

REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS DE OPERADORES NUMÉRICOS ADITIVOS

Additive Numerical Operators and Geometric Representations

LUIS RICO

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo sintetiza un estudio de las relaciones y conversiones entre las estructuras numéricas aditivas habituales y una estructura geométrica, discreta y finita, derivada de su representación en el Geoplano 10×10 . El estudio considera isomorfos el grupo de los operadores aditivos en el conjunto cociente de las clases residuales de enteros módulo 100 y el grupo de las transformaciones geométricas lineales en el Geoplano 10×10 , definidas por figuras llamadas “cadenas”. Francisco Ruiz introduce y desarrolla estos objetos en su tesis doctoral, La “Tabla 100: Representaciones geométricas de las relaciones numéricas. Un estudio con profesores de educación primaria en formación”. Con esos fundamentos diseñó y evaluó una propuesta didáctica sobre estructuras aditivas en la Tabla 100, que basa en conceptos y formas geométricos y con la que trabajó en la formación inicial de un grupo de estudiantes de Magisterio, especialistas en Ciencias.

Palabras clave: estructuras numéricas, formación inicial de profesores de matemáticas, números y geometría, operadores aditivos, sistemas de representación

Abstract

This work synthesizes a study of the relations and conversions between the usual additive numerical structures and a discrete and finite geometric structure, derived from its representation in the 10×10 Geoboard. The study considers isomorphs the group of additive operators in the quotient set of the residual classes of integers module 100 and the group of the linear geometric transformations in the Geoboard 10×10 , defined by figures called “chains”. Francisco Ruiz developed this object in his doctoral thesis “Table 100: Geometric representations of numerical relations. A study with pre-service primary school teachers.” With these foundations

he designed and evaluated a didactic proposal on additive structures in Table 100, based on concepts and geometric forms whose goal was the training of a group of pre-service Secondary Teachers.

Keywords: numerical structures, pre-service mathematics teachers training, numbers and geometry, additive operators, representation systems.

INTRODUCCIÓN

El 16 de junio del año 2000 Francisco Ruiz López presenta y defiende su tesis doctoral, titulada *La Tabla 100: Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación* (Ruiz, 2000). La tesis obtuvo la calificación de excelencia Sobresaliente Cum laude. El trabajo se matriculó en el Programa de Doctorado de Matemáticas y se realizó en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La tesis se ubica en el Grupo de investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (FQM193) del Plan de Investigación de la Junta de Andalucía, donde se adscribe a las líneas temáticas de Pensamiento Numérico, Formación de Profesores de Matemáticas y Sistemas de Representación.

El estudio se inicia en el curso 1994-1995 y el trabajo de campo tiene lugar en el curso 1995-1996, con la contribución de un grupo de estudiantes de Tercer Curso del Plan 1971, de la Especialidad de Ciencias Físico-Naturales de Magisterio, en la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. de Granada, quienes colaboran con su trabajo y prestan su tiempo y ayuda a la obtención de los datos empíricos en que se basa el estudio. Codirectores de la tesis son los doctores Luis Rico y Moisés Coriat.

La memoria final es un documento de 680 páginas en dos volúmenes, el primer volumen se organiza en 7 capítulos (426 páginas.) y el segundo en 6 anexos (254 páginas.) (Ruiz, 2000).

CONCEPTOS Y SIGNIFICADO

Objeto de estudio

Desde el planteamiento del problema al comienzo de la memoria, Francisco Ruiz destaca que el objeto central de su investigación es el em-

pleo de la tabla de los cien primeros números, que denomina Tabla-100, para el estudio de relaciones numéricas. Al ser su propósito abordar este estudio desde la perspectiva de los sistemas de representación y la visualización de patrones numéricos, escoge la Tabla-100 por su simplicidad y sus características singulares, entre otras tablas posibles. Considera la tabla con el formato de un geoplano de 10×10 puntos, con el apoyo de una rejilla o cuadrícula, que da soporte a las figuras y formas geométricas y a los operadores y relaciones aritméticas que surjan en el estudio.

