Poliedros Modulares

Modulars polyhedres

Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada

Resumen

La geometría tridimensional resulta difícil pero muy plástica. Identificar poliedros, construirlos mediante objetos sencillos y analizar nuevas formas de construcción, es una práctica importante para su aprendizaje. Este artículo presenta una actividad consistente en examinar poliedros construidos mediante materiales sencillos, fácilmente trasladables a las aulas, para desarrollar el sentido espacial de los alumnos. El estudio de los poliedros se realiza en tres etapas: a) identificar poliedros en figuras, b) construir poliedros con objetos simples, y c) analizar las cualidades de los módulos, examinando cómo cambiar las características de los módulos para obtener nuevos poliedros. Tras recopilar diversas fuentes y recursos, nos decantamos por el plástico, material fácil para el profesor. Con estas atendemos dos dimensiones del sentido espacial: características y propiedades geométricas de poliedros y habilidades de visualización.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, sentido espacial, poliedros, recursos

Abstract

3D geometry seems very difficult but extremely malleable. Identifying polyhedra, building them by using simple objects as well as analyzing new ways of construction, is an important practice for its learning. This article presents an activity aimed at developing students' spatial sense. The activity consists in examining modular polyhedra built from simple materials, which are easily transferable to classrooms. The study of polyhedra is done in three stages: a) Identifying polyhedra embedded in objects; b) building polyhedra with simple objects, and c) analyzing the features of the modules, examinining how to change the characteristics of the modules to obtain new polyhedra. After collecting several sources and resources, we opted for plastic, accessible material for teachers. With all of this we explore two dimensions of spatial sense: characteristics and properties of polyhedra and visualization skills.

Keywords: Education, Mathematics, Spatial sense, polyhedra, resources.

Introducción

La divulgación matemática ha estado presente en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y a ella ha colaborado de manera patente los homenajeados por este libro, Francisco Fernández y Francisco Ruiz. En recuerdo de las numerosas experiencias compartidas, he aprovechado un campo en el que "Paco Ruiz" ha sido un estudioso, los poliedros, para hacer una recopilación y avance que se centran en la construcción y el estudio de poliedros que puedan realizarse a partir de elementos simples. Siguiendo su ejemplo, he continuado la recopilación de poliedros construidos con objetos familiares. La búsqueda en la red ha facilitado el acceso para ampliar lo que ya es conocido y expuesto en el seminario del departamento. Paco me hizo conocer creadores, artistas plásticos que conjugaban el arte y la matemática. En este artículo difundo varios artistas menos conocidos que contribuyen a esta idea, artistas que tienen un gran sentido espacial. El artículo comienza presentando algunos poliedros originales, formados con materiales fáciles. Posteriormente presenta un taller para la construcción y estudio de poliedros modulares, construidos a partir de una figura que puede hacerse en materiales sencillos, cartón o plástico.

Poliedros originales

En el seminario del departamento están presentes desde hace tiempo los poliedros construidos a partir de diversos materiales. Los modelos en plástico y madera, se vieron ampliados con troquelados en cartón, varillas con engarces, piezas de Polydron y, más recientemente, los formados por imanes. Paco tenía siempre en su despacho poliedros construidos con cartulina, que aún se conservan en el expositor, así como los formados por papel plegado (figura 1).

Un descubrimiento interesante fueron los poliedros articulados (figura 2), que cambian de forma, apreciándose poliedros diferentes según estén cerrados o abiertos. Estudiar qué poliedro aparece en posición de reposo o en su "explosión" es una tarea interesante que obliga a poner en juego diversas componentes del sentido espacial, como el manejo de formas geométricas y habilidades como la constancia de la percepción de figuras.

