

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA DE TRIGONOMETRÍA EN INGENIERÍA APLICADA

Diana del Carmen Torres Corrales, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
diana.torres@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

Presentamos un avance de una investigación doctoral enmarcada en la Socioepistemología, cuyo *objetivo* es estudiar a las Matemáticas de forma articulada con otras áreas del conocimiento, en particular, estudiar usos de la Trigonometría en la Ingeniería aplicada. Para ello elegimos la Ingeniería Mecatrónica como población y un escenario de trabajo, la Robótica. En este documento presentamos la revisión bibliográfica relativa a la Trigonometría en Ingeniería aplicada, que más que un contexto de aplicación de lo ya aprendido en las asignaturas de Ciencias Básicas (Matemáticas), lo reconocemos como un escenario para su resignificación, en tanto plantea usos distintos al de la tradición escolar; elegimos el área especializada del diseño de máquinas, donde buscamos reconocer, en la funcionalidad del conocimiento trigonométrico, usos y significados que le son propios.

Palabras clave: matemáticas para ingeniería, modelación, conocimiento trigonométrico

Abstract

We present a preview of a doctoral research under the Socio-epistemological Theory of Mathematics Education, which aims to study the Mathematics connected with other areas of knowledge. Particularly, we focus on the study of trigonometry uses in applied engineering. We chose Mechatronics Engineering as the research population and Robotics as the working scene. In this paper we present a bibliographic review on Trigonometry in applied Engineering, which more than a context for implementing what has been learned in the subjects of Basic Sciences (Mathematics), we recognize it as a setting for its re-signification, as it raises uses different from those of the school tradition; we chose the specialized machine design, where we seek to recognize, within the functionality of trigonometric knowledge, uses and particular meanings of its own area.

Key words: mathematics for engineering, modelling, trigonometric knowledge

■ Introducción

Este artículo presenta un avance de un proyecto doctoral que tiene como *objetivo* estudiar a las Matemáticas de forma articulada con otras áreas del conocimiento, en particular, estudiar *usos* de la Trigonometría en la Ingeniería aplicada. En (Torres-Corrales y Montiel, 2017) se reportó que en las asignaturas de Ingeniería aplicada (del área de especialidad), cuando se requiere de la aplicación de todo de las asignaturas de Ciencias Básicas, generalmente, el estudiante no identifica el conocimiento matemático a aplicar. Esto, desde la perspectiva de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática

Educativa (TSME), se explica como un efecto del *discurso Matemático Escolar* (dME), pues privilegia, en la enseñanza de las Ciencias Básicas y las Ciencias de la Ingeniería, limitados significados, procedimientos y argumentos que provocan que el estudiante no articule las estructuras formales de la matemática con las situaciones de la Ingeniería, ni tampoco reconozca como matemático el conocimiento que pone en juego.

Para el caso de la Trigonometría, desde (Montiel, 2011) se han reportado, documentado y ampliado los fenómenos didácticos de *aritmización trigonométrica, extensión geométrica-analítica e indiferencia a la fundamentación analítica*, provocados por el dME y que explican las dificultades y las concepciones reportados en la investigación didáctica, tales como: indiferencia entre la razón y la función, técnica de cálculo (división de longitudes), curvas onduladas, confusión en el uso de grado o de radián, entre otros. Estos fenómenos se repiten en el contexto universitario de la Ingeniería, en las asignaturas de Ciencias Básicas; sin embargo, en las asignaturas de Ingeniería Aplicada, se amplían sus contextos de uso y ello, desde nuestra perspectiva teórica, abre la posibilidad a su resignificación.

Con nuestra investigación, pretendemos estudiar los usos para explicitar significados, de las herramientas trigonométricas, que han quedado invisibilizados por los enfoques tradicionales centrados en el dominio de los objetos (razón, función y serie). Para ello, desde Torres-Corrales y Montiel (2017), delimitamos la investigación a una población, la Ingeniería Mecatrónica, y al realizar una revisión de sus planes y programas de asignaturas elegimos uno de sus escenarios de trabajo: la Robótica. Al estudiar los usos de la Trigonometría en la Robótica, tendremos un contexto situacional donde el conocimiento trigonométrico será empleado o adoptado para resolver diferentes problemas, de donde podremos reconocer sus significados, más allá de aquellos impuestos por el dME en las asignaturas de Matemáticas.

