Las representaciones gráficas como modelo y patrón geométrico

Graphic representations as model and geometric pattern

Enrique Castro Martínez, Elena Castro-Rodríguez
Universidad de Granada

Resumen

Las representaciones gráficas son una herramienta fundamental para la expresión y comunicación de los objetos matemáticos. En este capítulo resaltamos dos de sus funciones esenciales. Una de ellas es el de las representaciones gráficas como modelos geométricos en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos, que conducen a estrategias de solución. Un segundo uso importante es el tratamiento de los patrones mediante la representación geométrica de los mismos, sugiriendo que además de su carácter estético, su utilización puede aportar una interpretación sinestésica del objeto matemático que representan.

Palabras clave: representación gráfica, geometría, resolución de problemas, modelos, patrones.

Abstract

Graphic representations are a fundamental tool for the expression and communication of mathematical objects. In this chapter we highlight two of its essential functions. One of them is graphical representations as geometric models in solving arithmetic and algebraic problems, leading to solution strategies. A second important use is the treatment of patterns through the geometric representation of them, suggesting that in addition to their aesthetic character, their use can provide a synesthetic interpretation of the mathematical object they represent.

Keywords: graphic representation, geometry, problem solving, models, patterns.

Introducción

Si algo ha caracterizado tradicionalmente a la matemática escolar ha sido su concepción como dos grandes bloques: el de Aritmética y el de Geometría. El primero se ocupa del estudio de los números y sus relaciones y el segundo de las figuras geométricas, sus características y relaciones entre sus elementos (Ruiz, 2001). Estos dos grandes bloques no son compartimentos estancos de la matemática, por el contrario, entre el número y la forma se dan relaciones estrechas, de tal manera que en Geometría los números se utilizan para el estudio de las formas y la Aritmética se vale de las formas para expresar las relaciones numéricas (Ruiz, 2001). Esta conexión es fundamental desde el punto de vista de la resolución de problemas.

Resolver problemas enunciados verbalmente, de carácter aritmético y algebraico, es un aspecto clave del currículo de Matemáticas en la enseñanza obligatoria, y también es uno de los aspectos más problemáticos. ¿Por qué esto es así?, ¿cómo podemos ayudar a los escolares en estas tareas? (González, Castro-Rodríguez y Castro, 2016; Ng y Lee, 2009). Tradicionalmente se ha considerado que la mayor parte de los alumnos que no llegan a resolver un problema, fracasan porque no lo entienden, porque "no lo ven". Por tanto, hay que empezar por eso, porque lo entienden y porque lo ven (Charenton, 1930).

El planteamiento de los problemas matemáticos en la escuela adopta tradicionalmente una formulación verbal y el estudiante debe traducir esta formulación verbal del problema a una expresión matemática de carácter simbólico. Esta afirmación nos traslada al papel que juegan las representaciones en la resolución de problemas. Cuando procedemos a resolver un problema aritmético o algebraico enunciado verbalmente, lo primero que debemos hacer es representárnoslo internamente. El que se comprenda o no un problema depende de si esta representación interna sea o no adecuada, sea completa o el resolutor produzca una representación interna parcial del problema. La representación mental del problema debe contener todos los elementos esenciales de dicho problema, incluidos los datos y las relaciones entre ellos. De esta representación interna del problema es de la que surge la representación externa constituida por las expresiones aritméticas o algebraicas del problema, cuya manipulación nos permite obtener un resultado.

En la literatura especializada sobre resolución de problemas se utiliza el término representación para referirse a la representación interna del problema que construye el resolutor, o bien a las formas externas de carácter semiótico en las que se plantea, reformula o resuelve un problema, y a las que se denominan representaciones externas. Las representaciones externas son "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes" (Castro y Castro, 1997, p. 96). La importancia de las representaciones externas en el aprendizaje de la matemática y la resolución de problemas ha sido ampliamente estudiada (Cuoco y Curcio, 2001; Fernández, 1997; Goldin, 1998; Janvier, 1987; Martínez, Fernández y Flores, 2011; Rico, 2009).