Figura 1. Poliedros en Departamento

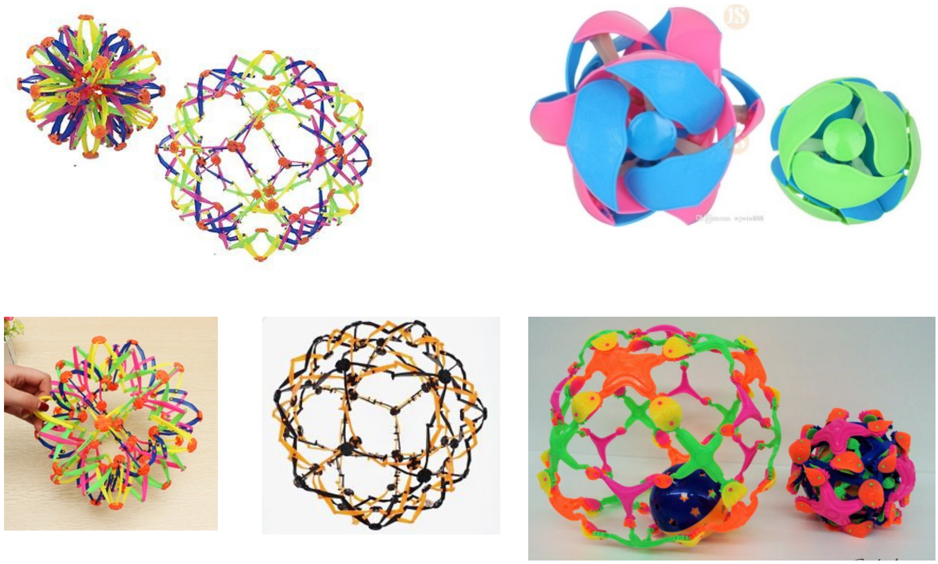


Figura 2. Poliedros articulados

Muchos poliedros originales se encuentran en la red. Muchos poliedros originales se pueden encontrar en internet. En la figura 3 aparecen poliedros formados por tijeras, clips (del escultor Viktor Genel[1]), piezas y monedas, naipes doblados, piezas de madera, entre otros. Todos ellos constituyen aportes novedosos que se prestan a ser examinados para identificar cualidades que no resultan evidentes.

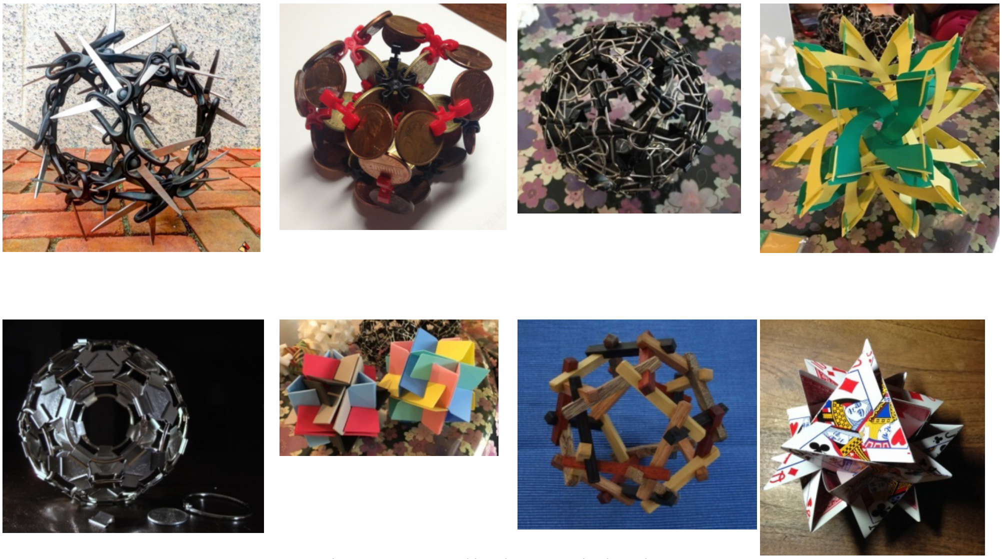


Figura 3. Poliedros originales

Taller de estudio y construcción de poliedros

Tanto en la figura 2 como en la 3 aparecen poliedros, generalmente mostrados a partir de su esqueleto (las aristas). Examinar qué poliedro forman estas aristas requiere disponer o contribuir a desarrollar el sentido espacial (Flores, Ramírez y Del Río, 2015). Para poder identificarlos hay que poner en marcha los conocimientos geométricos para identificar elementos de los poliedros reflejados en las figuras, lo que supone recordar sus cualidades, nombres, etc. Pero también se ponen en juego habilidades

[1] https://www.facebook.com/viktor.genel

de visualización (Del Grande, 1990), especialmente dos coordinadas, la percepción figura-contexto y la percepción de relaciones espaciales. La primera ayuda a seleccionar los elementos que pueden formar el poliedro en el contexto de la figura completa. La percepción de las relaciones espaciales se requiere para identificar cualidades del poliedro que se reflejan en estos elementos (paralelismo de aristas, orden de los vértices, etc.). Para desarrollar el sentido espacial se requiere estimular la realización de estas identificaciones, ponerlas en común, atender a identificaciones que realicen otros compañeros y examinar todas las posibles. Es por esto que consideramos que la tarea de identificación de poliedros sobre elementos plásticos es una tarea matemática especialmente adecuada para realizar en un taller. Describimos a continuación las tareas que se afrontarían en un taller de geometría, que pretende desarrollar el sentido espacial.

