

# SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN LA EVALUACIÓN DE PROBLEMAS VERBALES EN ÁLGEBRA ELEMENTAL

*Systems of representation in the evaluation of verbal problems in  
elementary algebra*

LUIS RICO  
*Universidad de Granada*

## **Resumen**

Este trabajo presenta un resumen del problema de investigación abordado por Francisco Fernández en su tesis doctoral, titulada “Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales”; describe las cuestiones relevantes allí tratadas sobre sistemas de representación y sus resultados. Al cerrar su ciclo profesional, docente e investigador, estas notas evocan y reconocen la aportación precursora en esta temática de Francisco Fernández, poco conocida y difundida en el Área de Didáctica de la Matemática. Con esta oportunidad subrayo su contribución al grupo FQM-193, que ha enriquecido y del que ha sido miembro destacado hasta su jubilación, con su competencia y buen hacer, su calidad humana y profesionalidad.

**Palabras clave:** álgebra elemental, competencia matemática, resolución de problemas, sistemas de representación.

## **Abstract**

This work summarizes the research problem addressed by Francisco Fernández in his doctoral thesis, entitled “Evaluation of competences in elementary algebra through verbal problems”, describes some relevant issues dealt about representation systems and summarizes their results. At the end of his professional cycle, as a teacher and researcher, these notes evoke and recognize the pioneering contribution of Francisco Fernández, little known and widespread in the field of Didactics of Mathematics. On this occasion, I like to highlight his permanent, discreet, meas-

ured and relevant work, with which he has stood out and also by his human quality, competence and professionalism.

**Keywords:** elementary algebra, competences, representation systems, problem solving.

## INTRODUCCIÓN

Han transcurrido algo más de 30 años desde el 3 de Noviembre de 1997, fecha, en que Francisco Fernández García defendió en la Universidad de Granada su trabajo de Tesis doctoral, titulado Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.

El estudio se realizó en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en el Programa de Doctorado de Matemáticas, y recibió ayuda del grupo “Pensamiento Numérico” (FQM 0193), del II Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía. El estudio estuvo financiado por el Proyecto PS93-0195 “Evaluación de Conocimientos, Procesos y Actitudes en Matemáticas”, subvencionado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT). Esta investigación forma parte de una generación de tesis doctorales en Didáctica de la Matemática, realizadas en la Universidad de Granada durante la última década del siglo XX.

El trabajo se llevó a cabo con el apoyo y colaboración de los miembros del Seminario “Currículo e Innovación en Educación Matemáticas (CIEM)” (Rico, 1997; Rico y cols. 2013).

Su consecución fue posible gracia al aporte de los profesores y la contribución de los alumnos de los Centros de Secundaria Aynadamar y Hermenegildo Lanz, de la ciudad de Granada y de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada, quienes prestaron su tiempo y atención para responder a los cuestionarios y facilitar así la obtención de datos. Los directores de la tesis fueron los doctores Luis Rico y Antonio Fernández-Cano.

La tesis obtuvo la calificación de excelencia Apto Cum Laude, por unanimidad (Fernández, 1997). El trabajo tuvo continuación en la tesis de Espinosa (2004) y en la tesis de Martínez de Videla (2011), dirigidas pos-

teriormente por Francisco Fernández, trabajos que prosiguieron el campo de estudio iniciado con esta investigación.

## **TRABAJO DE TESIS**

### **Estructura**

La memoria final de esta investigación es un informe de 442 páginas, que consta de 10 capítulos y 13 Anexos. El encuadre general y la fundamentación, en el primer capítulo, se centran en cuatro focos: Evaluación en matemáticas, Álgebra escolar, Sistemas de representación y Resolución de problemas, junto con sus interrelaciones. Desde la introducción el investigador destaca el papel de los sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos: "...el conocimiento exhaustivo de los sistemas de representación y de sus relaciones mejora la comprensión de los conceptos algebraicos y de su significado, lo que redundará en una mayor capacidad para comprender y abordar otras tareas algebraicas escolares." (Fernández, 1997; p. 34).

