Isometrías en la resolución de problemas y obras de arte

Isometries applied to problem solving and artworks

Rafael Ramírez, José Antonio Fernández-Plaza
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se resuelven dos problemas planteados en las asignaturas Bases Matemáticas y Diseño y Desarrollo del Currículo de los estudios de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada, con el contenido matemático común de las isometrías en el plano. En un problema de rebotes en el billar, la identificación de simetrías axiales se convierte en una interesante estrategia de resolución. En el problema de construcción de mosaicos, las isometrías permiten visualizar y comprender el proceso de creación de obras de arte. Estas actividades, propuestas por Francisco Fernández y Francisco Ruiz en los procesos formativos de maestros han favorecido que los estudiantes den mayor significado a sus conocimientos geométricos, de medida, de los mosaicos en la Alhambra y en la obra de Escher.

Palabras clave: Alhambra, Escher, Isometrías, Mosaicos, Resolución de problemas,

Abstract

In this work we address two problems from the subjects "Fundamentals of Mathematics" and "Design and development of the mathematics curriculum in Primary Education" with a common content related to the plane isometries. One problem is related to the bounces of cue ball in a pool table. We will show an interesting strategy to face it related to the use of axial symmetries. Another problem is the mosaics construction. To face it, plane isometries are also powerful tools to visualize and understand the process to create artworks. These tasks, suggested by Francisco Fernández and Francisco Ruiz for the training of primary teachers, have contributed to a better understanding of geometric knowledge, measurement, the Mosaics of the Alhambra's and Escher's works.

Keywords: Alhambra, Escher, Isometries, Mosaics, Problem Solving,

Introducción

En este capítulo vamos a profundizar en dos tareas estrechamente relacionadas con los trabajos de Francisco Fernández y Francisco Ruiz relativos a Medida y Geometría. Hemos seleccionado dos de sus propuestas que consideramos especialmente significativas para favorecer la enseñanza de las matemáticas con sentido (Flores y Rico, 2015) en las asignaturas que impartimos en el Grado de Maestro de Educación Primaria, "Bases matemáticas" en primer curso, y "Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas" en tercer curso.

El primer problema, propuesto por Francisco Fernández, trata de modelar el número de rebotes que una bola dará en las bandas de una mesa de billar partiendo de una esquina y formando, un ángulo de 45º con una banda, hasta llegar a detenerse en cualquiera de las esquinas. Esta tarea se analiza en una de las prácticas de la asignatura de Diseño y desarrollo del currículo, tanto por su riqueza en la identificación de estrategias de resolución como en el análisis de los contenidos matemáticos que pone en juego. Si bien a los estudiantes sólo se les pide localizar soluciones particulares, encontrar la solución general supone un reto complejo, dado que las transformaciones geométricas elementales son contenido de Educación Primaria, sin embargo, la estrategia de resolución específica requiere un nivel más avanzado de dominio para establecer la relación entre el número de rebotes y las dimensiones de la mesa de billar.

La segunda tarea, inspirada en los trabajos geométricos y artísticos de Francisco Ruiz sobre los mosaicos de la Alhambra y la obra de Escher, es una de las actividades propuestas en la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria. El uso de Geogebra, como programa de geometría dinámica, favorece la visualización del proceso de construcción de mosaicos a partir de un polígono regular y puede acercarnos a comprender el proceso de Escher para convertir la geometría en arte.

PROBLEMA DE LA MESA DE BILLAR

El problema de la mesa de billar tiene el siguiente contexto general:

En una mesa de billar clásico de 1,5 x 2,5 m se sitúa una bola en una esquina. Se golpea la bola de tal forma que siga una trayectoria con un ángulo de 45º respecto a una de las bandas. La bola sale con fuerza suficiente y no se para hasta que llega a otra (o la misma) esquina de la mesa.

Se plantean a continuación dos preguntas:

a. ¿Cuántos rebotes dará en las bandas de la mesa antes de pararse?
b. ¿Qué medidas debería tener una mesa de billar para que, en las mismas circunstancias, la bola diera 10 rebotes?