Examinar poliedros

Para examinar y valorar si aparece un poliedro en una figura que lo sugiere deberemos basarnos en identificar sus elementos, seleccionando los vértices y aristas, para luego contar el orden de cada vértice y abstraer los elementos que se pueden considerar aristas. El ejemplo de la figura 4, formado por módulos en forma de estrella de 5 y 6 puntas (círculos en los que se ha cortado un radio, para producir el enlace entre módulos), parece estar formado por caras pentagonales y hexagonales. Si nos fijamos en el poliedro resultante encontraremos que cada círculo del polígono conecta sólo con otro círculo del polígono adyacente, con lo que tendríamos vértices de orden 1, lo que no es posible. Tenemos entonces que cambiar nuestra mirada y apreciar que sólo si consideramos el centro de la estrella pentagonal/hexagonal como vértice, de orden 5 y 6, podemos interpretar la figura como un esqueleto del poliedro, en el que los brazos de los módulos son mitades de aristas. De esta forma veremos que tenemos un icosaedro truncado.

Observemos que para llegar a esta consideración hemos tenido que prescindir de la anchura de las aristas, de la materialización tan burda de los vértices (no son puntos, sino formas en las que intuimos el centro geométrico como vértice), y de que las aristas no son planas, sino circunferencias máximas, lo que le da el aspecto de figura redonda (lo que es

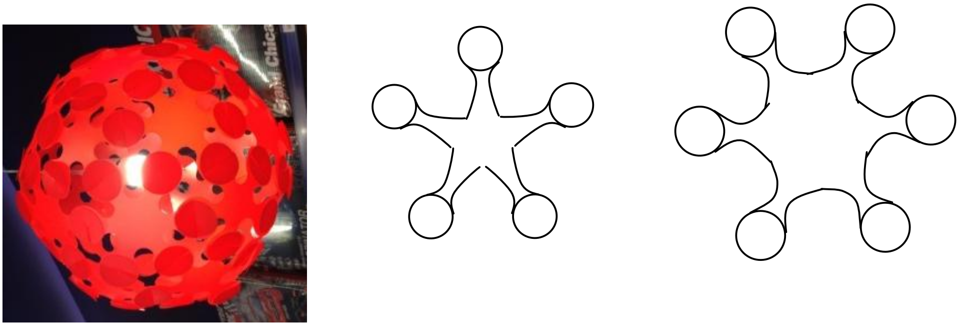


Figura 4. Poliedro y módulos

familiar, ya que el icosaedro truncado es uno de los modelos en los que se ha basado el diseño tradicional de los balones de fútbol).

Un ejemplo claro de esta dificultad de identificación es el que sucede al buscar es el poliedro que se refleja en la figura 5 (lámpara IQLight*[2]). La lámpara está formada por piezas plásticas que sugieren un paralelogramo, pero que finalmente se convierten en rombos, como se aprecia en la figura 5. La forma básica de este poliedro es una pieza con perímetro curvo, aunque lo que interesa es la forma que se determina entre los puntos de contacto, que forman un rombo.

En su página web informan que la lámpara IQlight® system fue creada en 1973 por el diseñador danés Holger Strøm, quien ha diseñado diversos materiales a partir de cartón corrugado (empaquetamientos, sistemas para las exposiciones, muebles y juguetes). La pieza de la lámpara está realizada en plástico con cierta rigidez, aunque permite que pueda alabearse.

Identificar este poliedro es un ejercicio interesante. Una primera mirada nos lleva a apreciar rombos unidos por vértices de orden 3 y 5, formando un Triacontaedro rómbico (Guillén, 1997). Este poliedro es un sólido de Catalán dual del icosidodecaedro, un zonoedro con un ángulo agudo de 63,43°.