El área problemática y el problema de investigación se describen en el segundo capítulo, donde el investigador sintetiza una revisión de investigaciones sobre evaluación a través de problemas verbales algebraicos, lleva a cabo una discusión sobre el sentido de los términos clave con que va a trabajar y concluye con un balance sobre la relevancia y racionalidad del trabajo. Descriptores del estudio son el tópico, su contenido, etapas de estudio, instrumentos y tareas propuestas.

El investigador diferencia entre las fases de planteamiento, ejecución y desempeño final y lleva a cabo un análisis teórico sobre las clases de sistemas de representación que se identifican en las respuestas de los estudiantes encuestados al resolver los problemas verbales algebraicos que se les propusieron.

El investigador identifica y caracteriza cinco valores en la modalidad de representación para las respuestas: Ensayo y error, Parte-todo, Gráfico, Gráfico-simbólico y Simbólico. A partir de un análisis didáctico, establece como nueva variable de producto: "sistemas de representación". A partir de estos valores estudiará las producciones de los estudiantes encuestados. Justifica la opción de definir el sistema de representación utilizado como

variable de producto para caracterizar las producciones de los escolares; esta justificación es una de las claves del estudio, de la cual no se conocen antecedentes. Las respuestas de los estudiantes se analizan en términos de los sistemas de representación empleados por los participantes. La caracterización de las respuestas de los estudiantes según el sistema de representación escogido es una primera aportación del trabajo.

La revisión de la literatura de investigación, relativa a los términos clave seleccionados y a su interpretación, se lleva a cabo en ocho apartados del tercer capítulo.

Un cuarto capítulo desglosa los objetivos e hipótesis de la investigación atendiendo a los enfoques exploratorio y confirmatorio establecidos en el diseño del estudio. Para el primer enfoque se enuncian los objetivos en tres niveles distintos: principal, subsidiarios y específicos. Para el segundo enfoque se enuncian las hipótesis, su sentido y lateralidad.

El quinto capítulo detalla la primera etapa del diseño del estudio. Se describe el criterio de elección de la población y de la muestra, integradas por 160 escolares procedentes de dos niveles curriculares distintos, elegidos por disponibilidad. La muestra se compone de 80 estudiantes de un grupo del último curso de Educación Secundaria Obligatoria (16 años) y de otro grupo de 80 estudiantes universitarios que no han recibido instrucción en Álgebra en un período anterior mínimo de 5 años. Se identifican las variables del estudio y se describe su enfoque métrico general. Finalmente, se explica la construcción del instrumento principal en términos de su estandarización, del control de su validez y el control de su fiabilidad.

Una segunda etapa del diseño se desarrolla en el capítulo sexto, cuya secuenciación se articula en catorce fases, cuya descripción y temporalizada se detallan.

El estudio exploratorio previo, acompañado del correspondiente análisis de datos se muestra en el capítulo séptimo. La obtención de cuatro clúster de problemas y de resolutores y los hallazgos que su análisis proporciona destacan la relevancia de los sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos y avanzan interpretaciones cuya fiabilidad se considera necesario confirmar.

En el capítulo octavo se procede al estudio de diferencias entre ítems y entre sujetos mediante técnicas comparativo-transversales. Se determinan los estadísticos descriptivos e inferenciales con los que se procede a

la discusión de las hipótesis relativas a las tipologías de sujetos según el sistema de representación preferente escogido para la resolución de problemas algebraicos escolares.

El capítulo noveno documenta un estudio de casos con cuatro estudiantes, uno por cada uno de los clúster de resolutores detectados, con los cuales confirmar las conjeturas de caracterización previamente establecidas, que concluye con una discusión de resultados.

Finalmente, el décimo capítulo hace un balance general de resultados que incluye conclusiones específicas y hallazgos, junto con sus implicaciones y repercusiones, nuevas propuestas y líneas de desarrollo de la investigación.

## **PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

La complejidad del estudio y la ambición del investigador se muestran en el sistema escalonado de objetivos e hipótesis que definen el problema y sustentan el trabajo. En esta reflexión nos ceñimos a algunas de las cuestiones relativas a los sistemas de representación y su empleo en el estudio.