Resolución del problema básico

La resolución de la parte a. de este problema requiere de conocimientos geométricos básicos para dibujar la trayectoria de la bola y contabilizar los rebotes en las bandas. En el ejemplo reflejado en la figura 1, la trayectoria de la bola viene marcada por la secuencia de rebotes Pi. Para contabilizar el número de rebotes, se parte de la propiedad de que este número depende exclusivamente de la proporción de la mesa. La mesa que nos ocupa es de tamaño 1,5 x 2,5 m, lo cual equivale a resolver el problema en una mesa de dimensiones 15x25 u, que dividiendo por el máximo común divisor, se reducen las dimensiones de la mesa a 3 x 5 u, que es la representada en la figura. El número de rebotes es 6.

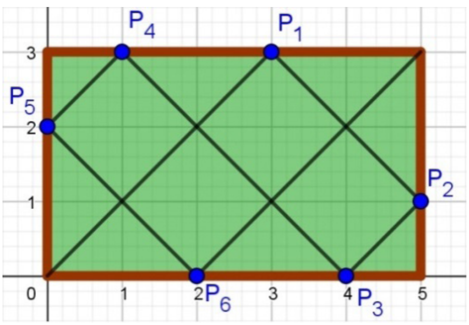

Figura 1. Resolución gráfica de la parte a) del problema original

Por otro lado, la parte b. interesa más desde el punto de vista didáctico de la resolución de problemas, porque hay que diseñar una estrategia para relacionar el número de rebotes con las dimensiones *a* y *b* en la que se usan las propiedades de las isometrías del plano, en particular, reflexiones axiales.

La siguiente figura muestra una representación geométrica del proceso de obtención de la relación entre el número de rebotes y las dimensiones de la mesa de billar *a* y *b*. Esta cuestión requiere un nivel avanzado de reflexión, no adecuado al nivel de Primaria. La propiedad de que en un rebote el ángulo de entrada es el mismo que el de salida, da lugar a establecer una relación entre la trayectoria de la bola en el billar y la trayectoria recta que seguiría la bola si "atravesase distintas copias de la mesa de billar" (figura 2). Por ejemplo, el recorrido tras el primer rebote (punto P_1) se puede obtener a partir de una simetría axial respecto de esa banda, siendo la trayectoria de P_1 a P_2 (segmento s_2) equivalente a la trayectoria entre P_1 y P'_2 (segmento s'_2) en la copia de la mesa de billar obtenida por dicha simetría.

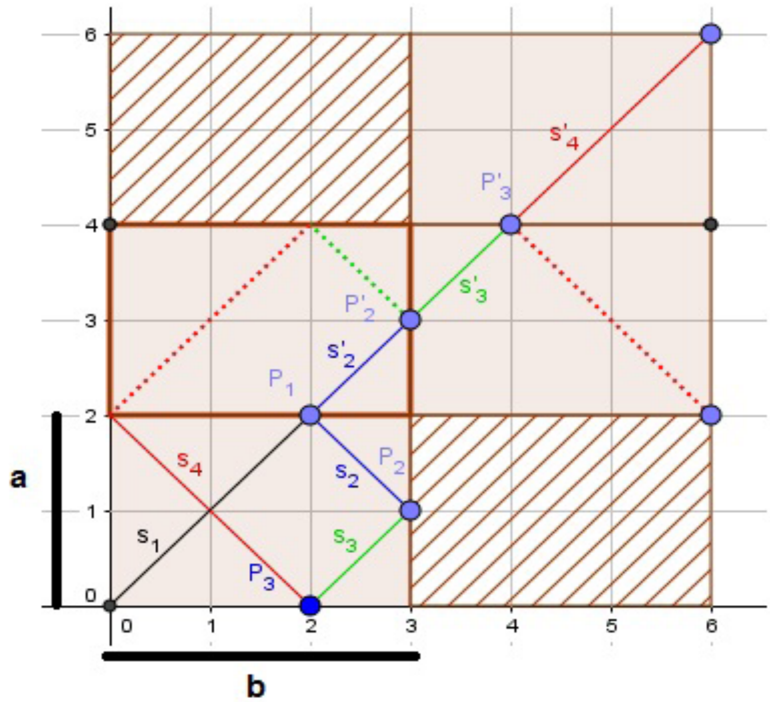

Figura 2. Resolución gráfica de la parte B del problema original

La obtención del segmento s'_3 se debe a la doble transformación del segmento s_3, por composición de la simetría horizontal anterior y la simetría vertical del eje que contiene a P'_2 que transforma la mesa de billar original al mismo tiempo. Análogamente se deduce el tramo s'_4. En la figura se destaca en línea discontinua las transformaciones progresivas de los segmentos de la trayectoria inicial. El proceso de resolución termina cuando la trayectoria transformada termina en una esquina de alguna de las copias de la mesa de billar, que equivale a la generación de la diagonal de un cuadrado.

