Oh tú que indicas tan bien las horas, ¿cuántas han pasado desde esta mañana? Problemas descriptivos de fracciones[1]

Oh you who indicate the hours so well, how many hours have passed since this morning? Descriptive problems of fractions

Bernardo Gómez y Luis Puig
Universitat de València

Resumen

Se presenta un estudio sobre los problemas descriptivos de fracciones. Son problemas verbales de larga tradición histórica que han tenido gran importancia en el desarrollo del pensamiento aritmético. El objetivo de este trabajo es contribuir a recuperar estos problemas desde una perspectiva global, dando cuenta de sus enunciados, métodos de resolución y las lecturas analíticas que ha transmitido la tradición escolar.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, fracciones, problemas, métodos

Abstract

This paper presents a study about descriptive word problems of fractions. They are word problems of long historic tradition that have had great importance in

1 Este trabajo ha contado con el apoyo de los proyectos concedidos por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (EDU2015-69731-R, MINECO / FEDER) y la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana (GVPROMETEO2016-143).

the development of the arithmetical thought. The aim of this work is to contribute to recover these problems from a global perspective, giving an account of their statements, methods of resolution and the analytical readings that the school tradition has transmitted.

Keywords: didactics, mathematics, fractions, problems, methods

Introducción

Las fracciones son uno de los contenidos matemáticos más difíciles tanto para niños como para maestros (Kieren, 1988; Figueras, 1988; Charalambos y Pitta-Pantazi, 2007; Castro, Pitta-Pantazi, Rico y Gómez, 2016).

En un reciente estudio, Nicolaou y Pitta-Pantazi (2015) consideraron que la comprensión de las fracciones se sustenta en siete habilidades, una de ellas es la reflexión durante la resolución de problemas.

Sin embargo, hay una tradición de enseñanza de los problemas en la que éstos se han usado, no para la reflexión, sino al estilo de ejercicio y práctica para consolidar o aplicar los conocimientos adquiridos previamente.

Una manera de favorecer esta reflexión es estudiar los métodos de resolución de los problemas que han quedado reflejados en los libros de texto históricos. Estos métodos son valiosos porque son los razonamientos que los grandes matemáticos del pasado han transmitido y, como tales, pueden ayudar a los alumnos a descubrir que ha habido distintas maneras de pensar los problemas, todas útiles para producir conocimiento matemático significativo y de calidad.

Problemas descriptivos

En la tradición de enseñanza de las matemáticas escolares hay una amplia variedad de problemas verbales. Muchos de ellos son descriptivos (usando la terminología de Swetz, 2014), esto es, problemas en cuyo enunciado se describe una situación o se narra una historieta pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna situación verdaderamente práctica, sino despertar la curiosidad y ejercitar el ingenio y el razonamiento matemático.

Son problemas cuyos antecedentes se remontan a las antiguas culturas matemáticas, anteriores a la era Cristiana, y que desde entonces han sido parte esencial del contenido de los libros de aritmética e incluso de álgebra elemental.

Ejemplos de estos problemas se pueden encontrar en el Jiuzhang Suanshu de la matemática china, más conocido como *Los nueve capítulos del arte matemático* (100 d. C.), en los antiguos textos de la matemática hindú, como por ejemplo en el *Līlāvatī* de Bhaskara o Bhāskārācāryā (1150 d. C.) y en las primeras colecciones de la Europa medieval como es el caso de la *Antología griega* (s. V.), el *De Arithmeticis Propositionibus* de Beda (641 d. C.) o las *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino (735-804 d. C.)[2]. En occidente, estos problemas comenzaron a conocerse gracias a la matemática islámica a través de textos como el *Liber abaci* de Fibonacci (1202)[3].

Tras la introducción de la imprenta, se produce una eclosión de aritméticas y álgebras impresas que incorporan problemas descriptivos a menudo a modo de miscelánea. Es el caso, por ejemplo, de la *Conpusición de la Arte de la Arismética* de Ortega (1512)[4], el *Ars Arithmetica* de Silíceo

2 Los textos latinos de Beda y Alcuino están recogidos en los tomos 90 y 101 de la monumental recopilación de textos latinos editada por Jacques-Paul Migne con el título *Patrologiae cursus completus, sive Bibliotheca universalis, integra, uniformis, commoda, oeconomica omnium s. s. Patrum, doctorum scriptorumque ecclesiasticorum qui ab aevo apostolico ad usque Innocenti III tempora floruerunt* (Migne, Ed., 1850 y 1863, respectivamente). Del texto de Alcuino hay traducciones al inglés y al italiano, que conozcamos.

