# LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN EL PROCESO DE COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE BASE DEL ESPACIO VECTORIAL $R^2$ y $R^3$

**Maria Guadalupe Vera Soria, Marcela Parraguez González, Irma Yolanda Paredes Águila, Dalmiro García Nava**
Universidad de Guadalajara. (México). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
guadalupe.vera@academicos.udg.mx, marcela.parraguez@pucv.cl,
yolanda.paredes@academicos.udg.mx, dalmiro.garcia@academicos.udg.mx

**Resumen**
Este artículo expone los primeros resultados de una investigación destinada a estudiar el proceso de comprensión del concepto de base del espacio vectorial $R^2$ y $R^3$. Con base en el modelo de la comprensión en matemáticas y los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994 y 2002) como marco de referencia, se indaga el proceso de construcción del concepto, a través de la valoración de las distintas formas de percibir el significado de base, mediante entrevistas con seis estudiantes universitarios participantes que realizaron actividades de exploración del concepto y otras nociones relacionadas (combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal) en un ambiente gráfico-algebraico. Los resultados que se presentan dan cuenta de la forma en que se coordinaron los distintos modos de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, para llegar a sintetizar el sistema conceptual que conduce a la comprensión de la noción de base.

**Palabras clave**: comprensión conceptual, modos de pensamiento, estudio interpretativo

**Abstract**
This article presents the first results of a research aimed to study the understanding process of the concept of basis of the $R^2$ and $R^3$vector spaces. Based on the model of mathematical understanding and the modes of thinking of Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994 and 2002) as the reference framework, we investigate the construction of the concept, through the assessment of the different ways of perceiving the meaning of basis, in interviews to college students who carried out activities of exploration of the concept and other related notions (linear combination, generator set, and linear independence) in a graphic and algebraic environment. The findings show the coordination of the different modes of thinking: synthetic-geometric, analytic-arithmetic and analytic-structural thinking, in order to synthesize the conceptual system that leads to the understanding of the notion of base.

**Key words**: conceptual understanding, modes of thinking, interpretative research

## Introducción

El presente trabajo parte de la suposición fundamentada en la literatura, relativa a la complejidad epistemológica intrínseca en la abstracción de los conceptos axiomáticos del álgebra lineal (Dorier, 1995; Dorier y Sierpinska, 2002; Oktaç y Trigueros, 2010). En particular, aunque en su mayoría los reportes que anteceden a esta investigación describen resultados sobre elementos conceptuales y cognitivos involucrados en la construcción de la noción de base de un espacio vectorial (Chargoy, 2006; Da Silva y Lins, 2002; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008), este trabajo se distingue por la evaluación sistémica de las componentes que integran el proceso de comprensión del concepto.

El estado del conocimiento del tema, revela que la comprensión del concepto de base es un fenómeno determinado por varios factores, entre ellos, que supone el reconocimiento de otros conceptos más elementales que lo definen (combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal), desde los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, y que su formación se basa en la realización de un número de inferencias en torno a las ideas sintetizadas en las nociones involucradas (Chargoy, 2006; Da Silva y Lin, 2002, y Kú, Trigueros y Oktaç, 2008 y Vera-Soria, 2016).

El objetivo del estudio es describir el proceso de comprensión del concepto de base del espacio vectorial $R^2$ y $R^3$, ahondando en las operaciones de comprensión que en coordinación de determinados modos de pensamiento, se llevan a cabo por estudiantes que cursan la materia de álgebra lineal en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías de la Universidad de Guadalajara, México.

Este artículo describe los primeros resultados sobre la interpretación de la coordinación de los distintos modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, mediante los cuales se sintetiza el sistema conceptual que conduce a la comprensión de la noción de base.

A continuación se presentan la perspectiva teórica y la trayectoria metodológica que se asumen en el estudio, para luego exponer la estrategia de análisis de los datos con la que se obtienen los resultados que describen la comprensión conceptual de los estudiantes, y se termina con los comentarios finales respecto la coordinación de los modos de pensamiento que se interpretan del análisis de la evidencia.

## Marco teórico

El fundamento del que parte la investigación incorpora dos modelos teóricos en matemática educativa: el modelo de la comprensión en matemáticas y el modelo de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994 y 2002), y en este sentido, se asume una postura cognitiva de la comprensión que considera la formación mental de objetos matemáticos en un proceso de interpretación, en el que diferentes modos de pensamiento se coordinan en la abstracción de las ideas.

Para Sierpinska (1994), la comprensión es un “acto” por medio del cual un *objeto de comprensión* se relaciona con otro objeto que funge como *base de la comprensión* del primero; así se puede decir por ejemplo, que una persona ha comprendido una expresión cuando al escucharla dirige su pensamiento a un objeto distinto del que se menciona originalmente.

La autora señala el papel de cada una de las componentes que conforman un acto de comprensión:

> …el ‘sujeto de comprensión’ (*P*) – la persona que comprende. Está lo que *P* intenta comprender – ‘el objeto de comprensión’ (*X*). Está a lo que el pensamiento de *P* se dirige (o pretende) en el acto de comprensión: ‘la base de la comprensión’ (*Y*). [Además], está la operación mental que conecta el objeto de comprensión con su base (Sierpinska, 1994, p. 29).