Al inicio del trabajo la tabla de los cien primeros números es un material didáctico para trabajar con los escolares de Primaria, apenas una configuración gráfica más de los primeros números del sistema decimal de numeración, útil para explorar su estructura aditiva, mostrar resultados de operaciones y descubrir relaciones entre los números de dos dígitos (Sanz, 1995, pp. 81-90).

La motivación surge de un interés genuino por fundamentar el conocimiento didáctico del profesor en formación sobre una posible interpretación de los significado de la propia tabla y de los conceptos vinculados con ese material, simples en apariencia. Se plantea así la conveniencia de instituir la tabla como concepto matemático escolar, mediante su análisis. Es propósito central del trabajo llevar a cabo el análisis conceptual de la Tabla 100 mediante estudio de su estructura, de sus sentidos y modos de uso, junto con las cuestiones derivadas de su representación como un plano finito discreto, del significado de operador aditivo vinculado con la tabla y la conexión de esa representación con otras conocidas según, la interpretación de significado de un concepto matemático escolar (Rico, 2016).

La Tabla 100

Francisco Ruiz simboliza la tabla de los 100 primeros números como Tabla-100. Para formalizar este concepto integra las siguientes nociones y estructuras, como mostramos a continuación.

El conjunto ordenado C de los 100 primeros números naturales, $C = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$, distribuido en una combinación de series horizontales y verticales en un cuadrado numérico constituido por 10 filas, que incluyen los números consecutivos de la misma decena en cada fila y manteniendo

y la retícula R , como red de conexiones entre los puntos del geoplano G , síntesis que se representa gráficamente mediante la cuarta imagen de la Figura 1.

El resultado es una tabla organizada en filas y en columnas con los números del 1 al 100, tal y como aparece en la imagen frontal de la figura 1, la cual constituye un modo de presentación estructurado de los 100 primeros números naturales. Los números de cada fila, respectivamente columna, están en progresión aritmética, en relación aditiva mediante la suma o resta de unidades, respectivamente, decenas.

Cada punto del geoplano G se identifica con un número de C , y recíprocamente, manteniendo la contigüidad y el orden que marca la rejilla R . Cada elemento de $T-100$ tiene la doble consideración de punto y de número, que se muestra como etiqueta de una casilla de la cuadrícula.

Esta definición identifica la Tabla-100 como un conjunto dotado de las propiedades aritméticas de C , las geométricas de G y las de conexión de la cuadrícula R . La discusión de las condiciones para que las leyes suma y producto en $T-100$ sean leyes de composición interna llevan, en el transcurso del trabajo con los profesores en formación, a extender los valores numéricos de $T-100$ a las clases residuales de naturales, módulo 100.

Con posterioridad el investigador considerará la anterior extensión formal de $T-100$ a todo el conjunto Z de los enteros: T_Z . Esa extensión tiene estructura de anillo conmutativo, donde los elementos del conjunto $Z-100$ son las clases residuales de Z módulo 100, y las leyes internas de la suma (+) y el producto (\times) se refieren a la suma y producto usuales de clases residuales. Por razones prácticas seguiremos simbolizando por $T-100$ al conjunto representado, con las extensiones mencionadas.

Operadores aditivos y cadenas en la T-100

Las operaciones aditivas en la tabla se interpretan mediante recorridos formados por celdillas contiguas. Cuando se señalan desplazamientos por la $T-100$ siguiendo la contigüidad de la cuadrícula, se pueden identificar con operaciones aditivas; desplazarse k posiciones a derecha/izquierda de un determinado número equivale a sumar/restar k unidades a ese número, y desplazarse k lugares hacia abajo/arriba equivale a sumar/restar k decenas al número de partida.

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Figura 2. Cadenas en la T-100

Se denominan *cadenas* a los recorridos orientados, dados por concatenaciones de celdillas cuadradas, cada dos con un lado común, que simboliza mediante la notación: $C(c+ d\pm)$, donde c indica las decenas y d las unidades. Los signos $+$ y $-$ proporcionan el sentido de avance o retroceso de cada tramo de la cadena. La expresión $C(2+ 1+)$ corresponde a la cadena “bajar 2, derecha 1”, mientras que $C(1+ 2.)$ corresponde a “bajar 1, izquierda 2” (Figura 2).