Con el propósito de delimitar nuestro objeto de estudio, realizamos una revisión bibliográfica orientada hacia dos temas centrales: la modelación y la Trigonometría. Elegimos a la *modelación* porque es un quehacer natural para resolver problemas de la Ingeniería, y pretendemos estudiarla desde algún enfoque teórico de la Matemática Educativa acorde al nivel educativo; esta revisión fue reportada en (Torres-Corrales y Montiel, 2017).

En este avance del proyecto doctoral presentamos una síntesis de la revisión relativa a la Trigonometría, tanto en investigaciones educativas como en desarrollos en Ingeniería Aplicada. Las primeras, nos permitirán situar nuestra investigación en el campo disciplinar de la Matemática Educativa; con las segundas, contextualizar el uso de la herramienta trigonométrica a estudiar.

■ Antecedentes

Nuestra concepción para estudiar los usos de la Trigonometría en la Robótica cambia la perspectiva de ver a la Ingeniería aplicada como un contexto de aplicación, de lo ya aprendido en las asignaturas de Ciencias Básicas (Matemáticas), a reconocerla como un escenario para su resignificación, en tanto plantea usos distintos al de la tradición escolar. En este sentido, proponemos, es posible trabajarlo desde aquello que le es propio, lo que en Socioepistemología se denomina su naturaleza social. Para el caso que nos compete, una caracterización de la *naturaleza social de la Trigonometría* fue reportada por Montiel (2011).

En particular, en su problematización de la razón trigonométrica, la autora reconoce *la relación no proporcional* entre un ángulo central y la cuerda que subtende en el círculo, así como la obtención de la medida de uno a partir del otro, como el problema detonador de la Trigonometría. El trabajo, propiamente geométrico, que deviene de dicho problema es el contexto de significación de esta relación y lo que eventualmente se asume como cantidad trigonométrica. En ese sentido, la naturaleza social de la razón trigonométrica trata del uso de una herramienta proporcional para el estudio y cuantificación de la relación no proporcional *ángulo central – cuerda subtendida* o, dado el contexto escolar, la relación *medio ángulo – semicuerda*.

En la didáctica de la Trigonometría encontramos investigaciones que han centrado su atención en conocer cuál método de enseñanza (triángulo y círculo) es más favorable para su aprendizaje. Algunas investigaciones recomiendan utilizar el triángulo rectángulo para las razones trigonométricas, y el círculo para las funciones trigonométricas. A manera de ejemplo, mostramos una investigación que ha dejado de separar los métodos de enseñanza para articular de forma coherente las nociones matemáticas involucradas (ángulo y radio): Moore (2014) reconoce las dificultades y la escasez en la comprensión del concepto escolar de ángulo en estudiantes universitarios de una asignatura de Matemáticas (Cálculo diferencial), y a partir de ahí elabora un experimento de enseñanza que permitió un cambio significativo en el cómo abordar las nociones trigonométricas: el manejo del ángulo se hace con la razón entre el radio y la circunferencia.

■ La razón trigonométrica en la Ingeniería aplicada

De las áreas especializadas de la Ingeniería, nos enfocamos al diseño de máquinas, que responden a necesidades específicas de la sociedad. Y para explorar el funcionamiento del conocimiento matemático en un primer momento, buscamos estudios relacionados con la razón trigonométrica.

Una de las consideraciones para estudiar al diseño como área especializada de la Ingeniería, fue la importancia que resalta Layton (1976): desde el punto de vista de la *Ciencia Moderna*, el diseño no es nada, pero desde la *Ingeniería*, el diseño lo es todo; representa la adaptación intencional de los medios para alcanzar un fin preconcebido, la esencia misma de la Ingeniería. Además, hemos tenido la oportunidad de consultar documentos de organismos acreditadores de Ingeniería en México que declaran de manera explícita al *diseño como un quehacer del ingeniero en sus distintas ramas* (por ejemplo, Civil, Electrónica, Industrial y Mecatrónica).