El desarrollo de los conceptos desde este modelo se basa en la abstracción de pensamientos y la reflexión sobre las propias acciones sobre los objetos matemáticos, y en el proceso de abstracción, las características de los objetos matemáticos se destacan mediante las *operaciones de comprensión*, es decir, cuando éstos logran ser identificados, discriminados, generalizados y sintetizados.

Identificar un objeto de comprensión implica un sentimiento de descubrimiento o reconocimiento, "involucra primero que algo es revelado […] y segundo, que se ha reconocido como algo que se intenta entender" (Sierpinska, 1994, p. 56); mientras que la discriminación que se refiere a "la identificación de dos objetos como diferentes" (Sierpinska, 1994, p. 57), es decir, que implica un acto de comparación con respecto a algunas circunstancias.

La generalización es una operación mental en la cual un determinado objeto de comprensión se reconoce como un caso particular de otra situación, mientras que sintetizar significa "la búsqueda de un vínculo común, un principio unificador, una similitud entre varias generalizaciones y su aprehensión como un todo (un cierto sistema) sobre esta base" (Sierpinska, 1994, p. 60).

Por otra parte, Sierpinska (2002) identifica la existencia de tres categorías de pensamiento en el álgebra lineal: *sintético-geométrico*, *analítico-aritmético* y *analítico-estructural*, relacionadas con el uso de los lenguajes (gráfico, algebraico y abstracto) descritos por Hillel (2002). La autora precisa que, "mientras históricamente estos tres modos de pensamiento surgieron de forma secuencial, la aparición de cada uno de éstos no eliminó a los otros dos" (Sierpinska, 2002, p. 232) y afirma que estos modos de pensamiento son igualmente útiles, especialmente cuando están en interacción.
Sierpinska (2002) afirma que:

> La principal diferencia entre los modos pensamiento sintético y el analítico, es que en el modo sintético, los objetos son, en cierto sentido, aproximados directamente a la mente la cual trata de describirlos, mientras que en el modo analítico dichos objetos se aproximan de forma indirecta: de hecho ellos sólo pueden ser construidos a través de la definición de las propiedades de sus elementos (Sierpinska, 2002, p. 233).

Cada uno de estos modos de pensamiento en el álgebra lineal, utilizan un sistema de representación específico: el modo de pensamiento sintético-geométrico usa el lenguaje geométrico de planos, líneas e intersecciones, en el modo analítico-aritmético, las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de n-uplas de números que satisfacen ciertas condiciones, por ejemplo en forma de sistemas de ecuaciones y, en el modo de pensamiento analítico-estructural, se sintetizan en una estructura los elementos algebraicos de las representaciones analíticas (Sierpinska, 2002).

## ■ Marco Metodológico

Con el fin de contar con evidencia empírica relevante para describir el proceso de comprensión del concepto de base, se propuso llevar a cabo un estudio cualitativo de corte hermenéutico-interpretativo, ya que esta estrategia de investigación procura "comprender un fenómeno o un proceso, la perspectiva de las personas involucradas o una combinación de éstas" (Merriam, 2002, p. 6). Se trata de entender el significado que las personas construyen, a través del diálogo exploratorio entre el investigador y los participantes (Martínez, 2006).

El esquema metodológico general, incluye una etapa inicial en la que se realiza un análisis epistemológico del concepto de base, y una etapa de elaboración y aplicación de instrumentos para la construcción del concepto por parte de los estudiantes, para posteriormente llevar a cabo la recolección, sistematización e interpretación de los datos obtenidos.

En particular, del análisis del concepto de base de un espacio vectorial se evidenció que la formación de esta noción depende de la capacidad para asimilar los conceptos germinales de combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal, y que su comprensión involucra la articulación de los modos de pensamiento, que son los que deben interpretarse para distinguir las características esenciales de dichos conceptos (Chargoy, 2006; Da Silva y Lin, 2002; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008 y Sierpinska, 2002).

Por este motivo, además de presentar a los estudiantes la definición de los conceptos en el modo analítico-estructural, se diseñaron instrumentos con actividades de exploración de las nociones que incluyeron el uso del programa *Geogebra*, por su potencial para ilustrar el significado de los conceptos, en la interacción de los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético.

En cuanto a los participantes, tomando en cuenta el consentimiento de los estudiantes y la disponibilidad de tiempo para participar en una entrevista, se contó con el apoyo de seis estudiantes: E1, E2, E3, E4, E5 y E6 que realizaron la actividad de exploración de los conceptos y que fueron entrevistados para obtener información, desde sus diversas perspectivas, sobre las características que advertían de conjuntos de vectores de los espacios vectoriales $R^2$ y $R^3$ con los que se les propuso trabajar, y sobre la relación de dichos conjuntos con el espacio o subespacio vectorial que era posible construir con ellos.