En el aprendizaje escolar de la matemática y en la resolución de problemas las representaciones se han utilizado de distintos modos, uno de ellos en propuestas teóricas del aprendizaje como facilitadores del proceso del paso de los concreto a lo abstracto. En esta línea Radford y Grenier (1996) presentan una vía alternativa estructurada para la enseñanza del Álgebra a través de la resolución de problemas verbales. Tomando el desarrollo histórico de la resolución de problemas, proponen tres niveles de abstracción para resolver un problema: un nivel concreto (manipulativo), un nivel semiconcreto (a través de dibujos) y un nivel simbólico (que corresponde al lenguaje algebraico). En este enfoque los tres modos de representación son reflejo de desarrollo cognitivo, pero actúan también en paralelo. Es decir, una vez se ha adquirido un modo, se sigue utilizando para desarrollar el siguiente y también de modo simultáneo para complementarse. Fernández (1997) hace un análisis detallado de los distintos tipos de representaciones en matemáticas y subraya el papel fundamental de las representaciones gráficas para la resolución de problemas verbales en álgebra. Su aproximación se ubica dentro de un enfoque que trata las representaciones como sistemas isomorfos en los que cabe representar los problemas para su resolución de forma indistinta, restando predominancia al sistema simbólico en favor de un sistema gráfico más intuitivo.

El modelo geométrico-lineal

Un segundo modo de utilización de las representaciones externas en Educación Matemática es su uso como un modelo o procedimiento para enseñar a resolver problemas verbales en la escuela. Los métodos clásicos de enseñar a resolver problemas verbales consideraban distintas fases, pero una constante común en todos ellos es empezar con la comprensión del enunciado del problema verbal.

Para solucionar esta falta de comprensión puede comentarse el enunciado, dar una explicación sencilla, hacer una aclaración oportuna, o dar vida real al problema mediante su dramatización, haciendo que los mismos niños sean los personajes de la acción que aquél supone. Pero expresar con palabras los elementos y las relaciones que determinan un problema tiene sus ventajas y sus limitaciones. Bajo esta forma de representación verbal a veces los escolares no comprenden la información que se les plantea en el enunciado, no llegan a relacionar las expresiones verbales con sus referentes concretos ni con la dramatización ni con el comentario; entonces se puede recurrir a la interpretación gráfica mediante modelos geométricos de aquél; es decir, a sustituir por líneas (casi siempre rectas) los valores numéricos. Se ha sugerido que la ayuda de representación mediante diagramas, modelos o esquemas gráficos facilita una mejor comprensión del problema que la formulación verbal (Botsmanova, 1989). Y ello porque las representaciones gráficas mediante modelos geométricos lineales permiten presentar las relaciones abstractas del problema en una forma más concreta.

Los modelos geométricos en dos dimensiones son representaciones gráficas de entes cuyos componentes están representados mediante figuras geométricas básicas tales como puntos, líneas, segmentos, polígonos y circunferencias. Un modelo geométrico es una representación isomórfica del ente que representa y que está realizada mediante trazado geométrico. Por tanto conserva la misma estructura de relaciones que el ente representado. La recta real es un ejemplo bien conocido de modelo geométrico de los números reales. El isomorfismo existente entre los números reales y la recta geométrica real ha permitido modelizar geométricamente las operaciones numéricas (y algebraicas) así como sus propiedades mediante modelos geométricos. El ejemplo más reciente es la propuesta en el modelo de Singapur.

El currículo de Singapur ha popularizado los modelos geométricos de barras en la resolución de problemas. En dichos modelos se emplean rectángulos para representar gráficamente la relaciones básicas, como la de parte-todo y la relación de comparación (denominan modelo aritmético a aquel que representa una situación en la que la incógnita está en la solución de la ecuación y modelo algebraico en el caso en que la incógnita sea uno de los sumandos), tal como se muestra en las siguientes figuras.