El *diseño* de ingeniería se ha definido como “el proceso de aplicar las diversas técnicas y principios científicos con el propósito de definir un dispositivo, un proceso o un sistema con suficientes detalles que permitan su realización” (Norton, 2009, p. 7). La palabra *dispositivo*, proviene del latín *dispuesto*, que en sí es un *aparato o mecanismo* que desarrolla determinadas acciones. Un *mecanismo* es “un dispositivo que transforma el movimiento en un patrón deseable, y por lo general desarrolla fuerzas muy bajas y transmite poca potencia; por ejemplo, un sacapuntas, un reloj análogo, una silla plegable y un paraguas” (Norton, 2009, p. 4). Cuando se unen varios mecanismos para producir y transmitir fuerzas significativas se configura una *máquina*, la cual es “...la combinación de cuerpos resistentes acomodados para hacer que las fuerzas mecánicas de la naturaleza realicen trabajo acompañadas por movimientos determinados” (Norton, 2009, p. 32). Un *cuerpo resistente*, es también llamado *cuerpo rígido*, es decir, un cuerpo capaz de soportar su carga inherente de trabajo sin sufrir deformación irreversible.

■ Máquinas

Meraz y Majewski (2007) realizaron una investigación sobre el diseño de balanceo automático en un plano para un rotor experimental; un rotor es el componente que gira en una máquina eléctrica para transmitir potencia mecánica. La necesidad del balanceo automático, comentan los autores, se debe a dar solución al trabajo ineficiente del rotor cuando está desbalanceado, porque produce vibración y cargas dinámicas adicionales en la máquina rotatoria. Por otro lado, lo que comúnmente se hace para solucionar este problema, es reiniciar la máquina, lo que provoca que dicha solución de balanceo sea costosa e impráctica, pues recordemos que la pérdida de tiempo se resume en pérdida de dinero.

Para dar una solución de balanceo pertinente, los autores realizan un análisis de un método alternativo, que consiste en un sistema a base de esferas dispuestas en un disco de pared delgada y de masa despreciable. El trabajo que hacen las esferas, consiste en posicionarse libremente dentro del disco en la dirección opuesta a la fuerza inercial (la que actúa sobre la masa cuando un cuerpo está sometido a una aceleración) de desbalance, esta fuerza es provocada por la excentricidad del centro de gravedad con respecto al eje geométrico (o de simetría), es decir, la excentricidad es la no coincidencia del eje de rotación con el eje geométrico, y resulta importante anularla porque provoca desgaste desigual de las superficies que tienen contacto.

Para realizar el análisis del comportamiento del rotor y de las esferas, junto con el sistema completo de la máquina, se realizó la simulación por medio de software matemático, este permitió resolver las ecuaciones diferenciales no lineales que modelan matemáticamente este problema; el trabajo del rotor se representa por ecuaciones de energía cinética (producida por el movimiento), que producen traslación (desplazamiento) y rotación (ángulo). Los autores muestran un extenso tratamiento matemático para obtener las ecuaciones diferenciales de las esferas y del rotor. Finalmente, mencionan que se puede hacer un arreglo generalizado de todo el sistema:

Desbalance del rotor:

$$Q_x = M\omega^2 \cos \omega t \dots [1]; Q_y = M\omega^2 \sin \omega t \dots [2]$$

donde Q es el desbalance, M la masa, ω es la velocidad angular, t es el tiempo.

Fuerzas que provocan las esferas:

$$P_{ix} = m_i R_i (\omega + \dot{\alpha}_i)^2 \cos (\omega t + \alpha_i) \dots [3]; P_{iy} = m_i R_i (\omega + \dot{\alpha}_i)^2 \sin (\omega t + \alpha_i) \dots [4]$$

donde P_i es la fuerza, m_i la masa, R es el radio del disco, ω es la velocidad angular, $\dot{\alpha}_i$ es la velocidad de las esferas, α_i posición final de las esferas y t es el tiempo.

Recordemos que para este tratamiento matemático se utilizó un software, que en síntesis da como resultado, que la oscilación del rotor es mínima y propia de toda condición de rotación, esta oscilación es aproximadamente 0.11° . Esto lo comprobaron los autores con la posición final de las esferas, que es de 115° y 230° , aproximadamente. Posteriormente, los autores analizaron el modelo experimentalmente con una lámpara estroboscópica (permite visualizar un objeto que está girando como si estuviera inmóvil o girando muy lentamente) para tomar fotografías de las esferas que estaban en el disco. Con esto, supusieron que cuando las esferas se colocan a casi 180° entre sí, se tiene un balanceo automático, porque se compensan a sí mismas, ya que el desbalance es casi nulo. Sin embargo, al observar con detenimiento

las esferas, percibieron que el ángulo formado es menor a 180° y esto se debe a que siempre se obtiene un desequilibrio remanente, lo que causa que una de las esferas no se coloque diametralmente opuesta a la otra. Para eliminar este remanente, colocaron una masa menor conocida, un tornillo (ver figura 1).