A cada cadena corresponde un operador aditivo que resulta de la diferencia entre el número final y el inicial de la cadena. Hay cadenas equivalentes a las que corresponde un mismo operador. Por esta razón, se establece la noción de *cadena libre* o conjunto de cadenas fijas equivalentes a las que corresponde un mismo operador. Cada cadena libre toma como representante canónico la cadena equivalente con valor mínimos de celdillas. De esta forma, se establece una correspondencia biunívoca entre el ámbito aritmético y el geométrico, visualizando así mediante figuras geométricas, *cadenas libres*, un concepto aritmético el *operador aditivo*.

Sentidos y representaciones

El interés didáctico del estudio se centra en explorar las potencialidades de la T-100 y de los operadores aditivos definidos en ella para delimitar, identificar y estudiar patrones y relaciones numéricas. El hecho de

representar el conjunto de los números entre 1 y 100 en forma de tabla o de un conjunto de puntos discretos sobre una red ortogonal, proporciona un sentido de operador aritmético a los recorridos realizados sobre esa tabla, como sumar o restar unidades y decenas a un número de partida. La consideración de la T-100 como plano discreto acredita la revisión e interpretación geométrica de las operaciones aritméticas elementales, desarrolla un sentido geométrico para los operadores aditivos como movimientos en un contexto geométrico de un plano discreto. Los *operadores aditivos* sobre la T-100 son portadores en simultáneo de un doble sentido, aritmético y geométrico, que se concreta de modo singular en la identificación de los operadores aritméticos con las figuras geométricas llamadas cadenas libres.

En segundo lugar, desde un análisis de significado, T- 100 incentiva la localización y el trabajo con otras representaciones diferentes de los operadores aditivos a partir de la tabla, tanto de tipo simbólico como de tipo visual o geométrico. A los primeros les llama expresiones aritméticas del operador, y están constituidos por secuencias de números afectados de un signo + o un signo – (según se trate de sumar o restar), escritos como subíndice o superíndice (según se trate de unidades o decenas).

Definiciones

En relación con la caracterización de las cadenas éstas se construyen formalmente como representaciones de los operadores aditivos, para lo cual se definen los siguientes conceptos:

- *Cadenas fijas*, que son concatenaciones orientadas de cuadrados de la retícula con un lado común, a modo de poliminós.
- *Expresiones aritméticas de las cadenas fijas*, que son notaciones mediante números, subíndices y superíndices, que indican los desplazamientos que realiza la cadena por la tabla.
- *Cadenas fijas simples* que constan de un solo tramo vertical y/o un solo tramo horizontal.
- *Expresiones aritméticas reducidas* que corresponden a las cadenas fijas simples, y que contienen solamente dos números.
- *Cadenas libres* son las clases de equivalencia de cadenas fijas que representan al mismo operador aditivo.

- *Cadenas fijas simples mínimas* son las cadenas simples que tienen el menor número posible de celdillas y se adoptan como representantes canónicos de las cadenas libres.

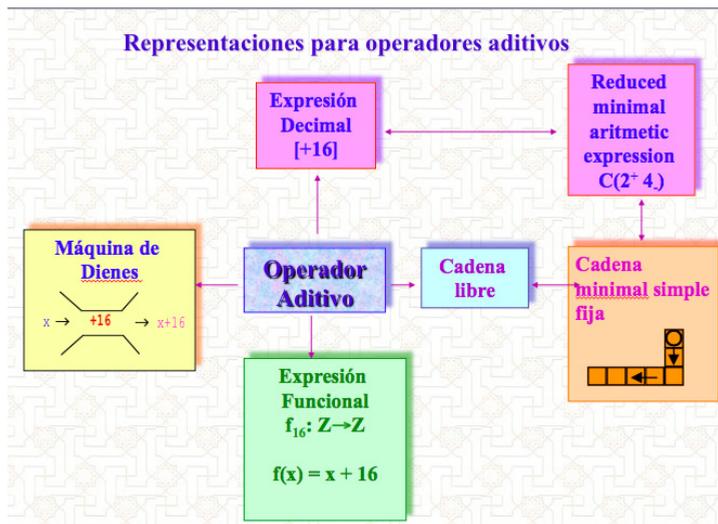


Figura 3. Representaciones y sentidos de los operadores aditivos

Los resultados que se obtienen de la formalización de la T-100 y de la interpretación geométrica de sus operadores aditivos, proporcionan nuevos sentidos que aportan gran riqueza de significados para interpretar las conversiones y traducciones entre nociones aritméticas y geométricas, sobre la base de la dualidad establecida por las representaciones derivadas de T- 100.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Francisco Ruiz aborda su problema de investigación en tres momentos, que proporcionan tres focos y le ayudan a estructurar la memoria:

Primero, el estudio se encuadra en el Grupo *Pensamiento Numérico*, que se ocupa de diversas áreas de interés entre ellas, el *Sentido Numérico* y los *Sistemas de Representación*. También del ámbito de las *relaciones entre la Aritmética y la Geometría*, con la atención puesta en la *visuali-*

zación de patrones numéricos y operadores aditivos en la Tabla-100, que trata en el Capítulo 2.

Un segundo foco está en la *Formación Inicial de Profesores y la Innovación Curricular*, que se abordan en el estudio empírico mediante un diseño de Investigación-Acción. Al desarrollo de ese foco dedica los Capítulos 3, 4 y 5.

Tercero, debido al estudio realizado acerca del significado de la T-100 como concepto matemático escolar y de las representaciones de los operadores aditivos, avanza en este estudio desde una perspectiva formal y teórica, estudio al que dedica el Capítulo 6.

La T-100 le ayuda a trabajar con las *estructuras algebraicas*, especialmente la de grupo, y le permite profundizar en las *estructuras aditivas*. Otros conceptos matemáticos utilizados en su trabajo con la T-100 han sido las *relaciones de equivalencia* y en especial las de *congruencia*, las *isometrías planas* y las *ecuaciones de rectas en el plano*, actividad a la que dedica el Capítulo 6. Identifica las representaciones de dichas nociones en T-100 y las estudia desde un punto de vista matemático y didáctico.

Así, desde una perspectiva matemática formaliza el grupo abeliano de los operadores aditivos utilizando ambos sistemas de representación, tanto con las expresiones aritméticas como con las cadenas. En ambos casos se trata de sistemas de representación adecuados para los operadores aditivos y no de simples dibujos o codificaciones.

Al considerar las cadenas como figuras geométricas en un plano discreto, tiene la oportunidad de aplicar la noción de transformación geométrica a un operador; las relaciones entre ambos sistemas de representación permiten interpretar el resultado aritmético producido por una isometría sobre un operador y dotarlo de significado.

Desde una perspectiva didáctica establece conexiones entre las representaciones anteriores que ayudan a su comprensión, así como para establecer vínculos entre las representaciones usuales conocidas, como son las expresiones numéricas en base 10, la expresión polinómica, la funcional y la máquina de Dienes (Figura 3).

La investigación tiene como ámbitos de actuación la innovación curricular y la formación inicial de profesores de educación primaria. Aunque la T-100 es, principalmente, una herramienta didáctica utilizada en el medio escolar, el investigador muestra cómo dotar de significado formal

este objeto para contribuir al conocimiento didáctico de las matemáticas escolares por los profesores.

Se plantea a los profesores en formación una propuesta didáctica, que indaga las posibilidades de la T-100 en los aspectos ya señalados. Las tareas que se diseñan están insertas en el currículo de la asignatura de matemáticas de tercer curso de la Diplomatura de Magisterio del Plan 1971 y se conciben con intencionalidad formativa. La importancia que adquiere el estudio de la T-100 en la realización del trabajo hace destacarlo sobre los restantes focos, ya que vincula los contenidos matemáticos, sus significados e interrelaciones con los conocimientos didácticos.

Interrogantes de la investigación

Volviendo a su finalidad recordamos que ésta consiste en explorar la utilidad didáctica de la tabla de los cien primeros números. Esta idea se concreta en diversos interrogantes:

- ¿Qué tipos de patrones numéricos podemos encontrar en la T-100?
- ¿Qué conceptos aritméticos y geométricos están implicados en dichos patrones?
- ¿Qué representaciones encontramos para los conceptos aritméticos anteriores?
- ¿Qué tareas utilizar con el fin de estudiar esas posibles representaciones?
- ¿Qué grado de aceptación tienen este tipo de actividades por los estudiantes?
- ¿Qué aportaciones proporcionan las tareas en relación con el sentido numérico?