## **Finalidades generales**

Las finalidades generales de este estudio se pueden desglosar en cinco propósitos.

En primer lugar, es un estudio exploratorio. Con esa intención, el investigador diseña y construye un instrumento que recoge información para identificar la competencia algebraica elemental de los escolares, considerar la complejidad de las tareas propuestas y reorientar la comprensión sobre los conceptos implicados.

Tiene también un propósito descriptivo. El instrumento se centra en recoger información relativa a los sistemas de representación que emplean los sujetos para abordar la resolución de los problemas. Estudia así la incidencia de las variables de tarea en las producciones de los sujetos, que caracteriza según los tipos de sistemas de representación utilizados en la solución de los distintos problemas.

También contempla una finalidad explicativa, de forma que interpreta la competencia algebraica de un sujeto por su pertenencia a una de las tipologías establecidas.

Finalmente, propone un plan de actuación que, mediante la instrucción adecuada, oriente a los sujetos hacia niveles más complejos del conocimiento algebraico dentro de una evaluación continua y formativa. De este modo plantea una intervención en los aprendizajes.

Para alcanzar los propósitos mencionados el investigador propone las siguientes actuaciones:

1. Establecer variables mediante las que caracterizar tareas algebraicas adaptadas a los programas de la Educación Secundaria Obligatoria.
2. Elaborar una base de problemas verbales algebraicos, que contemplen diferentes opciones de resolución, según las variables establecidas.
3. Seleccionar tareas para evaluar las competencias de los estudiantes en Álgebra Escolar, con las cuales construir un instrumento de evaluación.
4. Tipificar el pensamiento algebraico que los estudiantes activan cuando resuelven los problemas verbales algebraicos propuestos.
5. Identificar los sistemas de representación usuales movilizados por los estudiantes para la resolución de problemas verbales algebraicos.
6. Caracterizar los grados de complejidad que implica el manejo de cada uno de los sistemas considerados.
7. Estudiar las relaciones que se presentan entre las competencias en Álgebra Escolar y los sistemas de representación elegidos.
8. Estudiar las relaciones entre las competencias y las variables que caracterizan los enunciados de los problemas verbales algebraicos.
9. Estudiar las relaciones entre los posibles estratos de la población estudiantil a la que va dirigido el estudio, en orden a determinar si hay diferencias significativas en las competencias en Álgebra Elemental.

Los sistemas de representación y el papel que desempeñan en las actuaciones enumeradas muestran la atención prestada en este trabajo a estos componentes del contenido matemático, movilizados por los estudiantes en la resolución de problemas de álgebra elemental. En el trabajo se reconoce y caracteriza el significado de las relaciones establecidas por dichos

escolares y los procedimientos seguidos durante el proceso de resolución, todo lo cual lleva al investigador a identificar grupos de resolutores por el tipo de representación empleado, los procesos seguidos y las conversiones entre sistemas manejadas.

### **Objetivo principal**

El objetivo general se enuncia así: “Aportar elementos de juicio e instrumentos fiables para evaluar las competencias que sobre Álgebra Elemental tienen los estudiantes españoles, a través de la resolución de problemas verbales”.

Para llevar a cabo ese objetivo fue necesario identificar previamente los criterios de evaluación, así como determinar instrumentos válidos y fiables para conocer las competencias que, sobre el tópico enunciado, un sujeto pone en juego cuando responde a las tareas propuestas en el instrumento.

Se propuso conocer cómo los estudiantes actúan y responden ante una serie de problemas verbales algebraicos elegidos convenientemente; también establecer si los resultados dependen del tipo de problemas, dentro de una variabilidad controlada. Conocer el sistema de representación que utilizan los estudiantes en la resolución de estos problemas, por su elicitación, es un indicador del tipo de conocimiento algebraico o pre-algebraico movilizado por el estudiante en la realización de la tarea.

### **ENFOQUE EXPLORATORIO DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **Objetivos a cubrir**

El investigador concretó su objetivo central en diversos niveles más específicos:

- Construir un instrumento para evaluar las competencias en Álgebra elemental mediante la resolución de problemas verbales.
- Precisar criterios mediante los que relacionar los resultados de la administración del instrumento sobre toda la muestra.