A partir de la figura se obtienen las siguientes regularidades:

- El segmento final obtenido conserva el mismo ángulo del tiro y cada intersección, P_1, P'_2 y P'_3 del mismo con las bandas de las copias de la mesa de billar corresponde a los rebotes originales.
- Cada rebote en la banda superior o inferior requiere de una reflexión de eje horizontal de la mesa hacia arriba. Análogamente, cada rebote en la banda lateral derecha o izquierda, requiere una reflexión de eje vertical de la mesa hacia la derecha.
- Existe una relación entre el número de rebotes y el número de intersecciones del segmento que une el origen con el punto final. Los rebotes en las bandas horizontales se corresponden con las intersecciones en las rectas horizontales obtenidas al "copiar" la mesa de billar. Análogamente, las intersecciones con rectas verticales marcan los rebotes con las bandas verticales. Si llamamos n (m, respectivamente) al número de copias del billar en el eje horizontal (vertical, respectivamente), encontramos una curiosa relación. El número de rebotes en las bandas horizontales es m-1 y en las verticales n-1, por lo que el número de rebotes totales es $R = n + m - 2$.

Para que la bola haya tocado nuevamente una esquina, al ser el ángulo de 45 grados, es necesario que la trayectoria final sea la diagonal de un cuadrado y que se cumpla que $n \cdot a = m \cdot b$. Además es necesario que m y n sean primos relativos entre sí (mcd(n,m)=1) para que sea la primera esquina en la que cae la bola. La forma del billar únicamente depende del cociente entre *a* y *b*. Por la igualdad anterior, al considerar la fracción a/b, debe ser equivalente a n/m, lo que aporta una información relevante para la resolución del problema y otras posibles ampliaciones. Por ejemplo, en un billar de lados 1 y cualquier número irracional, sería imposible que la trayectoria acabase en una de las esquinas.

Podemos concluir que, en el caso de 10 rebotes, es necesario que las dimensiones a y b se correspondan con descomposiciones de $12 = n+m$ (n, m naturales primos relativos), siendo n-1 y m-1 los rebotes en las bandas horizontales y verticales respectivamente. Esto da lugar a los billares de dimensiones 1x11 y 5x7 (salvo cambios de escala).

Resolución del problema generalizado

Abordamos a continuación el problema general con ángulo de tiro α y dimensiones a y b, no apropiado para la etapa de Educación Primaria. La Figura 3 muestra la descripción geométrica asociada a elecciones específicas de estos parámetros.

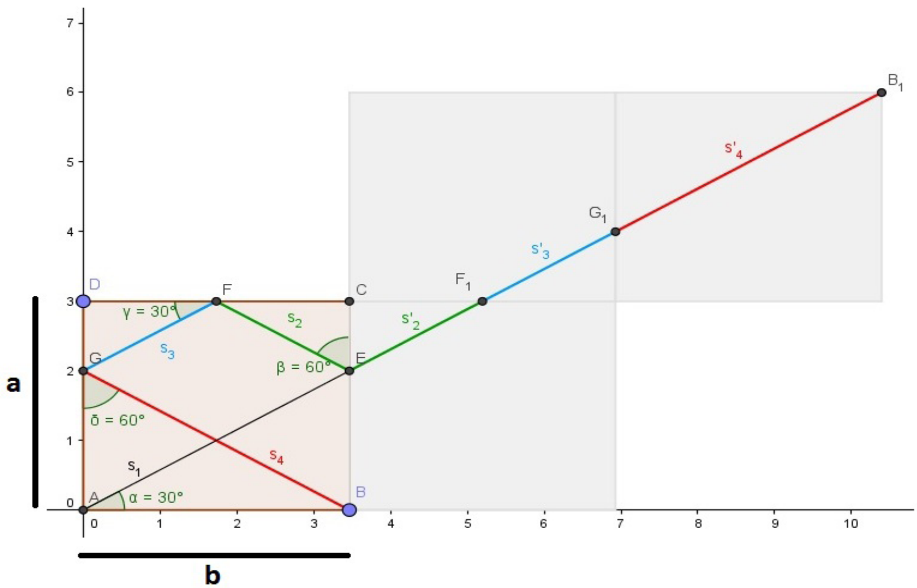

Figura 3. Resolución gráfica del problema general modificando el ángulo de tiro

La trayectoria rectilínea resultante tiene que ser la diagonal de un rectángulo generado por múltiplos de a y b. En particular se obtiene un triángulo rectángulo y se obtiene la siguiente ecuación que relaciona el ángulo α, y dimensiones a y b de la mesa de billar.