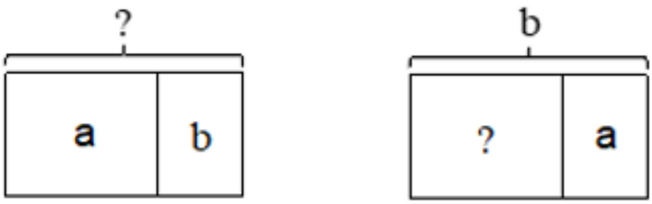

Figura 1. Modelos parte-todo: A la izquierda modelo aritmético, a la derecha modelo algebraico (Ng y Lee, 2009)

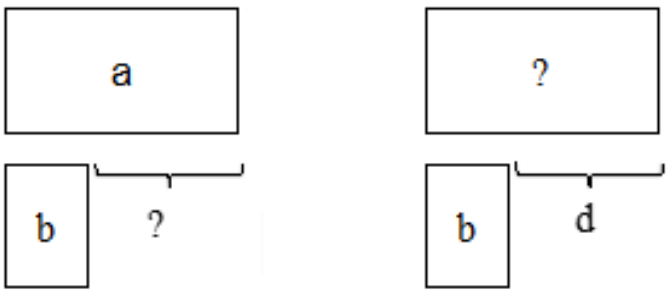

Figura 2. Modelos de comparación: A la izquierda modelo aritmético, a la derecha modelo algebraico (Ng y Lee, 2009)

La utilidad de estos esquemas es facilitar la comprensión de la estructura de relaciones que mantienen las cantidades en el problema. Con este enfoque se recupera parte de una tradición metodológica que trataba de presentar la resolución de problemas aritméticos y algebraicos como una conjunción entre contexto real, modelo gráfico y solución, todo ello ejemplificado con un problema modelo. La figura 3 muestra un ejemplo empleando un problema de cambio. Se muestra un problema real al que va asociado el problema modelo y a continuación el modelo gráfico (geométrico-lineal) y la solución.

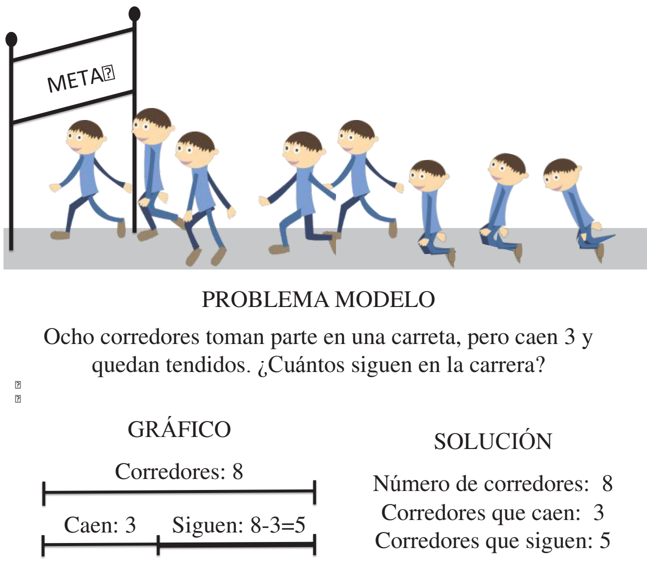

Figura 3. Situación real asociada al problema modelo, modelo gráfico y solución (Adaptado de la Aritmética de Luis Vives, 1949).

En esta propuesta el modelo gráfico actúa en paralelo con el modelo simbólico, su aplicación se sitúa en la fase que Polya (1945) denomina comprensión del problema. El profesor Fernández propone una propuesta en la que además la estrategia surja y se realice sobre la representación gráfica.

El modelo geométrico como estrategia

El profesor Fernández ha propugnado el modelo geométrico como una estrategia para la resolución de problemas algebraicos, lo que ha denominado el modelo geométrico lineal. En este enfoque se va un poco más allá de solucionar la comprensión del problema pues con él se pretende obtener la solución de manera geométrica. Es decir, en el modelo geométrico lineal se utilizan los modelos geométricos como estrategia predominante de resolución frente a estrategias de carácter simbólico.