3 Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, escribió una segunda versión del *Liber Abaci* en 1228. La edición crítica canónica del texto en latín del *Liber Abaci* es la de Baldassarre Boncompagni, basada en un único manuscrito de la versión de 1228 (Boncompagni, 1857). Hay una traducción inglesa hecha a partir de ella por Sigler publicada recientemente (Sigler, 2002). Actualmente hay en curso una edición crítica dirigida por Giuseppe Germano que tomará en cuenta los seis manuscritos en que se conserva el texto completo, y otros en que se conserva parcialmente.

4 Ortega publicó en 1512 en Lyon, la *Conpusición de la arte de la arismética y juntamente de Geometría* y la reeditó con el nombre de *Tratado subtilissimo*, en Sevilla en 1534, 1537, 1542 y 1552, y en Granada en 1563. Además publicó una edición en francés y otra en italiano, ambas en 1515.

(1513), la *Arithmetica práctica y especulativa* de Pérez de Moya (1562) o la *Arithmetica Algebratica* de Aurel (1552).

A mediados del siglo XVII, estos problemas se incorporan a los primeros textos de matemáticas recreativas, como por ejemplo las Récreations Mathématiques de Ozanam (1692)[5], de Vinot (1860) o de Rouse Ball (1902).

En el siglo XX, todavía es posible encontrar algunos de estos problemas en las colecciones que aparecen en los libros dedicados específicamente a presentar problemas resueltos de aritmética y álgebra elemental, como por ejemplo los "Solucionarios" de las famosas "Aritméticas razonadas" de las editoriales Dalmau y Bruño múltiples veces reeditadas a lo largo del siglo XX.

Los enunciados de estos problemas han evolucionado a lo largo del tiempo adaptándose a los cambios sociales pero, conservando su contenido matemático, han llegado a estandarizarse bajo una determinada forma que actúa como modelo, problema tipo o estereotipo.

En los libros de texto antiguos los problemas descriptivos no aparecen bajo un epígrafe común, sino que aparecen dispersos bajo diferentes epígrafes relacionados ya sea con el método o regla, o bien, con los aspectos superficiales: contextos, acciones o agentes.

Esta manera de presentar los problemas descriptivos, si bien permite reconocerlos, no ofrece una visión global o de conjunto de los mismos.

Objetivo general y específico

A fecha de hoy, a diferencia de lo que ocurre con los problemas aditivos y en parte con los multiplicativos con números naturales, no se dis-

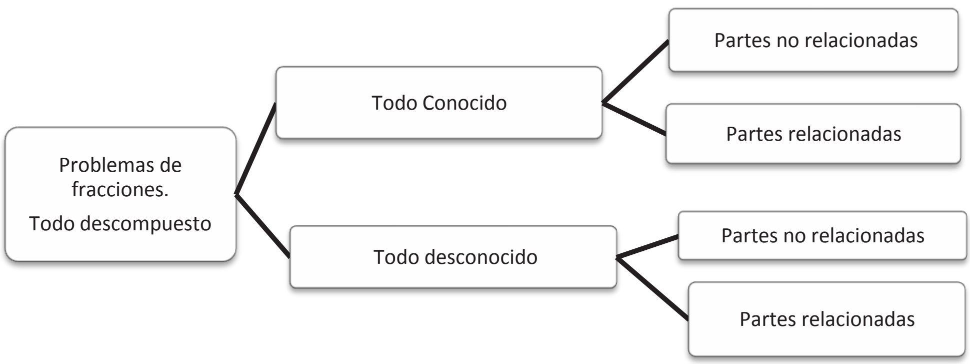
[5] Las *Récreations Mathématiques* de Jacques Ozanam (1640-1717) se publicaron en 1692, pero la edición más conocida es la que realizó en 1778 Jean Etienne Montucla (1725-1799) con algunos añadidos. Montucla era a la sazón Censor Real de Matemáticas, por lo que se envió a sí mismo el texto para autorizarlo, bajo el nombre de M. de C.G.F. En 1803, se publicó en Londres una traducción al inglés de esta edición de Montucla del texto de Ozanam debida a Charles Hutton con notables añadidos, y otra posterior en 1814 de nuevo ampliada.

pone de una clasificación de los problemas de fracciones suficientemente aceptada por la comunidad científica, es por tanto un objetivo general de investigación que sigue abierto.

