Patrones en números figurados. Aplicación para la enseñanza

Patterns in figurative numbers. Application for teaching

Encarnación Castro Martínez, Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Universidad de Granada

Resumen

En este capítulo presentamos patrones que siguen algunos números figurados, particularizando en los números triangulares como base para el resto de poligonales. Los patrones se consideran de utilidad para la resolución de algunos tipos de problemas y como herramientas para introducir el álgebra escolar, además de manifestar la belleza inherente a la Matemática Discreta. Esta temática se acerca al interés investigador de nuestros compañeros Francisco Fernández y Francisco Ruiz. Francisco Fernández centró sus trabajos en el aprendizaje del álgebra escolar, más concretamente en la resolución de problemas algebraicos en función de diferentes sistemas de representación, y Francisco Ruiz mostró en sus trabajos gran interés por el carácter interdisciplinar de los conocimientos matemáticos y por destacar las relaciones y conexiones entre las matemáticas con otras disciplinas, entre ellas el Arte.

Palabras clave: patrones, números figurados, números poligonales, números triangulares.

Abstract

In this chapter we show patters followed by some figurative numbers, paying attention to triangular numbers like basis for the rest of polygonal numbers. Patterns are considered useful for solving some types of problems as well as for introducing Algebra in elementary school. Moreover, patterns show inherent beauty to Discrete Mathematics. This topic is close to the research interest of our fellows Francisco Fernández and Francisco Ruiz. Francisco Fernández focused his works in learning of Algebra, more concretely in solving algebraic problems by using different representation systems. Francisco Ruiz showed great interest in the interdisciplinar character of mathematical knowledge as well as in emphasizing relations and conections among Mathematics and others disciplines, like Art.

Keywords: patterns, figurative numbers, polygonal numbers, triangular numbers.

Patrones y matemáticas

Los matemáticos de todos los tiempos han sido fascinados por el arte y la ciencia de los patrones (Joseph, 2000). Desde hace algunas décadas, un cierto punto de vista considera la matemática como la ciencia que estudia las regularidades, y que identifica la matemática como la ciencia de los patrones y el orden (Devlin, 1994; Steen, 1988). Goldin (2002) indica que las matemáticas tratan de la descripción sistemática del estudio de patrones y para Orton (1999) buscar una regularidad, un patrón, una regla, es una de las acciones que se realizan generalmente en matemáticas. Steen (1998) establece la siguiente analogía: así como la biología es la ciencia de la vida y la física la ciencia de la energía y la materia, la matemática es la ciencia de los patrones. La identificación de un patrón apropiado en el comportamiento de la naturaleza permite predecir lo que ocurrirá en un futuro, lo cual otorga a las matemáticas una extraordinaria utilidad (Steen, 1998). El poder de la matemática radica en relaciones y transformaciones que dan lugar a patrones y generalizaciones (Warren, 2005). Patrones y relaciones surgen en todas las ramas de las matemáticas ya sea números, álgebra, geometría, probabilidad o estadística.

Patrones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La literatura ofrece varias definiciones de patrones, la idea básica implícita en esta noción es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón (Castro, 1995). Según Guerrero y Rivera (2002), patrón es una regla entre elementos u objetos matemáticos como números, formas. Papic y Mulligan (2005) definen patrón como una regularidad espacial o numérica. Un patrón matemático puede ser descrito como cualquier regularidad predecible que, por lo general, impliquen operaciones numéricas, espaciales o relaciones lógicas (Mulligan, 2010).

Los patrones que expresan relaciones y funciones, a menudo, se presentan gráficamente, verbalmente, numéricamente o analíticamente, a través de tablas, gráficos o fórmulas. La mayoría puede representarse en varias formas. De hecho, los patrones relacionados con las matemáticas a menudo son más eficaces si hay interacción entre estas múltiples representaciones (Steen, 1988).