- Encontrar y caracterizar agrupaciones o tipos de estudiantes según el sistema de representación que utilicen en la resolución de problemas verbales algebraicos.

### **Objetivos subsidiarios**

Para lograr el propósito central mencionado, se hace necesario establecer y articular una serie de temas y tópicos subsidiarios que se relacionan con el objetivo principal. En esta investigación, para el logro del objetivo central, se procedió a:

- a) Seleccionar un conjunto de problemas verbales algebraicos que respondan a los contenidos de Álgebra Escolar en la Educación Obligatoria con una variabilidad controlada.
- b) Estudiar la validez y fiabilidad del instrumento de evaluación constituido por el conjunto seleccionado de problemas verbales.
- c) Analizar estadísticamente la incidencia de cada una de las variables que intervienen en la resolución de los problemas verbales, y relacionarlas entre sí.
- d) Determinar tipologías de problemas por los sistemas de representación utilizados para su resolución, caracterizando estas agrupaciones.
- e) Determinar tipologías de resolutores por el sistema de representación que han utilizado para resolver los problemas del instrumento de evaluación, caracterizando estas agrupaciones.

Los objetivos a), d) y e) destacan expresamente el interés del investigador por los sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos elementales.

### **Objetivos específicos necesarios**

Para la identificación y articulación de cada uno de los objetivos subsidiarios, que se derivan del objetivo principal, se hace necesario explicitar qué necesidades específicas de información se identifican, así como las correspondientes relaciones entre ellas. En este trabajo, y en relación con los objetivos d) y e) antes enumerados, destacamos:

- d.1) Determinar, mediante análisis clúster, si existen tipologías entre los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación, respecto a los sistemas de representación que se utilizan para su resolución.
- d.2) Establecer las características de estos agrupamientos y obtener conclusiones.
- e.1) Determinar, mediante análisis clúster, si existen tipologías de sujetos por los sistemas de representación que utilicen para abordar los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.
- e.2) Caracterizar distintas tipologías de resolutores que resulten del estudio de clúster de sujetos.”

Como expresan los objetivos específicos, los sistemas de representación desempeñan dos funciones diferentes en los procesos de resolución de problemas algebraicos: como variables de proceso y como variables de sujeto. Estas funciones de los sistemas de representación expresadas como intenciones del investigador, son propuestas innovadoras cuyo tratamiento detallado puede seguirse en el estudio.

### **ENFOQUE CONFIRMATORIO DE LA INVESTIGACIÓN**

La elección de dos conglomerados en la composición de la muestra, con características formativas y de desarrollo diferentes permiten enunciar las siguientes hipótesis, general y específicas, que también abordan la función de los sistemas de representación.

#### **Hipótesis a contrastar**

La resolución de problemas verbales algebraicos elementales por parte de sujetos de una población estudiantil, en distintos niveles de estudios, que sólo han recibido instrucción en Álgebra Elemental durante el período escolar (hasta 16 años), puede verse influida por el tiempo transcurrido desde han recibido dicha instrucción.

Se utiliza un diseño comparativo-transversal para contrastar las hipótesis que se refieren a la comparación entre grupos de sujetos.

Las hipótesis específicas que se contrastan son:

Hipótesis 1. Al planteamiento en la resolución de problemas verbales algebraicos, dependiendo del grupo al que pertenecen los estudiantes.

Hipótesis 2. A la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo al que pertenecen los estudiantes.

Hipótesis 3. Al desempeño final en la resolución de problemas verbales algebraicos.

La complejidad de algunas variantes de las tareas suelen ser obstáculo para el éxito en la aplicación de algunos sistemas de representación. La utilización de sistemas de representación económicos y potentes favorecen una resolución correcta de los problemas verbales algebraicos. Dependiendo de la tipología del resolutor, existen diferencias significativas. Por lo tanto se contrastan las siguientes hipótesis, relativas a la caracterización del resolutor según sistemas de representación empleados en:

Hipótesis 4. El planteamiento en la resolución de problemas verbales algebraicos.