Este objetivo está ligado al de estudiar los problemas con fracciones por tipos, en vez de hacerlo uno a uno aisladamente, logrando de este modo contribuir a poner orden, claridad y generalidad metodológica para efectos de la enseñanza.

Para clasificar problemas, la literatura existente muestra tres enfoques principales: la estructura matemática, las características sintácticas y las características semánticas. En este trabajo se fija la atención en la estructura de los problemas descriptivos de fracciones en los que se identifican como variables "el todo", que puede ser conocido o no, y las partes, que pueden guardan relación entre sí o no (para más detalle ver Gómez et al., 2016).

El esquema 1 muestra la organización general de estos problemas:



Esquema 1. Organización de los problemas descriptivos de fracciones

Debido a las limitaciones de espacio de este capítulo y a su título ilustrativo, aquí se muestra el estudio de un tipo de problemas descriptivos de fracciones. Concretamente el tipo de problemas en el que el todo conocido se divide en dos partes de las cuales se conoce la suma de las partes y la razón entre ellas.

La metodología que sustenta el estudio se basa el análisis de textos históricos (para más detalle ver Gómez, 2011) tomando como subunidad de análisis las lecturas analíticas que los autores han dejado reflejadas en los mismos.

La lectura analítica de un problema, que por su origen suele vincularse al método cartesiano, se ha entendido a menudo como la traducción del enunciado del problema al lenguaje simbólico algebraico.

Una interpretación más precisa es la que entiende por lectura analítica del enunciado de un problema la lectura que, en primer lugar, lo transforma en una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades, para dar lugar a partir de esas cantidades y relaciones a una ecuación, a una fórmula o incluso a una regla.

El problema tipo

La *Antología griega*[6] es una recopilación de poemas, en su mayoría epigramas, reunida en quince libros, que contiene material procedente de dos antologías, la Antología palatina, llamada así por el códice del siglo X en que nos ha llegado, y la *Antología* de Planudes, que es del siglo XIV. El material es de diversas épocas y diversos autores, a menudo desconocidos, y en el libro *XIV*, que contiene 150 epigramas, hay 45 que son problemas aritméticos. No se sabe con certeza cuál es el origen de todos los problemas, pero la mayoría se suelen atribuir a Metrodoro (491-527, d.C) porque así aparecen en el códice palatino los 31 epigramas que van del 116 a 146, aunque puede que Metrodoro no fuera su autor, sino que sólo los recopilara. Hay otro epigrama, el número 1, que el códice palatino atribuye a un Sócrates, del que sólo se sabe que Diógenes Laercio lo cita como un epigramista. El resto aparecen en un códice sin atribución, y tanto hay ar-

[6] Hay varias ediciones críticas. Nosotros hemos utilizado tres de ellas, una del siglo XIX hecha por Fr. Jacobs, que lleva el texto en francés (Jacobs, 1863), y dos del siglo XX: la bilingüe en griego e inglés, editada y traducida por W. R. Paton, de la Loeb Classical Library (Paton, 1918), y la bilingüe en griego y francés, editada y traducida por Félix Buffière para la Collection des Universités de France de la editorial Les Belles Lettres (Buffière, 1970).

gumentos a favor de que sean de Metrodoro como de Sócrates o quizá de ambos. Finalmente, hay un epigrama, el 147, que proviene de la *Disputa entre Hesíodo y Homero*, un texto anónimo compuesto hacia el siglo *II*. Gran parte de estos epigramas se pueden encontrar también en libros de matemáticas recreativas posteriores como los de Ozanam y Rouse Ball.