Los patrones se asocian comúnmente al pensamiento algebraico debido a la presencia en ellos de la abstracción y la generalización (Barbosa y Vale, 2015). Permiten la transición al Álgebra mediante el establecimiento de relaciones de tipo funcional (Zazkis y Liljedahl, 2002). Pueden servir como contexto para la introducción de diferentes formas de expresiones algebraicas sobre la misma relación y percibir que tales relaciones pueden ser descritas correctamente de diferentes maneras. El trabajo con patrones permite la formulación y justificación de las generalizaciones y el uso de estas generalizaciones para hacer predicciones (Mason, Johnston-Wilder y Graham, 2005). La función recursiva, generalmente asociada a los patrones, es considerada una potente vía de expresar relaciones y analizar propiedades de los procesos matemáticos.

Las siguientes acciones, ligadas a los patrones, son señaladas por Steen (1988) y constituyen la descripción misma de lo que significa hacer matemáticas (Liljedahl, 2004):

- *Reconocer:* Descubrir situaciones matemáticas en diversos contextos;
- *Visualizar:* Ver patrones en datos y en situaciones no matemáticas;
- *Verbalizar:* Expresar en palabras la naturaleza de los patrones percibidos por la vista;
- *Simbolizar:* Formalizar en símbolos matemáticos las relaciones encontradas en los patrones;
- *Analizar:* Relacionar un patrón con otro, y predecir nuevos patrones.

Atendiendo a diferentes criterios, se consideran distintos tipos de patrones. Así, dependiendo de los elementos que lo forman, el patrón puede ser numérico o geométrico; según la forma de presentarse, pueden hacerse mediante representación simbólica (es el caso de los numéricos) o con imágenes (caso de las geométricas) que potencian la visualización, entendida esta como procesos de construcción y transformación de imágenes y todas las inscripciones de naturaleza espacial que puedan estar implicadas al hacer matemáticas (Presmeg, 2006); por su formación, pueden ser de repetición (un motivo se va repitiendo en la formación de la secuencia) y de desarrollo o crecimiento (los elementos de la secuencia crecen de uno término al siguiente).

Para que un patrón sea de tipo numérico, el hecho de estar formado por números es condición necesaria pero no suficiente. Para ser considerado numérico un patrón ha de cumplir además que el valor de los diferentes elementos sea relevante en la sucesión. Es decir, el patrón no ha de poder ser transferido a un patrón no numérico, sin pérdida de alguna propiedad crucial del mismo. Por ejemplo, el patrón *1, 2, 3, 4, 3, 2, 1* es transferible a *abcdcba* y, por lo tanto, no es un patrón numérico sino un patrón usando números como elementos individuales. Por lo general, los patrones repetitivos construidos a partir de números no se consideran patrones numéricos ya que pueden ser transferidos a una representación no numérica. Ejemplos de patrones numéricos son los de la figura 1:

1, 1, 2, 3, 5, 8,…;   1, 4, 8, 13, 19,…;   1, 3, 6, 10, 15,...;   1, 4, 9, 16, 25,...

Figura 1. Secuencias de números que siguen un patrón numérico

Todos los tipos de patrones contribuyen al desarrollo del razonamiento matemático, pero los patrones numéricos de crecimiento conducen, de forma más natural, al descubrimiento de una relación entre dos cantidades variables, facilitando así el razonamiento funcional (Rivera y Becker, 2008).

Números figurados

Los números figurados son números que pueden ser representados por una disposición geométrica regular o secuencia de puntos (u objetos discretos) uniformemente espaciados (figura 2). Si la representación corresponde a un polígono se trata de números poligonales y su nombre vendrá dado por el polígono correspondiente (triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.); si corresponde a una figura tridimensional, su nombre depende de la figura de la cual se trate (piramidal triangular, piramidal cuadrangular, cúbico, etc.).

Los números figurados, que suelen asociarse con figuras de 2 o 3 dimensiones, pueden generalizarse a dimensiones más altas. Forman secuencias numéricas de crecimiento cuya representación puede hacerse simbólicamente o gráficamente, y presentan patrones numéricos, o secuencias en la formación de cada figura a partir de la anterior, como se muestra en la figura 2.