El investigador sitúa su trabajo para abordar estas preguntas dentro de los estudios de innovación curricular, que organiza con dos perspectivas. En primer lugar, realiza un estudio empírico, con estudiantes de tercer curso de la diplomatura de Magisterio organizados en tres grupos distintos, que lleva a cabo mediante una metodología de Investigación en el Aula. En segundo, realiza un estudio teórico y formal de la T-100 y de sus operadores aditivos.

Consideraciones generales

Como resumen de la revisión de literatura y con carácter previo al enunciado de objetivos, Ruiz (2000) expone las siguientes consideraciones generales.

En primer término, la Tabla- 100 es un artefacto didáctico, que se revela útil para plantear una gran riqueza de tareas, cuestiones y problemas tanto en un contexto aritmético como en uno geométrico; constituye un recurso adecuado para descubrir y estudiar patrones. De las revisiones bibliográficas se desprende la escasa utilización en el medio escolar de tablas numéricas para enseñanza y aprendizaje de aspectos aritméticos con un enfoque geométrico. Por ello, resulta útil introducir en un programa de Formación Inicial de Profesores de Primaria y primer ciclo de Secundaria un conjunto de actividades en torno a la T-100 con el fin de suscitar reflexiones por parte de los estudiantes sobre conceptos aritméticos sencillos desde la óptica que proporciona la “geometría de la Tabla-100”.

En segundo término, dada la dimensión geométrica que proporciona la T-100 para los diversos conceptos aritméticos que se pueden estudiar y la variedad de patrones numéricos que en ella se detectan, parece factible encontrar representaciones e interpretaciones aritméticas adecuadas para algunos conceptos geométricos. Las relaciones básicas entre los números de la T-100 son aditivas. Es la estructura aditiva la que organiza dicha tabla, siendo las representaciones más fáciles de obtener las que atañen a los operadores aditivos. El material objeto de estudio facilita encontrar, al menos, dos sistemas de representación, aritmético y geométrico, para dichos operadores, permitiendo establecer conexiones entre ambos.

En tercer lugar, la T-100 es una herramienta didáctica sencilla sin mayor dificultad. No obstante, la tabla es susceptible de verse como concepto matemático per se, con el cual se ponen de manifiesto estructuras matemáticas, representaciones y sentidos, es decir, significados para esos conceptos matemáticos escolares. Formalizar la tabla y abordar los problemas conceptuales derivados de ese hecho, es consecuencia de los objetivos didácticos.

OBJETIVOS

Bajo las consideraciones precedentes, el investigador enuncia como Objetivo General para el estudio, el siguiente: “Explorar las potenciali-

dades que encierra la Tabla-100 como espacio de representación, donde se pueden integrar y relacionar aspectos aritméticos y geométricos, en un programa de formación inicial de profesores de primaria.”

Este objetivo general se desglosa en los siguientes objetivos parciales:

- Primero: Indagar en la comprensión de los estudiantes sobre los aspectos numéricos y geométricos de la T-100 y las representaciones geométricas realizadas sobre ella.
- Segundo: Estudiar la viabilidad de nuevas representaciones, numéricas o geométricas, para los operadores aditivos, estableciendo conexiones entre esas representaciones.
- Tercero: Realizar una propuesta didáctica en torno a la T-100, integrada por una programación y unas tareas que faciliten establecer relaciones entre aritmética y geometría, por medio del estudio e identificación de patrones y relaciones.

Consecución del primer objetivo y logros alcanzados

El primer objetivo se trabaja durante la primera fase del estudio empírico. A través de las tareas propuestas, se introduce a los estudiantes en los contenidos aritméticos y geométricos que proporciona la T-100.