El modelo en cuestión se basa en la utilización de segmentos lineales para representar las cantidades de magnitudes (tanto conocidas como desconocidas) y sus relaciones. Este modelo tiene la ventaja de permitir representar variables discretas y continuas y ser de fácil manipulación.

Enmarcado en un sistema de representación gráfico, y tomando en cuenta el fundamento de dicho modelo, el profesor Fernández y colaboradores definen el modelo geométrico lineal en los siguientes términos:

Método geométrico lineal: consideraremos que se utiliza este método, en la resolución de problemas algebraicos, cuando se establecen, a través de segmentos de recta, las relaciones lineales entre los datos y las incógnitas contenidas en el enunciado del problema mediante segmentos de recta, en donde las incógnitas están representadas por trazos o partes de esos segmentos. Es decir, se representa una (o más) cantidad desconocida utilizando un segmento cualquiera y, posteriormente, se describen gráficamente las relaciones contenidas en el enunciado a partir de dicho segmento y mediante la definición de la unidad (explícita o implícitamente) usando un segmento determinado, de manera tal que se puedan representar cantidades conocidas (datos). La resolución del problema pasa por determinar la longitud del segmento que representa a la cantidad desconocida. (Martínez, Fernández y Flores (2009)).

Veamos un ejemplo de solución de un problema empleando una estrategia geométrico-lineal. Para ello, empleamos un problema que podemos identificar como un problema algebraico.

Problema. Un agricultor tiene dos veces tantos patos como pollos. Después de que el agricultor ha vendido 413 patos y 19 pollos murieron, tiene la mitad de patos que de pollos. ¿Cuántos patos tiene ahora?

Usualmente en el ámbito escolar el profesor espera que el estudiante plantee algebraicamente el problema y lo resuelva siguiendo los preceptos algebraicos. Sintéticamente:

Tabla 1. Síntesis del problema.

	Patos	Pollos
Antes	2x	x
Después	2x 413	x - 19
Por tanto	2(2x - 413) = x - 19, 4x - 826 = x - 19, 3x = 807, x =125	

Pero por diversas razones se puede optar por una estrategia geométrico lineal como la, que se muestra en la figura 4, bien como estrategia en sí misma o como forma de comprender la estrategia algebraica.

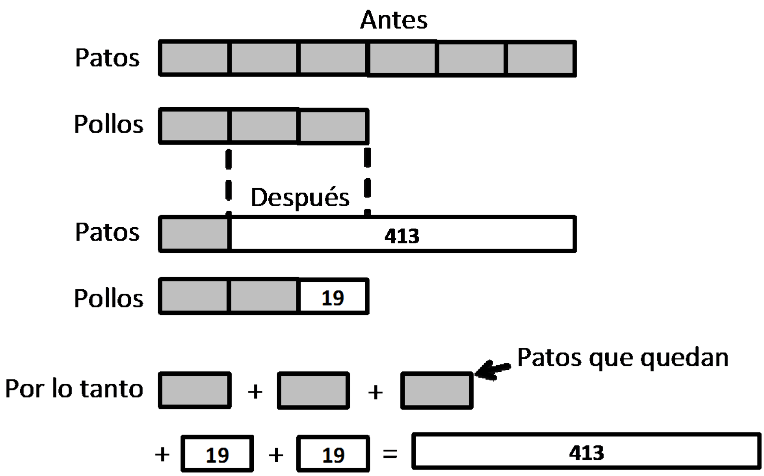

Figura 4. Estrategia geométrico lineal

La estratégica gráfica consta de dos partes. En la primera se muestra las relaciones entre las cantidades de patos y pollos antes y después de efectuada la venta. De esa primera parte se deduce una configuración visual fácilmente resoluble aritméticamente o bien traducible a una expresión algebraica.

El modelo geométrico como patrón

En su reflexión sobre qué es la matemática, Devlin (1998) afirma que muchas personas consideran de forma trasnochada que la matemática es la ciencia de los números. Para él esta visión sería exacta hace dos mil quinientos años pero hoy día sería más adecuado decir que la matemática es la ciencia de los patrones y que diferentes tipos de patrones dan lugar a diferentes ramas de la matemática (Devlin, 1998).