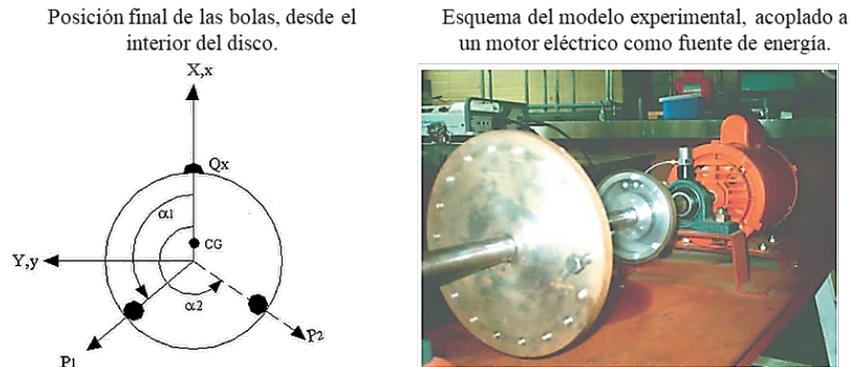


Figura 1. Diagrama cinemático y experimental del rotor con esferas. Adaptado de (Meraz y Majewsk, 2007, p. 161)

Los autores indican que lo innovador de este modelo, es que se han incorporado masas balanceadoras en discos (cuya masa del disco se toma despreciable), colocadas en diferentes posiciones a lo largo del eje, y que en todo momento están girando con el rotor. Dadas las condiciones de frecuencia, masa y rigidez, se provocará la eliminación y/o reducción significativa del valor de desbalance. Finalmente, mencionan que pese a la amplitud de vibración de 1.4 milésimas de pulgada, que todavía es importante en este modelo prototipo, en trabajos posteriores buscarán la manera de que la vibración residual sea la adecuada bajo estándares de vibración mecánica, para aplicar este modelo en equipos más completos, por ejemplo, lavadoras de ropa, donde la masa giratoria es variable.

■ Robots

Un robot es una máquina, y se define de manera formal en la Organización Internacional para la Estandarización (ISO), como un manipulador multifuncional reprogramable, capaz de mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, a través de movimientos variables programados, para el desempeño de tareas diversas. La diferencia que tiene respecto a otras máquinas es su capacidad de reprogramación y multifuncionalidad para más trabajos. Gutiérrez, Reséndiz, Santibáñez y Bobadilla (2014) realizaron un estudio sobre el diseño de un robot industrial de 5 grados de libertad (movimientos posibles). Los movimientos que efectúa el robot, los validaron con programas computacionales que simulan su trabajo a través de las posibles formas geométricas que le permitan alcanzar una ubicación (desplazamiento) y orientación (ángulo) deseada (ver figura 2).

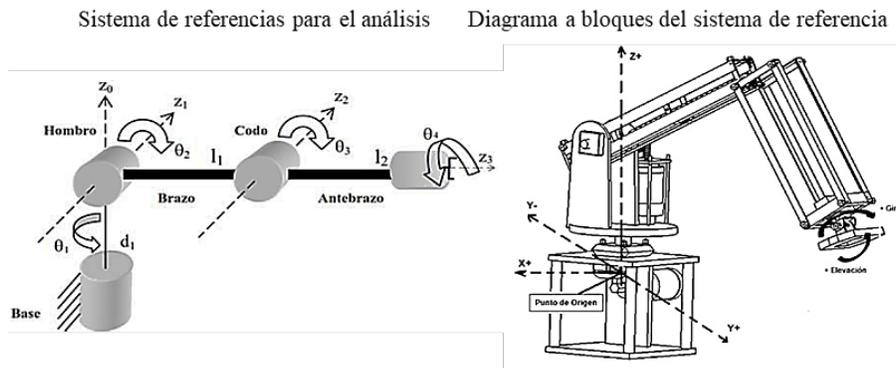


Figura 2. Cinemática directa del robot. Adaptado de (Gutiérrez et al, 2014, p. 79)