$$\exists\ n,\ m\ naturales\ tal\ que\ \tan(\alpha) = \frac{n \cdot a}{m \cdot b}$$

Para el caso mostrado en la figura 1, correspondiente a $\alpha = 30^{\circ}$, $a = 3$ u y $b = 2\sqrt{3}$ u, cumple la relación para $n = 2$ y $m = 3$. El número de rebotes (R) vendrá dada por la elección de los valores de m y n más pequeños posibles (mcd (m, n) =1) y la relación:

$$R = m + n - 2$$

Obsérvese que R es invariante conservando la proporción de la mesa original o razón de las dimensiones a y b. El problema b. entraña dificultad debido a la singularidad del valor del ángulo α y de las ecuaciones que hay que resolver.

El arte de Escher

Partimos de la siguiente actividad propuesta por Francisco Ruiz:

El teselado de reptiles se ha obtenido a partir de un hexágono regular, modificado mediante isometrías por medio de un programa de geometría dinámica. Identifica el hexágono básico del mosaico y las transformaciones de esa figura que le dan origen (Figura 4).

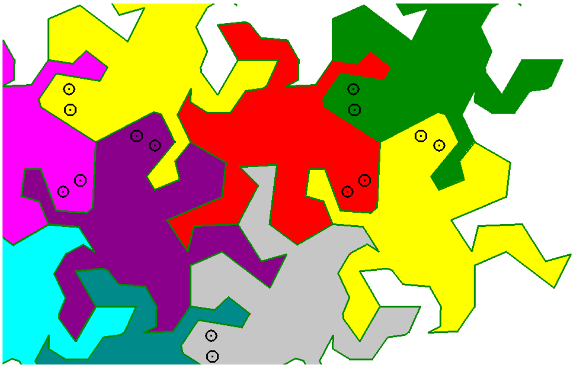

Figura 4. Mosaico tipo Escher con reptiles (Ruiz y Ruiz, 2011, p.322)

Vamos a abordar este problema, mediante una cadena de tareas propuestas en las prácticas a los estudiantes de Primero para familiarizarse con el uso de Geogebra. Simplemente esbozamos las pautas de resolución que se les plantea.

Estudio de la tarea 1

Simplifiquemos el proceso. Empecemos por un mosaico más sencillo y localicemos las transformaciones del cuadrado que dan lugar al hueso Nazarí. No pretendemos el estudio de mosaicos a través de la tesela básica o el motivo mínimo que la genera, sino "comprender" la teselación del plano a través del azulejo, es decir, la pieza de cerámica que, repetida, rellena el plano mediante isometrías.

El proceso puede quedar descrito como sigue:

Se divide el cuadrado en tres fragmentos. Uno no se mueve y sobre los otros dos se aplican sendos giros de 90 grados respecto a los puntos señalados P y Q. Se obtiene así el azulejo que llamamos Hueso Nazarí (Figura 5).

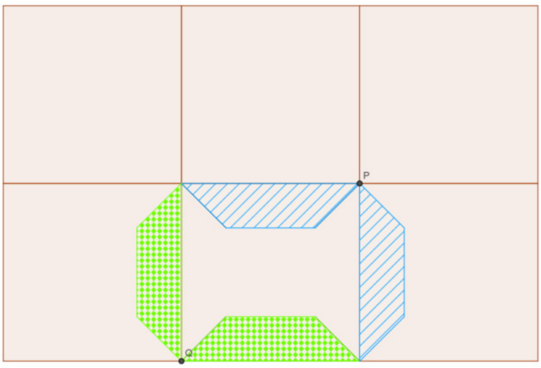

Figura 5. Construcción del hueso Nazarí a partir del cuadrado

Si ahora partimos del hueso Nazarí y localizamos los centros de giro anteriores y aplicamos los mismos giros que antes a todo el azulejo, se va construyendo el conocido mosaico de la Alhambra (Figura 6).