Los objetivos específicos para esta primera fase del estudio empírico son:

1. Familiarizar a los estudiantes con el uso de la T-100.
2. Constatar la correspondencia entre las operaciones aritméticas básicas y los desplazamientos en la tabla, dotando a aquellas de un contexto de uso dinámico.
3. Encontrar regularidades de carácter visual-geométrico en la tabla e interpretarlas aritméticamente.
4. Establecer conexiones entre el área de un polígono y el hecho de ser sus vértices puntos del geoplano asociados a los múltiplos de un determinado número.
5. Estudiar los múltiplos de un número en la T-100, desde un punto de vista dinámico, sometiéndolos a isometrías planas sencillas y observando el efecto aritmético producido.

Este primer objetivo de la investigación se logra plenamente por cuanto los estudiantes:

- Realizan y reinterpretan operaciones aritméticas basándose exclusivamente en los *desplazamientos por la tabla*, asignando un significado aritmético a cada desplazamiento.
- Encuentran multitud de regularidades visuales de tipo geométrico (cadenas), a las que asocian un operador aditivo.
- Utilizan diversas estrategias para el cálculo de las áreas de polígonos formados al unir n múltiplos consecutivos de un número k en la T-100, y relacionan las áreas de los polígonos con n y k .
- Resuelven dudas de tipo geométrico (puntos alineados, paralelismo, ángulos rectos, perpendicularidad entre líneas oblicuas en la tabla, etc.) utilizando datos y propiedades aritméticas que proporciona la T-100.
- Estudian el efecto producido por algunas simetrías sobre los múltiplos de un número en la T-100, observando las regularidades encontradas.

Como balance, los profesores en formación establecen conexiones entre aritmética y geometría mediante las tareas propuestas.

Consecución del segundo objetivo y logros alcanzados

El segundo objetivo parcial de la investigación se corresponde con la segunda fase del estudio empírico, que propicia la búsqueda y estudio de nuevas formas de representación numéricas, simbólicas y geométricas, para operadores aditivos en T-100. Los objetivos específicos de esta fase del estudio son:

1. Proporcionar representaciones geométricas para los operadores aditivos en la T-100.
2. Utilizar las cadenas para estudiar la posible estructura algebraica del conjunto de los operadores aditivos con la “operación suma”.
3. Estudiar el efecto sobre los operadores aditivos asociados a las cadenas cuando éstas se someten a isometrías sencillas.
4. Encontrar representaciones de tipo simbólico para los operadores aditivos.
5. Extender el estudio de las cadenas al considerarlas en la Tabla-100 de k columnas.

Los estudiantes aportan evidencia de haber cubierto también este segundo objetivo parcial, ya que:

- Identifican las cadenas como representaciones geométricas de operadores aditivos, realizando representaciones propias y operando de manera simultánea con ellas y con los operadores que representan.
- Encuentran un criterio adecuado para “sumar” cadenas, identificando aquellas que realizan las veces de elemento neutro y de elemento simétrico de otra para esa operación.
- Observan el efecto de ciertas isometrías sobre las cadenas y sobre los operadores asociados a ellas.
- Encuentran formas simbólicas distintas de las habituales para representar a los operadores aditivos.
- Interpretan correctamente el cambio de significado aritmético que experimentan las cadenas cuando éstas se colocan en una T-100.

Tercer objetivo

El tercer objetivo parcial participa de las dos fases mencionadas. En los apartados iniciales han quedado recogidos los logros generales de tipo matemático conseguidos con el estudio de las cadenas y el manejo de algunas transformaciones geométricas planas.

CONCLUSIONES

Destaca la buena acogida que los estudiantes dispensaron a la identificación y estudio algebraico de los operadores aditivos por medio de las cadenas, encontrando fácilmente cadenas con ángulos rectos y número mínimo de casillas, para representar a los operadores aditivos. También expresaron un criterio coherente para “sumar” cadenas, superponiendo la casilla final de una de ellas con la inicial de la otra.

Para salvar el problema que presentan las cadenas situadas en los bordes de la T-100, los estudiantes impusieron restricciones para el tamaño de las cadenas con objeto de visualizar su “suma” en esta tabla; propusieron la idea de que una cadena que rebasa un lateral de la tabla aparezca por el

lateral opuesto en la fila correspondiente, dando así una solución de continuidad al problema.