Hipótesis 5. La ejecución en la resolución de problemas verbales algebraicos.

Hipótesis 6. El desempeño final en la resolución de problemas verbales algebraicos.

La determinación de posibles tipologías de resolutores a través de un análisis clúster, tomando como referencia el sistema de representación con el que abordan los problemas, implicará la descripción de las características comunes a los sujetos que componen cada una de las tipologías. La confirmación de que esas características son adecuadas llevó a formular unas hipótesis, que se verificaron mediante un estudio de casos.

El enunciado de las anteriores hipótesis muestra el relieve y profundidad con el que el investigador aborda los sistemas de representación, como característica del momento madurativo en que se encuentra el estudiante en relación con su competencia como resolutor de problemas algebraicos elementales.

## **RACIONALIDAD DE LAS HIPÓTESIS: SENTIDO Y LATERALIDAD**

### **Diferencias entre los grupos de edad/nivel académico**

En las tres primeras hipótesis se propone verificar si los estudiantes, con el paso del tiempo, han mantenido un cierto poso o fondo de compe-

tencias acerca de una actividad, como es la aplicación del razonamiento algebraico en la resolución de un problema verbal.

Es usual que cuando ha pasado un período de tiempo suficiente en que no se ha practicado una actividad, como en este caso con tareas de tipo algebraico, se puedan olvidar rutinas y procedimientos que se aprendieron en la época escolar.

Por un lado, tenemos respuestas de escolares que están recibiendo enseñanza específica en Álgebra y resolución de problemas algebraicos y, por otro, respuestas de estudiantes universitarios que, después de Secundaria no han vuelto a recibir enseñanza sobre matemáticas.

Esta circunstancia llevó al investigador a conjeturar que, en los grupos de estudiantes universitarios, tiene que haberse producido también un proceso de maduración de pensamiento y capacidad de razonamiento, que compensa el olvido debido al paso del tiempo. Esta maduración, junto con la memoria a largo plazo de los aprendizajes significativos de los conceptos algebraicos más elementales debe ponerse en juego para abordar y resolver las tareas algebraicas propuestas.

Las Hipótesis 1, 2 y 3 suponen que existen diferencias significativas entre los grupos de sujetos, tomados por el tiempo transcurrido desde que recibieron instrucción algebraica, en cada una de las fases que se consideran en un problema verbal algebraico.

La intuición inicial del investigador es que deben existir diferencias significativas entre los grupos de edad/ nivel académico, en el sentido de que la cercanía a la instrucción algebraica producirá mejores resultados en cualquiera de las fases de la resolución de los problemas algebraicos.

El investigador sostiene una hipótesis unilateral, en el sentido de que el grupo de sujetos que está finalizando la Enseñanza Secundaria Obligatoria, por estar recibiendo una instrucción permanente y sostenida sobre los contenidos de Álgebra Elemental y poniendo en práctica casi a diario el lenguaje algebraico aprendido para la resolución de problemas verbales algebraicos, debe tener mayor dominio sobre las tareas propuestas en nuestro estudio. Tales tareas, que pueden considerarse como continuación de la actividad de enseñanza del Álgebra en la E.S.O., como una actividad más dentro de contexto, no deben suponer mayor dificultad.

Sin embargo, los sujetos de los grupos de estudiantes universitarios para los que han transcurrido más de 3 años sin recibir instrucción alge-

braica explícita, que no han seguido estudiando matemáticas puesto que han elegido estudiar humanidades, pueden encontrar mayores dificultades en resolver las tareas algebraicas propuestas. En efecto, el Álgebra puede considerarse como un lenguaje matemático y, como tal lenguaje, si no se practica se llega a olvidar. Estas diferencias se pueden confirmar mediante contrastes de las tres primeras hipótesis enunciadas.

## **RESULTADOS**

Pasamos a glosar algunas de las conclusiones más relevantes del estudio en relación con los objetivos e hipótesis antes planteados.