Para el cálculo de la cinemática directa, los autores utilizaron un algoritmo estandarizado llamado Denavit-Hartenberg (D-H), que incluye coordenadas y transformaciones homogéneas para simplificar las transformaciones entre el marco de referencia (base del robot) y las articulaciones (uniones que permiten al robot moverse). Por cada grado de libertad se calculó su matriz (por simplificación $c = \text{coseno}$ y $s = \text{seno}$), por ejemplo, para la primera articulación:

Transformación homogénea correspondiente de la base hasta la primera articulación:

$${}^0_1A = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots [5]$$

Una vez efectuados los cálculos de las articulaciones: 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, y 4 a 5, se procede a multiplicar todas las matrices en un solo producto:

$$T = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 \dots [6]; T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots [7]$$

■ A modo de cierre de la revisión

En áreas especializadas de la Ingeniería, los objetos matemáticos no se trabajan tal y como se enseñan en las asignaturas de Matemáticas (por ejemplo, razón y función trigonométrica), sino que se han integrado a estructuras matemáticas diversas. Con nuestra revisión identificamos a los *vectores*, *las matrices* y *los métodos numéricos*, donde tales objetos matemáticos se vuelven funcionales para el ingeniero al hacer uso de estos en articulación con otros conocimientos de la Ingeniería, para resolver problemas de su quehacer profesional. Esta puede ser la causa de por qué algunos estudiantes de últimos semestres responden que no, cuando se les pregunta si utilizan Trigonometría en los problemas que abordan en su área de especialidad; es decir, la enseñanza y el uso de la Trigonometría se encuentra separadas.

Con estos dos ejemplos de diseño ingenieril y otros que estudiamos, pudimos identificar, en los modelos geométricos, por qué la necesidad del conocimiento trigonométrico y su traducción en nuevas estructuras matemáticas, que ayudan a comunicarse con la máquina haciendo uso de programas de cómputo especializados. Nosotros llamamos *modelos geométricos* a lo que la Ingeniería denomina diagramas cinemáticos (ver figuras 1 y 2), estos permiten hacer explícitos los elementos geométricos (ángulo, medidas y sus relaciones), para representar y analizar el trabajo que la máquina realiza. Estos modelos geométricos utilizan una simbología propia de la Ingeniería, y ésta se articula con simbología matemática, por ejemplo, el plano cartesiano y el espacio tridimensional, con ángulos y medidas del modelo.

■ Reflexiones

Lo subsecuente para nuestra investigación de acuerdo a nuestro fundamento teórico, la Socioepistemología, es *estudiar la Robótica desde una práctica de referencia, la Ingeniería Mecatrónica*. La *práctica de referencia* se refiere a “la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural)” (Cantoral, 2013, p. 155), y en ese sentido nos proveerá de un contexto situacional y de significación del quehacer del estudiante de Ingeniería Mecatrónica, y por lo tanto del conocimiento que pone en uso y construye; caracterizar la práctica de referencia nos permitirá refinar el planteamiento inicial de investigación. Posteriormente, consideramos configurar detalladamente el marco teórico y la metodología a utilizar, que en estos momentos es un método etnográfico.

■ Referencias bibliográficas

- Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. España: Gedisa.
- Gutierrez, C., Reséndiz, J., Santibáñez, J. y Bobadilla, G. (2014). A model and simulation of a five-degree-of-freedom robotic arm for mechatronic courses. *IEEE Latin America Transactions* 12(2), 78-86.
- Layton, E. (1976). American ideologies of science and engineering. *Technology and Culture* 17, 688–701.
- Meraz, M. y Majewski, T. (2007). Balance automático en un plano para rotor experimental. *Ingeniería Mecánica. Tecnología y Desarrollo* 2(5), 157-163.
- Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico. México: Diaz de Santos.
- Moore, K. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education* 45(1), 102-138.
- Norton, R. (2009). Diseño de Maquinaria: síntesis y análisis de máquinas y mecanismos. Cuarta Edición. México: McGraw-Hill.
- Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2017). Modelación y uso de conocimiento trigonométrico en Ingeniería. Un primer acercamiento a su estudio. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 75-83.