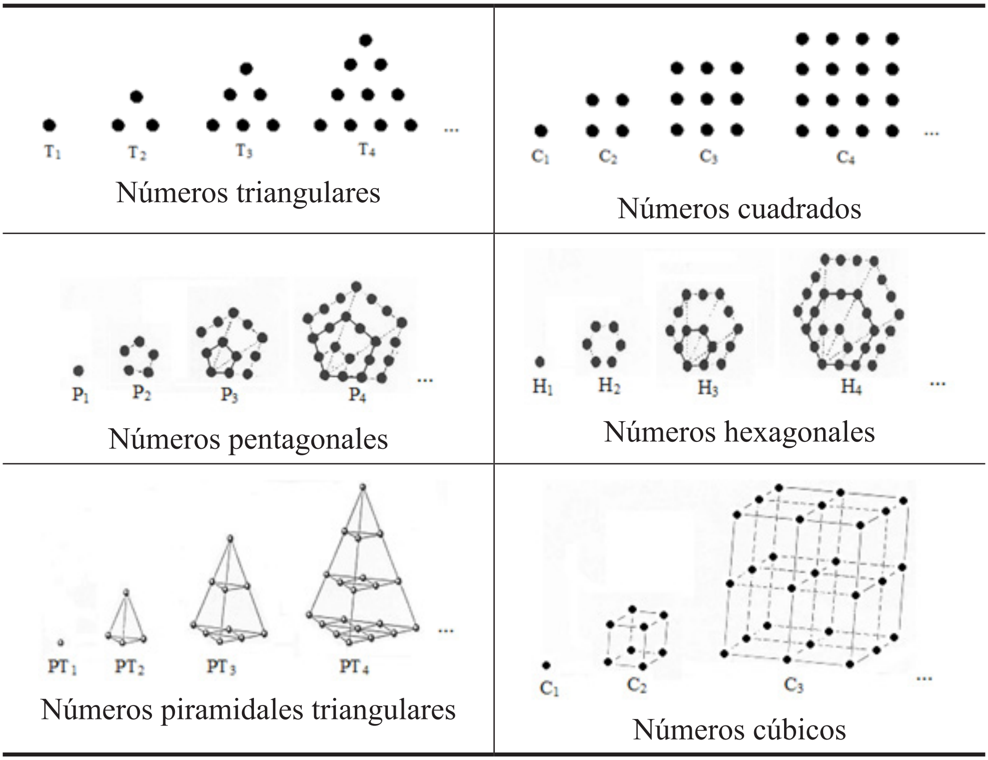

Figura 2. Números figurados

Números triangulares

De la representación poligonal-puntual de los números triangulares (figura 2) se desprende un patrón en la formación de dichas figuras, consiste en agregar al anterior una fila de puntos con un punto más que la fila anterior.

La expresión numérica de esta sucesión es:

$$T_1 = 1; \quad T_2 = 1+2 = 3; \quad T_3 = 1+2+3 = 6; \quad T_4 = 1+2+3+4 = 10 \ldots$$

Donde 1, 3, 6, 10… es una sucesión de números triangulares dada por el patrón: *Sumar tantos números naturales consecutivos como indica el término de la sucesión*.

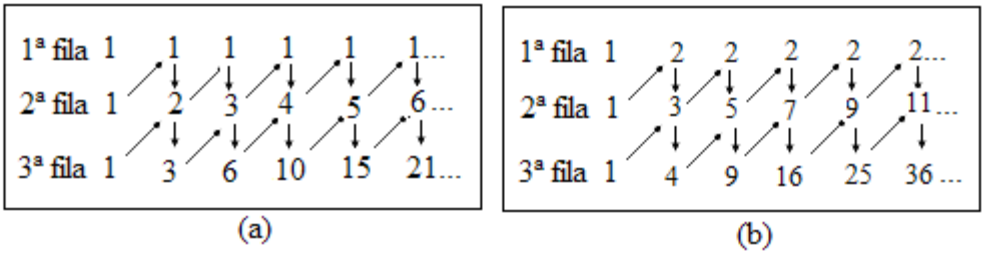

Figura 3. Algoritmo para la construcción de números triangulares y cuadrados

Mediante un algoritmo como el que se recoge en la figura 3(a), basado en el teorema de las diferencias finitas, se pueden conseguir tantos números triangulares como se quiera.