### **Conclusiones relativas a los sistemas de representación**

1. Los sistemas de representación utilizados por los sujetos de la muestra para abordar los problemas verbales algebraicos se clasifican en cinco categorías diferenciadas: Ensayo-Error, Parte-Todo, Gráfico, Gráfico-Simbólico y Simbólico.

En el análisis de los protocolos que se encuentran en la Memoria de Tesis, se muestran ejemplos de todos y cada uno de los sistemas de representación señalados. No se encuentra ninguna otra categoría fuera de las citadas.

2. La utilización del sistema de representación Simbólico ofrece al estudiante perspectivas de acierto en la resolución de los problemas verbales algebraicos, superiores a los otros sistemas de representación. El sistema de representación Simbólico predomina sobre los demás para abordar la resolución de los problemas propuestos. Es el sistema de representación más económico y potente y responde al tipo de instrucción escolar recibida por el estudiante.
3. Las variables que caracterizan las tareas de resolución de problemas verbales algebraicos condicionan parcialmente el sistema de representación utilizado.

La resolución de la mayoría de los problemas verbales algebraicos se aborda mediante el sistema de representación Simbólico, que presenta mayor generalidad de aplicación.

No obstante, podemos destacar que determinadas variables de tarea facilitan o dificultan, según los estados que tomen, la utilización de uno u otro sistema de representación.

Así, por ejemplo, en aquellos problemas en donde uno de los datos es un número decimal que se relaciona como factor multiplicativo y que contienen en su texto un dibujo relativo al mismo, encontramos de forma significativa los sistemas de representación Gráficos, sobre todo el sistema Gráfico-Simbólico. Estos problemas no se abordan mediante el sistema de representación de Ensayo-Error. Cuando un problema contiene en su texto un dibujo, en donde es fácil relacionar visualmente los datos e incógnitas, siendo éstos próximos a su valor real, se destaca la utilización del sistema de representación de Ensayo-Error.

### **Conclusiones relativas a las tipologías de sujetos**

El investigador detecta y caracteriza cuatro tipos diferenciados de sujetos en la resolución de problemas verbales algebraicos, respecto a los sistemas de representación que utilizan para abordar los problemas.

Mediante un análisis clúster determina cuatro agrupaciones de sujetos, que responden a unos comportamientos comunes en cuanto a los sistemas de representación con que han abordado los problemas.

El investigador hace unas conjeturas sobre las características de estas tipologías de respuestas. A continuación realiza un estudio clínico de casos confirmatorio, dos por cada tipología, un estudiante de Secundaria y un estudiante de Universidad. En todos los casos se confirman las características con que se han definido las tipologías.

Dichas características se describen a continuación.

Una primera tipología de resolutores de problemas verbales algebraicos se caracteriza por la variedad en los sistemas de representación elegidos para abordar los problemas. Los sujetos de esta agrupación emplean los diversos sistemas de representación, si bien el sistema mayoritario es el Simbólico. El sistema elegido depende tanto del problema como del sujeto. No existe un patrón definido, estos sujetos conocen los diversos

sistemas de representación y eligen el que consideran más adecuado al problema. Este clúster incluye estudiantes de Secundaria y de Universidad, distribuidos en porcentajes del 40% - 60% respectivamente

Una segunda tipología de resolutores de problemas algebraicos se caracteriza por la utilización preferente de sistemas de representación numéricos, Ensayo-Error y Parte-Todo, para abordar los problemas. Si bien pueden conocer la resolución de ecuaciones de modo algebraico, no tienen facilidad para el uso del lenguaje algebraico simbólico. Entonces abordan los problemas de forma numérica. Aunque utilizan más frecuentemente el sistema de representación Parte-Todo, también emplean los sistemas de Ensayo-Error. Se puede considerar que estos sujetos están en una fase pre-algebraica. Este clúster es menos numeroso (28 sujetos sobre 160), Los sujetos se distribuyen equitativamente entre Secundaria y Universidad, 50% - 50%.