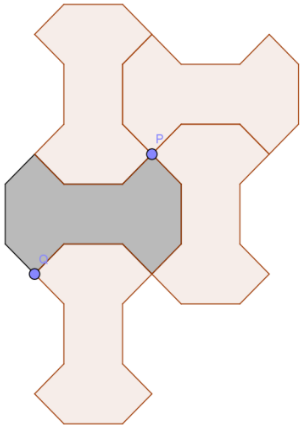

Figura 6. Construcción del mosaico a partir del azulejo en forma de hueso

Es decir, podemos concluir que aplicando giros de 90 grados al azulejo inicial y a sus respectivas imágenes por estos giros, se puede ir construyendo el mosaico. Esta propiedad es igualmente cierta si el azulejo de partida fuese el cuadrado inicial.

Estudio de la tarea 2

Podemos generalizar el proceso anterior para "comprender" la construcción de un mosaico a partir de su azulejo mediante la siguiente pauta:

a) Identificar el polígono regular (cuadrado, triángulo o hexágono) del que proviene
b) Localizar las transformaciones para convertir el polígono regular en el azulejo
c) Aplicar las mismas transformaciones al azulejo para construir el mosaico.
d) Aplicar las mismas trasformaciones al polígono regular de partida y estudiar si se produce una teselación del plano.

Utilizando cuadrados y giros de 90 grados también se pueden obtener otros mosaicos de la Alhambra (Figura 7).

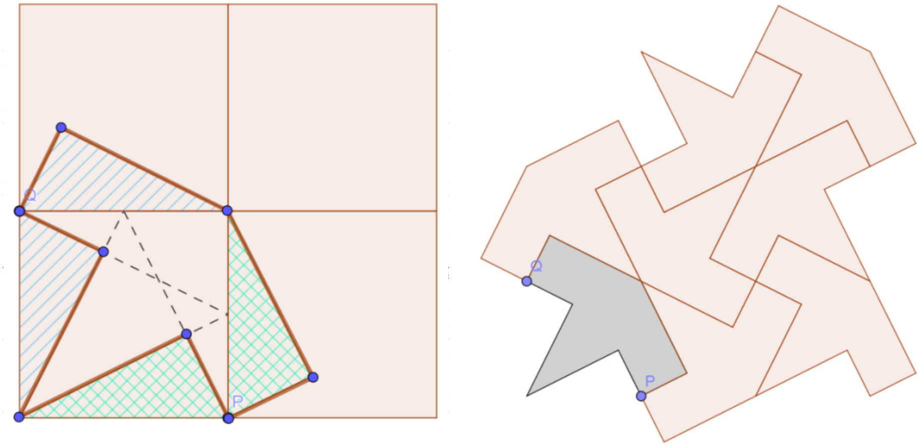

Figura 7. Construcción del mosaico tipo avión a partir del cuadrado

Si en vez de cuadrados, utilizamos triángulos equiláteros y giros de 180º, podemos obtener la conocida pajarita (Figura 8).

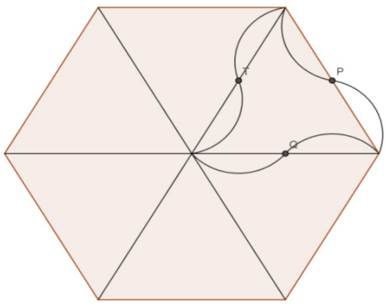

Figura 8. Posible construcción del azulejo correspondiente a la pajarita

Escher utilizó este procedimiento para construir algunas de sus obras más conocidas. Por ejemplo, partiendo de un cuadrado y utilizando únicamente traslaciones, se puede crear el siguiente mosaico (Figura 9).

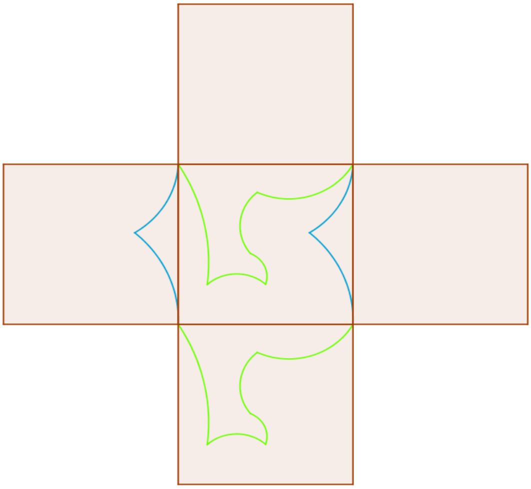

Figura 9. Azulejo en forma de flamenco

Estudio de la tarea 3

Vamos a utilizar Geogebra para particularizar el proceso anterior de construcción de mosaicos a la obra de reptiles de Escher.