[2] Lámpara IQLight*, www.iqlight.com

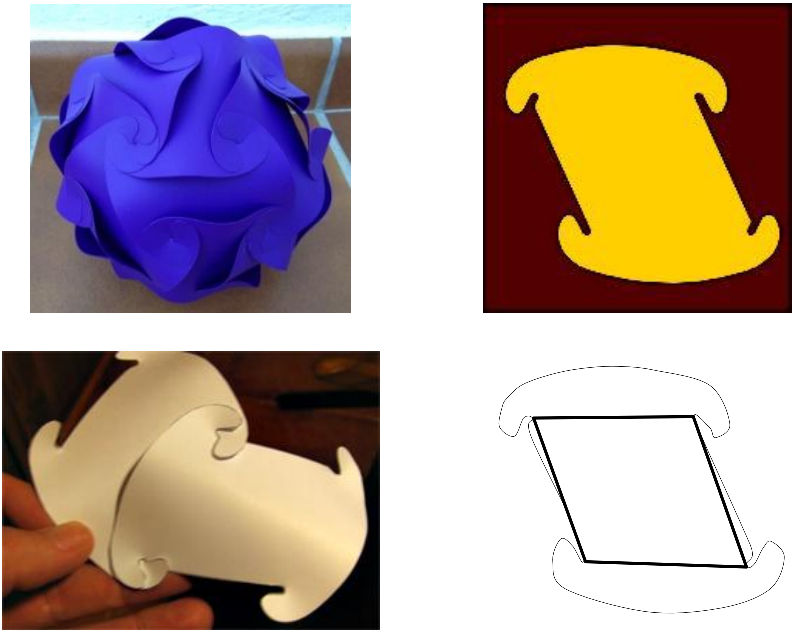


Figura 5. Lámpara IQLight*

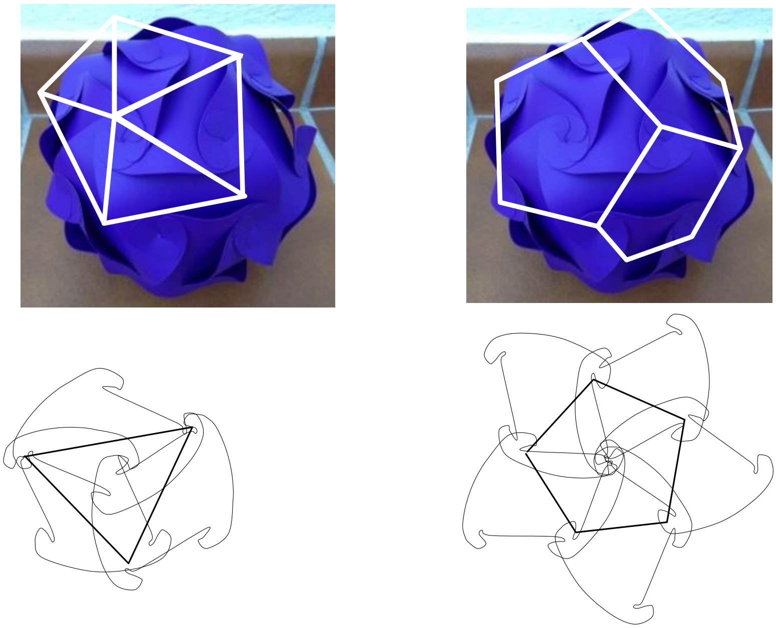


Figura 6. Icosaedro y dodecaedro

Podemos apreciar otros poliedros si nos fijamos solamente en los 12 vértices de orden 5, en el que concurren 5 medios rombos (triángulos), formando un icosaedro. O bien fijarnos en los 20 vértices de orden 3, que forman el dodecaedro (figura 6).

Construir poliedros

La versatilidad de las piezas de IQLight nos anima a construir otros poliedros. Ya en la publicidad del producto aparecen una serie de construcciones, con una cantidad de piezas que van desde 9 hasta 120. En la página web de este producto aparecen elementos geométricos, señalando tanto los poliedros platónicos, como los arquimedianos. Sin embargo no aparece la relación que la lámpara guarda con estos poliedros. Lo que interesa especialmente en el folleto que acompaña a la lámpara es la codificación que permite al constructor generar cada una de las formas que se indican.