Un tercer tipo de resolutores se caracteriza por la utilización preferente del sistema Simbólico (a veces con apoyo gráfico) para abordar los problemas. Es el clúster más numeroso, 62 sujetos sobre un total de 160, que han dejado sin abordar menos problemas. En consonancia con la característica que lo define, es la agrupación que más utiliza el sistema de representación Gráfico-Simbólico. En este grupo no hay ningún sujeto que emplee el sistema Ensayo-Error. En las entrevistas a los estudiantes en el estudio de casos, las respuestas muestran su rechazo a ese sistema de representación, por el tiempo que consume, en contraposición con la economía de tiempo y esfuerzo del sistema Simbólico. La distribución de porcentajes de sujetos entre estudiantes de Secundaria y Universidad en este grupo está equilibrada (47% - 53%).

Finalmente, un cuarto tipo de resolutores se caracteriza por la nula utilización de los sistemas gráficos (Gráfico y Gráfico-Simbólico) para abordar los problemas. Es un clúster poco numeroso (28 sujetos sobre 160), formado en su mayoría por estudiantes de Secundaria, 71% frente al 29% de Universidad. Los sistemas de representación más frecuentes empleados por estos estudiantes son el Simbólico, que predomina, y el de Parte-Todo, que se alterna con el anterior. También se encuentra el sistema de Ensayo-Error. Pero los sujetos de este clúster rechazan las representaciones gráficas aunque sean bastante explícitas en el texto del problema. Los estudiantes de esta agrupación, en su gran mayoría de Secundaria,

abordan los problemas más simples mediante una representación que implica relaciones numéricas. Cuando el problema es más complejo, dejan de lado lo numérico y tratan de resolverlo mediante expresiones simbólicas si bien no establecen, prácticamente en ningún caso, un puente entre ambos sistemas de representación a través de lo gráfico. Son sujetos que no tienen desarrollada una visión espacial intuitiva de las relaciones entre los objetos que se citan en el texto de los problemas verbales.

## **BALANCE**

El trabajo presentado es solo parte de la tesis doctoral de Francisco Fernández, en la que destacamos su contribución al estudio de los sistemas de representación empleados en la resolución de problemas de álgebra elemental, mediante un estudio empírico, con una muestra compuesta por estudiantes de secundaria y estudiantes universitarios, mediante aplicación de un cuestionario, cuyo diseño y características hemos expuesto. Nuestro resumen destaca la función de los sistemas de representación en las tres fases del proceso de resolución identificadas: planteamiento, ejecución y desempeño. Este análisis identifica categorías de procedimientos que caracterizan tanto a los procesos como a los resolutores que comparten una misma estrategia de resolución. La riqueza y complejidad del estudio se muestran en su fundamentación con la caracterización procedimental de las representaciones. Esta aportación teórica se ve refrendada por un estudio confirmatorio derivado de un análisis clúster, que identifica tipos de resolutores y por un estudio de caso complementario.

La lectura actual de esta memoria muestra una gran riqueza de planteamiento por los focos elegidos y por la diversidad de relaciones establecidas entre ellos, como se puede observar en los objetivos e hipótesis de la investigación. Este trabajo fue pionero en su momento y tuvo continuidad en otras dos tesis, la de Espinosa (2004) y la de Martínez-Videla (2011).

La relectura de la memoria, su amplitud, solidez y ambición en el tratamiento de los sistemas de representación descubre líneas de trabajo aún por explorar, que esperan nuevas reflexiones y abordajes por parte de los investigadores en formación interesados por esta temática.

**REFERENCIAS**

- ESPINOSA, E. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Granada: Universidad de Granada. Tesis no publicada
- FERNÁNDEZ, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Granada: Universidad de Granada. Tesis no publicada
- [http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis\\_dir/ver\\_detalle/6681/](http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis_dir/ver_detalle/6681/)
- KILPATRICK, J., Rico, L. y Sierra, M. (1994). *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis.
- MARTÍNEZ-VIDELA, M. V. (2011). *Utilización de método geométrico lineal (mgl) para la resolución de problemas de álgebra elemental*. Granada: Universidad de Granada. Tesis no publicada.
- RICO, L. (Edt.) (1997). *Bases teóricas del currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis.
- RICO, L. Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.