Si partimos de un hexágono regular, los giros de 120 grados con centro en sus vértices van produciendo una teselación. Por la propiedad d) esto nos da una pista de que los giros de 120 grados pueden ser claves para comprender la construcción de la lagartija.

Vamos a localizar, en el hexágono regular, los fragmentos sobre los que se ha aplicado un giro de 120 grados y la parte del hexágono que no se ha transformado. En la figura 9 se observa que los giros de 120 grados, convierten los fragmentos construidos sobre cada lado del hexágono en figuras idénticas en el lado contiguo. Por ejemplo, el giro sobre el punto P convierte las regiones que forman el cuello de la lagartija (ralladas en la Figura 10) en la cabeza y una pata.

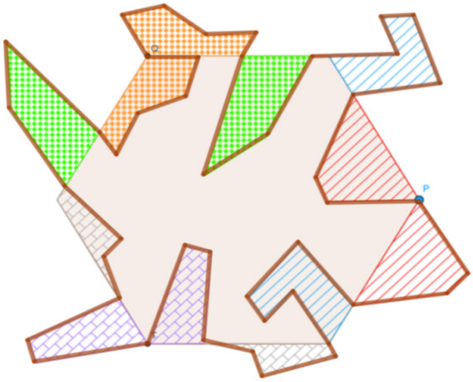

Figura 10. Construcción del azulejo "lagartija" a partir del hexágono.

El uso de la herramienta de arrastre permite desplazar los puntos interiores (extremos de los patas, cola, cabeza, etc.). Estas modificaciones favorecen el proceso creativo de construcción, dando libertad al estudiante para retocar las formas y medidas hasta conseguir el dibujo deseado. Esto Escher lo conseguía sin Geogebra, lo que engrandece más su arte.

Una vez localizados los centros de giro, y partiendo del azulejo formado por la lagartija, se puede construir el conocido mosaico (Figura 11).

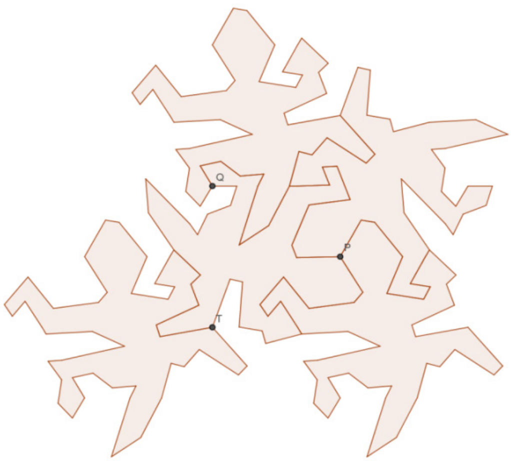

Figura 11. Construcción del mosaico reptiles a partir de puntos de giro de 120º

Explicar el proceso constructivo puede hacernos valorar más el valor artístico de la obra de Escher y su dominio de las propiedades geométricas. Las infinitas posibilidades de Geogebra pueden acercarnos a comprender los entresijos geométricos, pero aún nos queda mucho camino para alcanzar al artista (Figura 12).

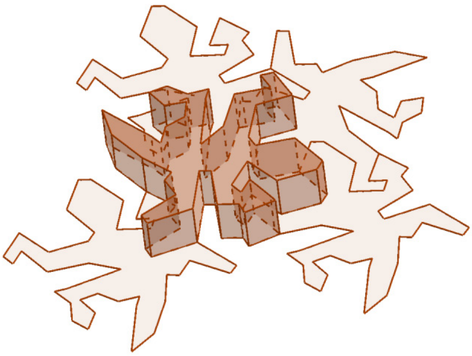


Figura 12. Nuestro salto a la tercera dimensión para la obra Reptiles de Escher.

Referencias

Flores, P. y Rico, L. (Coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid. Pirámide

Ruiz, F. y Ruiz, J. F. (2011). Movimientos geométricos en el plano. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria* (pp. 301-327). Madrid. Pirámide.