El enunciado de uno de los atribuidos a Metrodoro, que figura en la *Antología griega* con el número 6 es, en la versión de Jacobs, el siguiente:

> Oh tú que indicas tan bien las horas, ¿cuántas han pasado desde esta mañana? Quedan dos veces los dos tercios de las horas que ya han pasado (Jacobs, 1863, p. 42).

La estructura del problema atiende a un todo conocido, la duración del día, que se ha descompuesto en dos partes una de las cuales es una fracción conocida de la otra.

Jacobs no muestra el razonamiento que sustenta la resolución del problema, aunque da una comprobación del resultado en los siguientes términos:

> Horas pasadas $5\ \frac{1}{7}$, quedan $6\ \frac{6}{7}$: total 12. En efecto, $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, 6h + $\frac{6}{7}$ o $\frac{36}{7}$ de hora + $\frac{4}{3} = \frac{144}{21}$ de hora, o 6h $\frac{18}{21}$ o $\frac{6}{7}$ (Op. cit. 1863, p. 42)

La manera en que se expresa Jacobs no es académicamente admisible a nuestros ojos de hoy, aun así es posible reconstruir algunos de sus datos: $\frac{4}{3}$ es la forma simbólica de la fracción verbal "dos veces los dos tercios", $\frac{36}{7}$ de hora es la reducción a fracción impropia del número mixto $5\frac{1}{7}$ de hora y $\frac{144}{21}$ son los $\frac{4}{3}$ de $\frac{36}{7}$ hora. Lo que parece hacer Jacobs es comprobar que los $\frac{4}{3}$ de $5\ \frac{1}{7}$ de hora son las $6\ \frac{6}{7}$ h, que en total son las 12 horas del día.

Esta falta de explicación del método de resolución se reproduce en el texto de Ozanam, que en la edición de Montucla (1778) se limita a aclarar el enunciado del problema:

> Dividiendo la duración del día, como hacían los antiguos, en 12 partes, la cuestión se reduce a partir ese número en dos partes, tales que los $\frac{4}{3}$ de la primera sean iguales a la segunda, lo que da, para el número de horas que han pasado $5\frac{1}{7}$, consecuentemente, para el resto de día, 6 horas y $\frac{6}{7}$ (Ozanam, 1778, p. 192).

El mismo problema lo recoge Rouse Ball (1992), quien sí que razona la resolución y lo hace como sigue:

> Las horas que han pasado + las horas que faltan dan las 12 horas. Las horas que faltan valen los $\frac{4}{3}$ de las horas que han pasado. Luego los $\frac{7}{3}$ de las horas que han pasado valen 12. Horas pasadas = $12 \times \frac{3}{7} = 5\text{h}\ \frac{1}{7}$, horas que faltan $6\text{h}\ \frac{6}{7}$. (Rouse Ball, 1992, p. 126).

Las condiciones del problema son: Las 12 horas del día se descomponen en dos partes: las horas que faltan, *b*, y las horas que han pasado, *a*. La relación entre las partes es: $b = \frac{4}{3}$ de a y la suma de las partes $a+b=12$

La lectura analítica se sigue de los siguientes pasos: la parte a es el referente de la fracción; es decir, es la unidad que se fracciona, por lo tanto b es 1 o $\frac{3}{3}$. En consecuencia, la suma de las partes $a+b$ es $a+\frac{4}{3}a = \frac{3}{3}+\frac{4}{3}$ de a, que es $\frac{7}{3}$ de a. Es decir $12=\frac{7}{3}$.

Invirtiendo esta relación se cambia el referente, o unidad que se fracciona, de la parte al todo: Si 12 son $\frac{7}{3}\,a$, entonces a es $\frac{3}{7}12$. Por tanto, b, que es su complemento a 12 vale $\frac{4}{7}12$.

Obsérvese que con esta inversión se cambia el referente del fraccionamiento que pasa de tercios de a a séptimos de $a+b$; esto es, cambia de la parte al todo.

Una lectura analítica diferente de este mismo problema se encuentra en el siguiente ejemplo procedente de un libro del matemático Bahā al-Dīn al-ʻĀmilī, nacido en Baalbek (actualmente en Líbano) en 1547 y muerto en Isfahan (Irán) en 1621, del que disponemos de una traducción francesa de Aristide Marre con el título *Kholāçat al-hissāb ou Quintessence du calcul* (Marre, 1864):

Se le pregunta a alguien cuánto ha transcurrido de la noche. El respondió: un tercio del tiempo transcurrido es igual a un cuarto de lo que queda. ¿Cuánto tiempo había transcurrido y cuánto quedaba aún? (Marre, 1864, p. 48).