La primera caracterización de la matemática como el estudio de los patrones parece haber sido hecha por el matemático británico, G. H. Hardy, que en su libro "La apología de un matemático" escribió "Un matemático, como un pintor o un poeta, es un fabricante de patrones. Si sus patrones son más perdurables que las de ellos, es porque están hechos con ideas" (Hardy, 1992, p. 84).

Hardy puede o no haber sido el primero en usar la metáfora de los patrones para describir el corazón de las matemáticas, pero ciertamente no fue el último. La declaración más conocida y citada a este respecto es la de Lynne Steen, quien se refirió a las matemáticas como la ciencia de los patrones (Steen, 1988). Desde entonces, la metáfora se ha vuelto casi un lugar común. Lo encontramos en documentos clave en la educación matemática, tales como los Principios y Estándares (NCTM, 2000), en libros como el de K. Devlins Mathematics: The Science of Patterns (Devlin, 1994) y en el aula.

Que sea común llamar a las matemáticas la ciencia de los patrones es probablemente una señal de que hay algo correcto al respecto. Pero, ¿qué significa? Ciertamente, los patrones son a menudo el tema explícito de las matemáticas, a veces incluso en el sentido perfectamente ordinario de la palabra, como en el estudio de las simetrías en frisos, mosaicos y teselaciones. Por supuesto, puede afirmarse que el estudio de la simetría comprende una mayor parte de las matemáticas que podría parecer a primera vista, pero dudamos al decir que esta es la razón por la que es correcto llamar a las matemáticas, en general, la ciencia de los patrones.

¿Por qué el término patrón parece tan adecuado para describir la matemática? Sin duda porque tiene connotaciones que aluden al orden, la regularidad y la legitimidad. Por otra parte, así como el patrón, digamos, de una camisa no es la tela, sino el diseño, el esquema o la idea de una camisa, el término patrón subraya el hecho de que, como indica Resnik, en matemáticas el objeto primario no son los objetos matemáticos individuales, sino las estructuras en que están dispuestos (Resnik, 1999, p. 201).

Desde este punto de vista de la matemática como la ciencia de los patrones, en el ámbito de los sistemas educativos y en las propuestas curriculares, los patrones se consideran de manera más local, como un aspecto importante de la matemática en la que hay que educar a los estudiantes desde los primeros niveles educativos (Castro-Rodríguez y Castro, 2016; NCTM, 2000; Ruiz, 2001). Trabajar los patrones en el aula requiere considerar y explicitar características adicionales de los patrones a lo ya explicitado por Resnik de que conforman una estructura. Ruiz (2001) señala que la idea de patrón está ligada a procesos de repetición y regularidad, y su finalidad es la generalización. Esta idea conecta con el hecho de la búsqueda de un patrón como una estrategia de resolución de problemas, pero no es lo único que se puede hacer en el aula, también es importante la construcción de patrones a partir de su núcleo básico. La repetición de este núcleo básico de manera constante o repitiéndolo de tal manera que se amplía en cada paso el núcleo básico da lugar a dos tipos de estructuras en los patrones: patrones de repetición y de desarrollo.

El estudio de los patrones a nivel escolar puede ser abordado representándolos gráfica o numéricamente, de forma separada o empleando las dos representaciones. Aun cuando se pueda abordar el patrón sólo numéricamente, la representación gráfica del mismo aporta su visualización espacial que en ocasiones conlleva formas con una estructura armoniosa, lo que faculta su aplicabilidad en situaciones prácticas.

Para Devlin (1998) la geometría estudia los patrones en las formas. Los modelos geométricos pueden aparecer como el núcleo de un patrón de repetición o un patrón de desarrollo en formas más complejas.