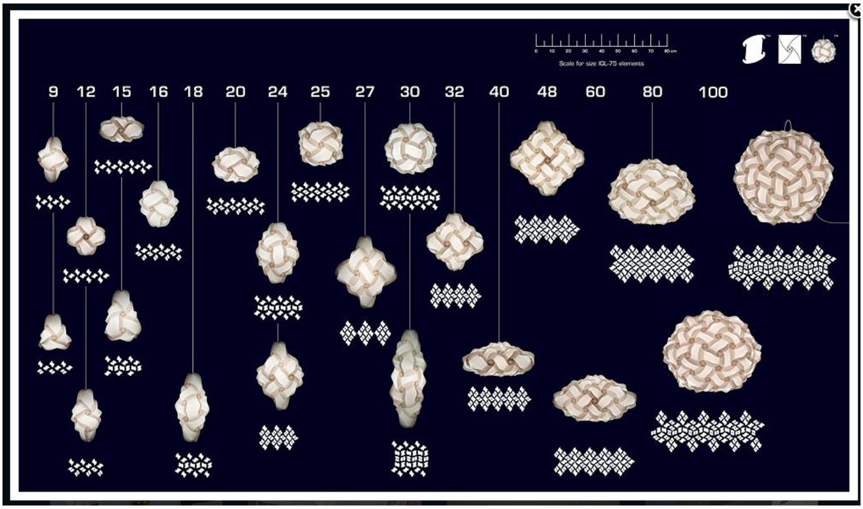


Figura 7. Otras formas con las piezas y esquemas de colocación de los módulos[3]

[3] http://www.iqlight.com/gallery.php

La primera construcción que nos sugiere es la de otros poliedros regulares. La visión en fotografía nos anima a pensar que entre estas formas aparecen nuevos poliedros regulares. Tiene que ser la construcción física la que nos permita apreciar estas posibilidades.

Figura 8. Tetraedro regular y Octaedro regular

Efectivamente con 6 piezas se forma un tetraedro, en el que el triángulo equilátero de cada cara está formado por tres triángulos medios rombos, los que resultan de dividir el rombo por la diagonal larga. Para ello cada cara tiene en su centro un vértice de orden 3, en el que se juntan los tres vértices de los rombos. Para hacer el tetraedro se requiere una deformación de la pieza, doblándose justamente por la diagonal larga.

También se puede formar el octaedro juntando los mismos triángulos anteriores, necesitando 12 piezas. En el octaedro, los 8 triángulos que forman sus caras están formados por tres medios rombos, que guardan en su centro un vértice de orden 3.

La duda que surge es si podrá formarse el cubo, con lo que se formarían todos los poliedros regulares. Para lograrlo tenemos hay que generar caras cuadradas, haciendo recopilación de lo obtenido hasta ahora, estudiando cómo se forman las caras de los poliedros regulares. En la figura 9 se puede apreciar que los triángulos se forman por tres triángulos obtusángulos, mitades del rombo obtenidos por la diagonal grande. El pentágono se forma por la unión de cinco triángulos acutángulos, mitades del rombo por la diagonal corta. Naturalmente si los ángulos obtusos de los rombos tienen aproximadamente 120º, los cinco triángulos (de casi 60º) no pueden cubrir el plano para sobre ellos formar el pentágono, sino que forman una pirámide pentagonal, con lo que el dodecaedro será estrellado. Usando esta misma técnica, se podría intentar construir un cubo, mediante los cuatro medios rombos acutángulos, formando una pirámide cuadrada en cada cara del cubo. La realización con las piezas (originales o con diferente grado de flexibilidad), muestra que el supuesto “cubo estrellado” que aparece es el que hemos llamado octaedro, pues los vértices en los que concurren los cuatro ángulos agudos sobresale especialmente sobre los vértices de orden tres en que concurren los ángulos obtusos, no dejando ver los supuestos vértices del cubo. La dualidad que apreciábamos entre icosaedro y dodecaedro, en este caso nos lleva también a tener que ver el cubo y el octaedro sobre la misma figura.

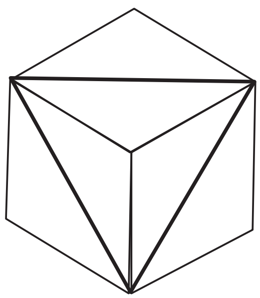
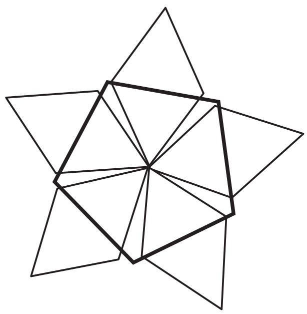


Figura 9. Icosaedro, tetraedro y octaedro



Dodecaedro

Una supuesta alternativa consiste en juntar cuatro triángulos obtusángulos para formar cada cara del cubo, dejando los acutángulos para formar los vértices, con un orden tres. El problema en este caso es que la suma de los cuatro ángulos obtusos supera los 360º, produciendo, teóricamente, un poliedro cóncavo en la confluencia de los centros de sus caras. En la práctica, comprobado tanto con las piezas originales de la lámpara, como con otros materiales, resulta imposible hacer concurrir cuatro triángulos obtusángulos en un vértice. Como vemos, el estudio debe continuar examinando la pieza, estudiando las posibilidades que presenta el material utilizado, cambiando este material o la forma de piezas.