Al-ʻĀmilī ha explicado previamente la “búsqueda de las incógnitas mediante la proporción[7]” en el capítulo tercero del libro, y, en otros capítulos ha explicado la “búsqueda de incógnitas” mediante la falsa posición, dos falsas posiciones, lo que llama “la operación de inversión” y el álgebra. Cada problema lo presenta resuelto por varios métodos. En el caso de este problema plantea dos soluciones distintas: la primera “por álgebra”, que no comentaremos, y la segunda “por proporción”, que transcurre como sigue:

> Pon el tiempo transcurrido una cosa, el resto cuatro horas a causa del cuarto, entonces un tercio de una cosa es igual a una hora, de donde una cosa es igual a tres horas, y la suma siete. Ahora, tres está con siete en la misma razón que el número desconocido está con doce. Divide pues el producto de los términos externos por el término medio, entonces el cociente es cinco y un séptimo (Marre, 1864, pp. 48-49).

Las condiciones del problema son: La noche está dividida dos partes a y b que suman 12 horas y la relación entre las partes es: $\frac{1}{3}a = \frac{1}{4}b$.

La resolución sigue la siguiente secuencia: Si b fuera 4, a sería 3 y el total 7. Repartiendo 12 en la razón de 3 a 4, se tiene el valor verdadero de

7 El procedimiento no es nuevo: se encuentra, por ejemplo, en el capítulo de transacciones mercantiles del libro de álgebra de al-Khwārizmī.

a y *b*. Esto se puede hacer por la fórmula del reparto proporcional, que con los datos del problema es: *a/12=3/7.*

En libros más recientes también aparece el problema de las horas cambiado de contexto. En el siguiente ejemplo el método es el mismo que el de Al-ʻĀmilī:

> Repártanse 180 ptas. entre dos personas, de modo que la parte de la primera sea los 4/5 de la segunda Tomando un número arbitrario que satisfaga las condiciones del problema, esto es, un número divisible por 5, por ejemplo, 5 tendremos que, si la parte de la segunda persona fuese 5, la parte de la 1ª, sería 5×4/5 = 4: Repartiendo, pues, 180 ptas. en partes proporcionales a 5 y 4, tendremos: 5+4 = 9. Luego: Para la 1ª persona 9:180::4:x; x = 80 ptas. Para la 1ª persona 9:180::5:x, x = 100 ptas. (Dalmau, 1943, p. 254, nº 18).

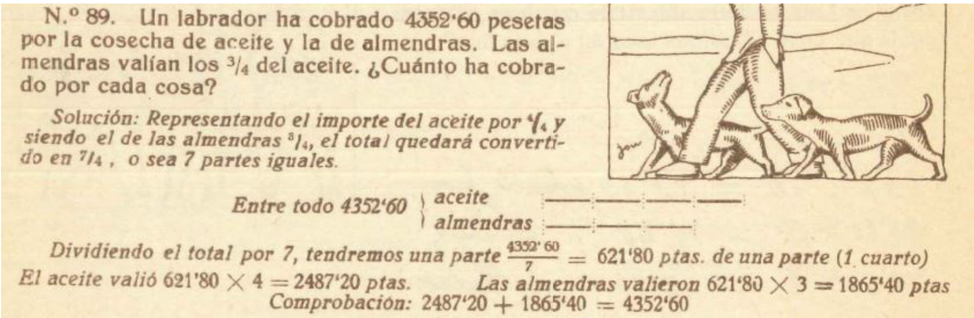
Este mismo método se puede aplicar sin pasar por la regla del reparto proporcional. Basta con aplicar al total la fracción que representa a cada parte. El siguiente ejemplo ilustra el razonamiento:

> Dos personas tienen juntas 100 ptas. La 1/2 de la 1ª vale el 1/3 de la 2ª. ¿Cuánto tiene cada una?
>
> Si la 1/2 de la 1ª vale el 1/3 de la 2ª, la parte de la 1ª vale los 2/3 de la 2ª, o sea, que si la 1ª tiene 2, la 2º tiene 3 y ambas 5. La parte de la 1ª es 100 x 2/5 = 40 ptas., y la de la 2ª, 100 x 3/5 = 60 ptas. (Bruño, 1940, p. 129, prob. 608.).