Un trabajo interesante al respecto realiza Ruiz (2001), en “Números y formas” en el que estudia la relación entre patrones numéricos y geométricos. En él se resalta “la importancia de investigar y la creación de modelos para establecer relaciones, tanto entre aspectos aritméticos y geométricos, como entre las matemáticas y situaciones del mundo real” (p. 449). El profesor Ruiz, destaca el papel importante que juegan las calculadoras gráficas y los ordenadores para visualizar los patrones y establecer conexiones. Una de sus aportaciones más originales es la búsqueda de patrones en tablas numéricas, por ejemplo números poligonales en las tablas de multiplicar, en la tabla del 100, en el triángulo de Pascal, etc.

La representación geométrica nos hace más inteligibles los patrones y los entes matemáticos en general, y concebir y sentir su relación con la naturaleza y las artes desde un ángulo propio, de carácter visual, que nos hace concebir la matemática de forma más atractiva que la representación simbólica de tipo numérica o algebraica. Si bien la representación simbólica es más potente y generalizable para la resolución de problemas, la representación geométrica ofrece una forma más "amigable" de las estructuras matemáticas, una forma de sentir más accesible, que imbuye en las personas unas capacidades sinestésicas de interpretación que enriquecen la inteligibilidad y aplicabilidad de las ideas matemáticas. Trabajar los modelos y patrones favorece la capacidad de resolución de problemas e incrementa la capacidad de comprender e interpretar el mundo desde el punto de vista matemático. No nos sorprende pues, que en determinados ámbitos profesionales como el de los sumilleres, se adopten términos geométricos para caracterizar metafóricamente las cualidades de los vinos (véase tabla 2).

Tabla 2. La geometría del vino

Agudo o anguloso	Vino en el cual domina la aspereza/astringencia por exceso de tanino o tanino inmaduro
Áspero	Vino demasiado tánico
Duro	Vinos con mucho tanino, a veces producto de la juventud del vino
Firme	De buen tanino
Flexible	Redondo, suave
Hueco	Vino con buen sabor inicial y final, pero con falta de tonos entre uno y otro
Largo	Característica positiva de un vino que su sabor perdura
Plano	Sin frescura ni ácido
Redondo	Sin extremos duros, listo para beber
Sólido	Lleno de sustancias, habitualmente vinos con mucho cuerpo

Desconocemos si la geometría del vino ha avanzado más allá de este primer paso en el que aplican términos geométricos de manera aislada para expresar las cualidades de los vinos. Pero el día que los sumillers y enólogos sean capaces de utilizarlos para construir patrones geométricos con los que expresar las cualidades de un vino, habrán encontrado un gran filón para construir y describir los vinos.

Referencias

Botsmanova, E. (1989). El papel del análisis gráfico en la resolución de problemas aritméticos. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 3-4,* 17-21.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-122). Barcelona: HORSORI.

Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico-matemático. En E. Castro y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil.* Madrid: Ediciones Pirámide.

Charentón, A. R. (1930). *Metodología de los problemas.* Madrid: Instituto Samper.

Cuoco, A. A. y Curcio, F. R. (Eds.) (2001*). The roles of representation in School Mathematics. 2001 Yearbook*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Devlin, K. (1998). *El lenguaje de la matemática*. Madrid: Morata.

Fernández, F. (1997). Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Joumal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

González, F., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Interpretación de diagramas de comparación multiplicativa por estudiantes de secundaria. *PNA, 10*(4), 280-306.

Janvier, C. (Ed.) (1987). Problems of representations in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: LEA.

Hardy, G. H. (1992). *A Mathematicians Apology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2011). Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución de un modelo geométrico lineal. *UNION, 25*, 43-61.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA.: NCTM.

Ng, S. F. y Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing andsolving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 282-313.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas.* Mexico: Trillas.

Radford, L. y Grenier , M. (1996). On the dialectical relationships between-symbols and algebraic ideas. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), 20th international conference for the psychology of mathematics education, Vol. 4, 179-186, Universidad de Valencia, Spain

Resnik, M. D. (1999). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Clarendon Press, 1999.

Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. *Science, 240*, 611-616.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14

Ruiz, F. (2000). La Tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ruiz, F. (2001). Números y formas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 449-475). Madrid: Síntesis.