia: Indicar la estatura con mayor frecuencia de ocurrencia de un grupo de 25

Concepto:

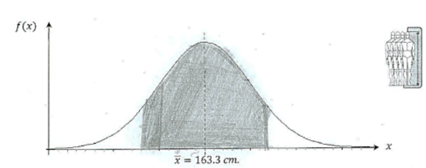


Figura 4. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) para variable estocástica.

Este error, estructural (Donaldson, 1963), reveló una indistinción entre frecuencia de ocurrencia y media aritmética (véase la Tabla 3).

Tabla 3. Análisis (Ojeda, 2006) de la respuesta de E_4 al séptimo reactivo de C_{CD} e identificación de errores (Donaldson, 1963).

Contexto Cuestionario CD. **Situación**	**Ideas fundamentales de estocásticos**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**	**Tipos de error**
Indicar la estatura con mayor frecuencia de ocurrencia de un grupo de 25 mediciones.	Variable estocástica, Espacio muestra.	Operaciones aritméticas, producto cartesiano, unidades de longitud (cm).	Lengua natural escrita, signos numéricos y algebraicos, gráfica de la función de distribución normal.	Estatura, frecuencia de ocurrencia, mediciones.	Estructural: Indistinción entre frecuencia de ocurrencia y media aritmética.

Conclusiones

Durante el periodo de dos años y medio de haber terminado su educación básica, los estudiantes de sexto semestre no habían tenido una enseñanza de estocásticos (DEMS-IPN, 2008). El comportamiento de funciones de variable real aún no está aprehendido por E_4, lo que no contribuye a que las funciones de distribución de probabilidad continuas constituyan para él un modelo explicativo (Heitele, 1975) de situaciones reales. Su dificultad para comunicar la noción de función continua manifiesta una adquisición inapropiada de un concepto que pone en juego la lógica matemática (Badiou, 1978) que impediría adquirir al menos un conocimiento funcional (Pollatsek *et al*., 1981) de la función de densidad normal. Si bien esta última es difícil para estudiantes con un primer acercamiento al Cálculo, en estos cursos se le podría reconsiderar para encaminar gradualmente su desarrollo como modelo explicativo en estocásticos, por lo común derivado de su presentación figural en la enseñanza, hacia uno analítico.

La identificación de las dificultades en el tratamiento de datos agrupados por los estudiantes de *Cálculo Diferencial*, específicamente del error estructural (Donaldson, 1963) manifestado por E_4 al tratar indistintamente la frecuencia de ocurrencia de un valor de un conjunto dado y la media aritmética, repercutiría en la asignatura *Probabilidad y Estadística* como una dificultad para advertir el papel de la media y la desviación estándar en la función de distribución normal, es decir, confundiría el significado de la media aritmética como parámetro de referencia para describir la variación de la función con un valor puntual del fenómeno general y anclaría el significado de la desviación estándar a un valor cuya importancia estaría restringida a localizar valores en una tabla que se usa para resolver ejercicios. La asociación de los parámetros de la estandarización a la gráfica en forma de campana (no a la función de distribución normal) tendría un significado de cálculo (Pollatsek *et al.*, 1981), no de representante ni de medida de dispersión de datos respecto a éste, ni de su distribución (de probabilidad).

Nuestros resultados vaticinan una inadvertencia de ideas de estocásticos en la actividad científica como fundamentos de un sistema formal matemático, por lo que afirmamos la necesidad de implementar estrategias de enseñanza que pongan de relieve la naturaleza aleatoria de los fenómenos propuestos a los estudiantes del bachillerato tecnológico para su estudio en su formación en estocásticos, a fin de motivar un desarrollo del *Sistema 2* (Kahneman, 2011) de manera prevaleciente ante situaciones bajo incertidumbre. La intuición (Fischbein, 1975) parece ser el enlace entre el privilegio de las operaciones controladas del *Sistema 2* (Kahneman, 2011) sobre las operaciones automáticas propias del *Sistema 1* (Kahneman, 2011).

Referencias bibliográficas

Badiou, A. (1978). *El concepto de modelo: bases para una epistemología materialista de las matemáticas*. 3a edición. México: Siglo Veintiuno Editores.

Burrill, G. & Biehler, R. (2013). Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Statistique et Enseignement*, 4(1), pp. 5-24.

Deledalle, G. (1990). *Leer a Peirce hoy*. España: Gedisa.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS-IPN). (2008). *Programas de Estudios*. México: IPN.

Donaldson, M. (1963). *A Study of Children's Thinking*. UK: Tavistock Publications.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. The Netherlands: Reidel Publishing Company.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Conecting Research and Teaching Practice*. USA: Springer.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6 (2), pp. 187-205.

IREM, (1997). *Enseigner les probabilités au Lycée*. France : Réseau des IREM, Direction des Lycées et Collèges, pp. 54-104.

Kahneman, D. (2011). *Pensar rápido, pensar despacio*. España: Debate.

Pollatsek, A., Lima, S., Well, D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics* 12, pp. 191-204.

Saldanha, L. & Liu, Y. (2014). Challenges of Developing Coherent Probabilistic Reasoning: Rethinking Randomness and Probability from a Stochastic Perspective. En Chernoff, E. & Sriraman, B. (Eds.). *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives*, pp. 367-396. Dordrecht, Netherlands: Springer.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. USA: Springer.

Torres, O. (2013). *Limitaciones en la adquisición de ideas fundamentales de estocásticos por estudiantes de ingeniería: El caso de un instituto tecnológico.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Vygotsky, L. (1997). *Pensamiento y lenguaje*. España: Visor.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. España: Paidós.

Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal* Vol. 5(2), pp. 10-26.

Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. España: Paidós.

Zazkis, R. and Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17(4), pp. 429-439.