Estudio de las piezas

La pieza tiene una forma mixta, con dos partes curvas, que corresponden a la parte que abrazará a otra pieza, y 4 segmentos, aparentemente iguales dos a dos. Para estudiar la pieza la hemos importado en Geogebra y hemos identificado con cierto nivel de precisión los puntos en los que unas piezas encajan con otras. Así se ha determinado el cuadrilátero (GIJL) que forman estos puntos, así como el hexágono (GHIJKL) en que está integrado.

Geogebra nos ha suministrado unas medidas de ángulos y distancias que nos hacen pensar que detrás de esta figura hay un rombo (una diferencia de 6 y 2 mm en el dibujo nos hace achacarlo a la identificación de los puntos, más que al diseño de la pieza), con ángulos de aproximadamente 68º y 112º, respectivamente.

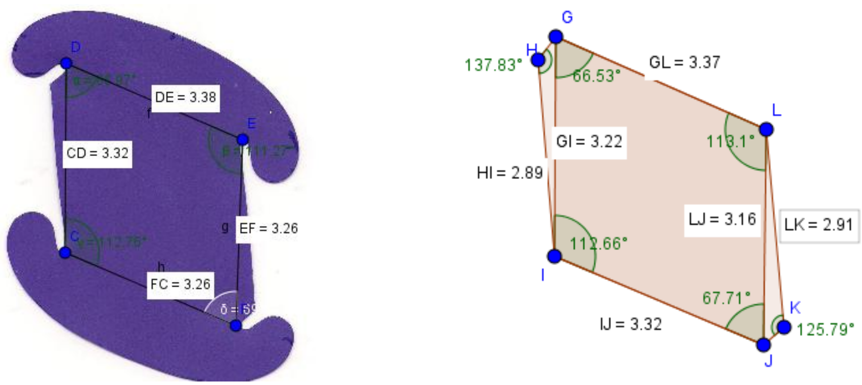


Figura 10. La pieza


Figura 11. Tres piezas

Los datos empíricos nos hacen presumir que los cuadriláteros son rombos, próximos al doble triángulo equilátero, aunque no hay ángulos de 60º y 120º. En la figura 11 vemos tres piezas unidas por los ángulos obtusos, en la que comprobamos que encajan las aristas (la que abraza y la que recibe), confirmándonos que el polígono central se aproxima al rombo, pero también que las tres piezas no generan una pieza plana.

Ya podemos afirmar que el efecto alabeado de la lámpara se consigue debido a tres circunstancias: que los ángulos suman menos de 360º, que existen lados pequeños que transforma el rombo en un hexágono interior y la inclinación de los planos de dos piezas contiguas.

El estudio nos ha permitido apreciar que las dimensiones la pieza deben estar en consonancia con las pretensiones de construcción. Haría falta estudios de materiales para comprender la medida que se le ha dado a los segmentos del hexágono, y su relación con el material empleado, para favorecer que las piezas no se salgan en el poliedro de 30 caras, y la versatilidad que presenta para figuras de mayor número de lados. Esto nos permitiría comprender sus limitaciones, por ejemplo para construir el cubo.

Cierre

Este trabajo muestra la riqueza de aspectos que pueden desarrollarse profundizando sobre algo tan aparentemente sencillo como la construcción de poliedros. Se abren muchas vías de indagación, como estudiar qué cambios podemos hacer en la pieza para construir todos los poliedros regulares. Pero también nos queda pendiente examinar qué otros poliedros se identifican en las otras lámparas del catálogo, qué poliedros arquimedianos se aprecian, por ejemplo. Estamos seguros de que Francisco Ruiz y Francisco Fernández nos ayudarían y disfrutarían en este estudio.

Referencias

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher, 37* (6), 14-20.

Flores, P., Ramírez, R., del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 127-145). Madrid, Pirámide.

Guillén, G. (1997). *Poliedros.* Madrid, Síntesis.

Strøm, H. (1973) *IQlight® system*. www.iqlight.com