Otros estudiantes participantes pusieron de manifiesto el papel que juegan los números de la T-100 como el “conjunto origen” de la aplicación que constituye el operador aditivo. De este modo, estado y operador quedan diferenciados en su forma de representación, ya que para el primero se utilizaron los símbolos numéricos habituales y para el segundo adoptaron la forma geométrica de una cadena.

La T-100, en su condición de geoplano, se revela como un buen medio donde realizaron reflexiones sobre las cadenas, consideradas exclusivamente como figuras geométricas independientemente de su orientación. A la hora de observar el efecto producido sobre sus operadores asociados la dificultad aumenta, debido en parte a la no inclusión de flechas que orienten las cadenas.

Además de las representaciones de carácter geométrico, se obtuvieron una variedad de representaciones simbólicas con las que expresaron los operadores aditivos. En su mayoría combinaron elementos gráficos con numéricos y abundaron los pares ordenados. Los estudiantes manejaron así varios sistemas de representación para el mismo concepto.

Por lo que se refiere al significado de los conceptos estudiados destaca que la T-100 constituye el soporte sobre el cual se realizan las representaciones estudiadas. Al considerar en ella números, polígonos y cadenas se hace necesario su formalización, delimitando los elementos con los que trabaja, que son: el conjunto numérico de los 100 primeros números naturales, el geoplano y la cuadrícula.

Con el fin de dar solución a los problemas que se presentan en los límites de T-100, se realizaron las siguientes extensiones:

- T_Z o extensión de T-100 a todo el conjunto Z de los enteros. En esa extensión advertimos la estructura de anillo conmutativo para $(K, +, \cdot)$, donde los elementos del conjunto K son las clases residuales de Z módulo 100, con las leyes internas de suma (+) y producto (\cdot), que se refieren a la suma y producto de clases residuales.
- $Z-100$ o extensión de T-100 al conjunto cociente de Z respecto de la relación de congruencia módulo 100.

En relación con la estructura del conjunto de las cadenas libres, contemplaron las cadenas como expresiones geométricas de los operadores aditivos como aplicaciones, y abordaron la comprobación de la estructura de grupo aditivo abeliano de estos operadores mediante utilización de las cadenas. En este sentido destacan los siguientes logros:

- Constataron la estructura de grupo abeliano de los operadores aditivos por medio de las cadenas, cuyo dominio de aplicación es la extensión T_Z en lugar de la Tabla-100, debido a los problemas que ésta presenta en sus bordes.
- Definieron la composición de cadenas superponiendo la casilla final de una con la inicial de la otra.
- Establecieron como elemento neutro para esta “suma” es la *cadena cerrada*.
- Obtuvieron el elemento simétrico de una cadena cambiando su orientación y conservando el orden “decenas, unidades”.
- Constataron los isomorfismos existentes entre las tres expresiones decimal, aritmética y geométrica para los operadores aditivos.

En el año 2000, Francisco Ruiz concluye la redacción del manuscrito de su tesis con las siguientes palabras:

Finalmente, con nuestro esfuerzo y trabajo reflejados en esta memoria, esperamos haber contribuido a clarificar todo un mundo de posibilidades didácticas y matemáticas que se vislumbra encierra el objeto que hemos llamado la Tabla-100, aportando nuestra contribución a la línea de Pensamiento Numérico. (p. 417)

En el balance de este artículo conmemorativo destaco el carácter precursor del estudio presentado, que muestra la potencia del marco del Análisis didáctico y la riqueza del análisis del significado de los conceptos matemáticos escolares, junto con la relevancia del uso de diversos sistemas de representación con el juego de conversiones entre ellos.

La riqueza de ideas, de propuestas didácticas y matemáticas abiertas por Francisco Ruiz, esperan su continuación y progreso en próximos trabajos y proyectos.

REFERENCIAS

- RICO, L. (2016). Significado de los conceptos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 153-175). Madrid: Editorial Pirámide.
- RICO, L y RUIZ-LÓPEZ, F. (2004). **Geometric Visualization of Additiv Operators**. In B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelson, B. Johanson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby & K. Walby: *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 351-362). Sweden: Götteborg University.
- RUIZ, F. (2000). *La tabla 100: Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalle/6140/.
- SANZ, I. (1995). *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos*. San Sebastián: Universidad del País Vasco y Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B.