En el siguiente ejemplo, se cambia el referente de la fracción que liga las partes, pasando de ser una parte al todo, y se aplica la nueva fracción al todo de modo parecido a como se vio en Rouse Ball.

> En dos toneles existen 520 litros de vino y uno de ellos contiene la cuarta parte que el otro. ¿Cuántos litros hay en cada tonel?
>
> Sol. Habiendo en el tonel primero la cuarta parte de lo que contiene el segundo, resulta que la cantidad contenida en aquél [en el 1º] será la quinta parte de la cantidad total de vino o sea: 520:5 = 104 litros. En el segundo habrá 104×4 = 416 litros (Sabrás y Aguayo, 1922, p. 9).

En el ejemplo de la Figura 1, también se sigue el razonamiento de Rouse Ball, con la novedad de que el autor ilustra el referente con segmentos subdivididos de acuerdo a las condiciones del problema, después aplica un método de valor unitario.



N.º 89. Un labrador ha cobrado 4352'60 pesetas por la cosecha de aceite y la de almendras. Las almendras valían los $^3/_4$ del aceite. ¿Cuánto ha cobrado por cada cosa?

Solución: Representando el importe del aceite por $^4/_4$ y siendo el de las almendras $^3/_4$, el total quedará convertido en $^7/_4$, o sea 7 partes iguales.

Entre todo 4352'60 { *aceite* ——:——:——:——
almendras ——:——:——

Dividiendo el total por 7, tendremos una parte $\frac{4352'60}{7}$ = 621'80 *ptas. de una parte (1 cuarto)*

El aceite valió 621'80 × 4 = 2487'20 *ptas.* *Las almendras valieron* 621'80 × 3 = 1865'40 *ptas*

Comprobación: 2487'20 + 1865'40 = 4352'60

Figura 1

El texto dice así:

Un labrador ha cobrado 4352’60 pesetas por la cosecha de aceite y la de almendras. Las almendras valían los ¾ del aceite ¿Cuánto ha cobrado por cada cosa?

Solución: representando el importe del aceite por 4/4, y siendo el del almendras ¾, el total quedará convertido en 7/4 partes, o sea 7 partes iguales.

Entre todo 4352,60 aceite — — — —
almendras — — –

Dividiendo el total por 7, tendremos una parte $\frac{4352´60}{7}$ = 621´80 ptas. de una parte (1 cuarto)

El aceite valió 621’80×4=2487’20 ptas. Las almendras valieron 621’80×3=1865’40 ptas. Comprobación: 2487’20+1865,40=4351’60 (Villar, 1942, p. 30, problema nº 89).

Obsérvese en este razonamiento que el todo $a+b$ viene dado por la suma del numerador y denominador de la fracción que expresa la relación entre las partes, por lo que sabiendo esto, la resolución es inmediata. El siguiente ejemplo sirve para ilustrar el método.

Un ganadero ha comprado un caballo y un burro que le han costado 4.266 ptas. El precio del burro es los 2/7 del precio del caballo. ¿Cuánto ha costado cada animal?

7+2 = 9
4266: 9 = 474
474×2 = 948 ptas. del burro
472×7 = 3.318 del caballo
(Villar, 1942, p. 30, problema nº 90).

Epílogo

En el presente trabajo se ha pretendido dar cuenta de un modo de abordar el estudio de los problemas descriptivos de fracciones desde una perspectiva global.

A partir de una tentativa de clasificación de los mismos se ha seleccionado un tipo particular de problemas, el de las horas, para hacer el estudio de las lecturas analíticas que sustentan los métodos de resolución que algunos autores de diversas épocas han dejado reflejados en los libros de texto.

La variedad de lecturas y métodos expuestos en este documento ilustran una riqueza matemática que aporta conocimiento útil para el aprendizaje de las fracciones desde la reflexión sobre los procesos de resolución.