La construcción del algoritmo es como sigue: (i) se escribe una primera fila como sucesión constante de 1; (ii) la segunda fila se construye poniendo 1 en primer lugar, el siguiente número se obtiene sumando este número y el que tiene a su derecha en la fila superior (en el recorrido que indican las flechas); (iii) se repite este procedimiento en toda la fila. Para la tercera fila, se sigue este mismo proceso. En esta tercera fila se obtienen los números triangulares. Si se pone una fila más y se repiten los mismos pasos, en la cuarta fila se obtienen los números piramidales triangulares.

La expresión del término general de la sucesión de los números triangulares es $T_n = \frac{1}{2}\,n(n+1)$. Dicha expresión puede obtenerse por diferentes métodos, recogemos a continuación el método que utiliza la representación puntual.

Consideramos dos secuencias de número triangulares y las unimos como indica la figura 4.

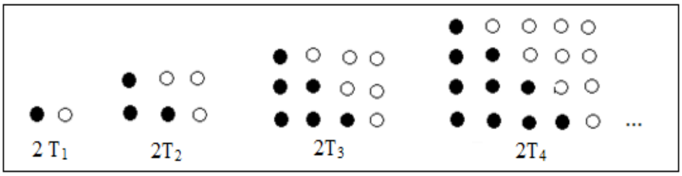

Figura 4. Unión de dos números triangulares del mismo orden.

Se forma una secuencia de números rectangulares en la que cada elemento es el doble del número triangular del mismo orden. El número de puntos de cada uno de estos rectángulos se obtiene como producto del número de puntos que hay en cada lado. Simbólicamente se escribe:

$$2T_1 = 1\times2 = 2;\ 2T_2 = 2\times3 = 6\ ;\ 2T_3 = 3\times4 = 12;\ 2T_4 = 4\times5 = 20;\ \ldots;$$

$$2T_n = n \times (n + 1)$$

De donde $T_n = \frac{1}{2}\, n(n + 1)$.

Los números triangulares, y el término general de su secuencia, proporcionan la base para llegar a conocer el término general de las sucesiones de los otros números figurados y también para resolver algunos tipos de problemas, como vemos seguidamente.

Números cuadrados

La figura 2 muestra los números cuadrados. Se percibe que el patrón para construir los sucesivos cuadrados consiste en ir añadiendo una fila y una columna (una escuadra) de puntos, a la figura anterior. Numéricamente esta secuencia se escribe:

$$C_1 = 1;\ C_2 = 1+3 = 4;\ C_3 = 1+3+5 = 9;\ C_4 = 1+3+5+7 = 16;\ldots$$

que constituye la sucesión de los números cuadrados 1, 4, 9, 16…; cuyo patrón es: *cada número cuadrado es la suma de tantos números impares como indica su orden*.

Como ocurriera para los números triangulares, también en el caso de los cuadrados se puede utilizar el algoritmo de la figura 3(b) para obtener números cuadrados en la tercera fila del algoritmo.

Aunque la expresión general de un cuadrado es conocida —n^2, se puede llegar a obtener dicho término general a partir de considerar que todo número cuadrado es equivalente a dos triangulares, uno de ellos del mismo orden que el cuadrado y otro de un orden menor, como se muestra en la figura 5.

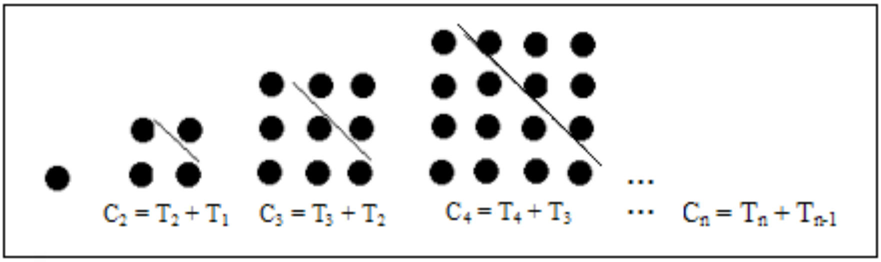

Figura 5. Número cuadrado como suma de dos números triangulares

Así: $C_n = T_n + T_{n-1} = \frac{1}{2} n(n + 1) + \frac{1}{2} (n - 1)n = n^2.$

Números Poligonales P_r^2

El término general para cada una de las sucesiones de números poligonales se puede hallar por descomposición del mismo en triangulares (análogamente a lo hecho para los cuadrados). Así en la figura 2 se percibe que para los números pentagonales se cumple que:

$$P_3 = T_3 + 2T_2;\ P_4 = T_4 + 2T_3;\ \ldots,\ P_n = T_n + 2T_{n-1}$$

lo cual llevaría a la siguiente expresión:

$$P_n = \frac{1}{2}\,n(n+1) + 2\frac{1}{2}\,(n-1)n = \frac{1}{2}\,n(3n-1)$$

De forma similar, para los números hexagonales: $H_n = T_n + 3T_{n-1}$; luego, $H_n = \frac{1}{2}\,n(4n-2)$.

Repitiendo este proceso y siguiendo el patrón que indica que cualquier número poligonal se puede considerar suma de un triangular del mismo orden más tantos triangulares de un orden menor como indica su orden menos tres, se llega a la información presentada en la tabla 1, la cual recoge una variedad de sucesiones, tanto en sus filas como en sus columnas, cada una de ellas presentan un patrón numérico.

Tabla 1. Sucesiones de números poligonales y sus términos generales

Lados	Nombre	Número de orden						
		1	2	3	4	5	…	n
3	Triangular	1	3	6	10	15		$\frac{1}{2}\,n(n+1)$
4	Cuadrangular	1	4	9	16	25		$\frac{1}{2}\,n(2n-0)$
5	Pentagonal	1	5	12	22	35		$\frac{1}{2}\,n(3n-1)$
6	Hexagonal	1	6	15	28	45		$\frac{1}{2}\,n(4n-2)$
7	Heptagonal	1	7	18	34	55		$\frac{1}{2}\,n(5n-3)$
	…							
r	r-gonal r ≥ 2	1	r	3(r – 1)	2(3r – 4)	5(2r – 3)		$\frac{1}{2}\,n[(\mathrm{r}-2)n-2(\mathrm{r}-2)]$

Por lo que la fórmula general para obtener un número poligonal es:

$$P_r^2 = \frac{1}{2}\, n[(r-2)n - 2(r-2)$$

donde r es el lado del polígono, y n es el número de orden que ocupa el número en la secuencia.

Algunos problemas a resolver a partir de los números triangulares

Hay un tipo de problemas que se puede resolver, rápidamente, utilizando un proceso inductivo (Cañadas y Castro, 2014), conociendo los números triangulares y el término general de la sucesión que forman. Por ejemplo:

> Si se dibujan n puntos en un círculo y se unen con líneas rectas de todas las formas posibles, ¿cuántos segmentos se trazan? (La figura 6 muestra cómo quedaría unidos 13 puntos en un círculo).

Siguiendo el razonamiento inductivo, comenzando con dos puntos y aumentando progresivamente el número de estos, se obtiene la tabla 2 que relaciona el número de puntos tomados en el círculo con el número de segmentos obtenidos.

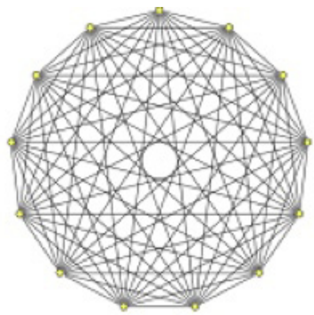

Figura 6. Unión de trece puntos en un círculo

Tabla 2. Puntos y segmentos

Puntos	Segmentos
2	1
3	3
4	6
5	10
n	$\frac{1}{2}n(n-1)$

De este mismo tipo son los siguientes problemas:

> Una clase de 20 niños, el primer día después de las vacaciones, se saludan dándose la mano todos entre sí, ¿Cuántos apretones de mano se han dado?