También es útil para el profesor interesado en disponer de alternativas para orientar una enseñanza de los problemas con fracciones por su propio interés y no como aplicación de conocimientos previos, al estilo de ejercicio y práctica.

En definitiva, es útil para el investigador porque ofrece una metodología para el análisis histórico y epistemológico de los razonamientos aritméticos que han desarrollado los matemáticos del pasado para la resolución de los problemas con fracciones.

El reto para todos es recuperar el valor educativo de los problemas con fracciones, aprendiendo a conocer su estructura, las lecturas analíticas de sus enunciados y los métodos y razonamientos que nos ha legado la tradición de enseñanza.

Referencias

Bruño (1940). *Tratado teórico práctico de aritmética razonada*. Curso superior. Segunda edición. Solucionario. Madrid, Barcelona, Valladolid: Ediciones Bruño.

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L., y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 129-146.

Charalambos, Y.C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students'understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316.

Dalmau, J. (1943). *Soluciones analíticas. Nueva edición corregida y aumentada. Libro del maestro*. Gerona: Dalmáu Carles Pla, S. A.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales* (Tesis doctoral no publicada). Cinvestav, Mexico.

Gómez, B. (2016). Problemas descriptivos y pensamiento numérico: el caso de las cien aves de corral. *PNA, 10*(3), 218-241.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon, 28*(1), 77, 9-22.

Gómez, B.; Sanz, M. y Huerta, I. (2016) Problemas Descriptivos de fracciones. *Bolema: Boletim de Educaçao Matematica, 30*(55), 586-604.

Jacobs, F. (Ed., trad.) (1863). *Anthologie Grecque. Traduite sur le texte publié d'après le manuscrit palatin par Fr. Jacobs avec des notices biographiques et littéraires sur les poëtes de l'anthologie. Tome second*. Paris: Hachette.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers-Its intuitive and formal development. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp.162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

M.E.C. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. *BOE*, *126,* p. 19386.

Marre, A. (Ed., Trad.) (1864). *Kholâçat al-hissāb ou Quintessence du calcul par Behā-Eddīn al Aamoulī*. Deuxième édition, révue, corrigée et augmentée de nouvelles notes. Roma: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

Migne, J.-P. (Ed.) (1850). *Patrologiæ cursus completus*. *Tomo XC*. París: Apud editorem.

Migne, J.-P. (Ed.) (1863). *Patrologiæ cursus completus*. *Tomo CI*. París: Excudebat Migne.

Nicolaou, A., & Pitta-Pantazi, D. (2015). The Impact of a teaching intervention on sixth grade student's fraction understanding and their performance in seven abilities that constitute fraction understanding. En Konrad Krainer & Nada Vondrova (Ed.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 9*, (pp. 309-315). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometría.* León: en casa de Maestro Nicolau de Benedictis: por Joannes Trinxer librero de Barcelona.

Oughtred, W. (1653). *Mathematicall Recreations*. London: Printed for William Leake

Ozanam, M. (1778). *Récreations Mathématiques & Phisiques.* Nouvelle edition refondue & considérablement augmentée par M de CGF. Paris: Chez Ant. Jombert. (1ª edición 1692).

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T., Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Puig, L., & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Rouse Ball, W.W. (1992). *Récréations Mathematiques et problèmes des temps anciens et modernes*. Sceaux: Gabay (Reimpresión de la 2ª edición de 1902. París: Hermann).

Sabrás, T y Aguayo, M. (1922) *Colección de ejercicios y problemas resueltos de Aritmética, Geometría, Álgebra y Trigonometría*. (3ª Ed.). Barcelona: Imprenta A.Ortega.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer.

Silíceo, J. M. (1513). Ars Arithmética. En J. M. Cobos Bueno y E. Sánchez Salor (Eds.) *Juan Martínez Silíceo. Ars Arithmética.* 1996. Madrid: Editora Regional de Extremadura y Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Swetz, F. J. (2014) *Expediciones matemáticas. La aventura de los problemas matemáticos a través de la historia* (José Migual Parra, trad.). Madrid, España: La esfera de los libros.

Villar, A. (1942). *Problemas-tipo ilustrados y ejercicios de cálculo mental*. Ilustraciones de Jou. Colección Avante. Barcelona: Miguel A. Salvatella.