Tanto los objetos a unir como los contextos del problema pueden variar. Así pueden ser felicitaciones de Navidad entre un grupo cerrado de personas, un conjunto de pueblos los cuales se quieren unir por carretera de todas las formas posibles, etc.

Otros problemas a los que se les puede encontrar solución mediante el uso de los números triangulares son:

- En un conjunto de n números consecutivos, ¿cuántos subconjuntos contienen sólo números consecutivos?
- En una secuencia de números, ¿cuántas formas hay de insertar un par de corchetes?
- En una trama rectangular de dimensiones $m \times n$, ¿cuántos rectángulos se ven?

Conclusión

Actualmente se considera la actividad matemática como el dominio del razonamiento sobre los objetos y sus relaciones. Esto obliga a que la enseñanza de las matemáticas deba tener entre sus prioridades fomentar las generalizaciones y las acciones asociadas a las mismas, como son la justificación de la generalización, así como su expresión en lenguaje matemático. En esta actividad, el papel de los patrones como herramientas pedagógicas no puede pasarse por alto. Los patrones que hemos presentado anteriormente son considerados pruebas de las generalizaciones que presentan. Permiten demostrar una propiedad matemática a partir de una colección finita de formas. Explorar este tipo de patrones lleva a encontrar una relación entre los distintos elementos de la secuencia y su posición en la misma. Esta relación se puede utilizar para hacer una generalización, para generar elementos en otras posiciones (Barbosa & Vale, 2015), algunos de ellos ocultos en la sucesión. Las tareas en las que intervienen patrones pueden ser un poderoso vehículo para la comprensión de las relaciones entre las cantidades que subyacen en dichos patrones, contribuyendo así a la creación de relaciones de tipo funcional (Warren, 2005).

Los patrones asociados a los números poligonales pueden trabajarse en todas los niveles educativos. En infantil y primeros cursos de primaria mediante material manipulativo como aparece en la figura 7. Posteriormente, mediante las representaciones puntuales y llegando hasta obtener el término general de los más familiares. Un conocimiento de los números triangulares como se tiene de los cuadrados puede ayudar a los estudiantes a resolver problemas sencillos como los propuestos, antes de conocer la combinatoria.

Figura 7. Representación de números triangulares y cuadrados con cubos encajables

Referencias

Barbosa, A. y Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network. 10*(57-70).

Cañadas, C. y Castro E. (2004). Razonamiento Inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. En E. Castro y E. De la Torre, (eds.). *Octavo Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática. Investigación en Educación Matemática* (pp. 173-182). La Coruña.

Castro, E. (1995). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: the science of patterns. The search for order in life, mind and the universe*. New York: Scientific American Library.

Guerrero, L., y Rivera A. (2002). Exploration of patterns and recursive functions. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (24th, Athens, Georgia, October 26-29), 1-4. 262-272.

Goldin, G.A. (2002) Connecting Understandings from Mathematics and Mathematics Education Research. In A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 161-166). Norwich, England: Program Committee.

Joseph, G.G. (2000). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics*. (2nd ed.). London: Penguin.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on learning problems in mathematics, 26*(3), 24-42.

Mason, J.G.A. y Johnston-Wilder, S. (2005) *Developing Thinking in Algebra*. London, UK: The Open University.

Mulligan, J. (2010). *Reconceptualising early mathematics learning*. Consultado el 03/04/2017 en http://research.acer.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1075&context=research_conference

Orton, A. (1999). *Pattern in Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassel.

Papic, M., y Mulligan, J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. *In The Proceedings of the 28th Mathematical Education Research Group of Australasia Conference* (pp. 609-616).

Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, (pp. 205-235).

Rivera, F.D., y Becker, J. R. (2008). *Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. ZDM, 40*(1), 65-82.

Steen, L.A. (1988). The Science of Patterns. *Science 240* (pp. 611-616).

Steen, L.A. (1998). Reflections on Mathematical Patterns, Relationships, and Functions. *Prepared for the Minnesota K-12 Mathematics Framework, SciMath-MN*. Minnesota Department of Children, Families, and Learning.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. *In Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4* (pp. 305-312).

Zazkis R., y Liljedahl P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics, 49*(3), 379-402.