Y luego se verificaron en las respuestas de los estudiantes, los argumentos con los que justificaron las características que interpretaban de los conceptos, para tratar de identificar tanto sus inferencias acerca de cada concepto en el sistema conceptual: combinación lineal, conjunto generador, independencia lineal y base, como los modos de pensamiento que involucraron para llegar a reconocer conjuntos de vectores que son base del espacio o de un subespacio vectorial de $R^2$ y $R^3$.

En lo que sigue, se describe la forma como se evaluaron las inferencias de los estudiantes sobre las nociones del sistema, y los modos de pensamiento que incorporaron en dicha comprensión.

## Análisis de la evidencia

La estrategia de análisis hermenéutico, procura comprender el significado de los textos obtenidos de la recolección de los datos, en su contexto más amplio (el círculo hermenéutico), y mediante reiterados acercamientos sobre las primeras anticipaciones de sentido para interpretar la opinión del autor del texto (el espiral hermenéutico) (Weiss, 2011). Por este motivo, el proceso de análisis de los datos del estudio involucra esta estrategia en cada una de los procedimientos prácticos de reducción y visualización de la evidencia que se describen a continuación.

Las transcripciones de las entrevistas de los seis estudiantes seleccionados se examinaron para identificar las inferencias sobre las características que los estudiantes habían relacionado al concepto de base y a cada uno de los conceptos germinales, y se asignaron diversos extractos de texto a una o varias de las cuatro clases analíticas etiquetadas como: combinación lineal, espacio generado, independencia lineal y/o base (ver figura 1).

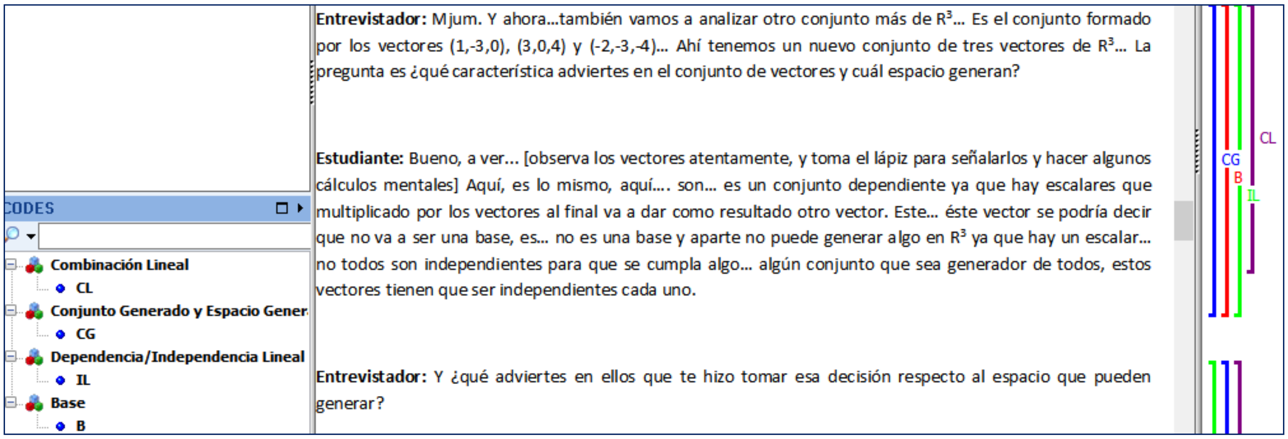


*Figura 1.* Extractos codificados en la entrevista al estudiante E1.

Posteriormente, para clasificar y condensar la información, se extrajeron para su reensamble en un arreglo matricial, un número de extractos de texto que se reunieron como material para analizar las inferencias sobre el significado de los conceptos (ver tabla 1). El significado que los estudiantes pudieron advertir se evaluó, como Sierpinska (1990) establece, a partir del referente y el sentido definidos, es decir, se examinó qué es lo que dijeron (el sentido) y sobre qué (el referente).

*Tabla 1.* Extracto de la Matriz de los significados en la entrevista al estudiante E1.

| | |
|---|---|
| **Conjunto Generador** | Conjunto Generador<br>**Referente**: Vector o conjunto de vectores<br>**Sentido**: que genera un espacio o subespacio vectorial con base en las componentes de sus vectores y en la relación entre los vectores que conforman el conjunto.<br>**CODE:** CG_E1_120<br>Entrevistador: Y, bueno, voy a poner también otro conjunto formado por estos tres vectores: es el vector (-1,3), (1,-1) y (1,1); es un conjunto de R² formado por tres vectores. Entonces, de nuevo la pregunta: en ese conjunto ¿cuáles características puedes advertir del conjunto de vectores y cuál es el espacio vectorial que se genera?<br>Estudiante: Bueno, como son dos… mmm… son tres vectores, este… a simple vista… es… a ver deje resolverlos… [Observa los vectores atentamente y hace algunos cálculos mentales y anota un "-2" junto al segundo vector del conjunto ]...ah, sí… Bueno, aquí tenemos… vamos… son tres vectores, son… de esos tres vectores… son… dos de ellos son independientes o, se podría decir que… bueno, aquí en estos, como es un vector que tiene solo dos en x y en y, solo formarían cualquier punto en R² y, no nomás por ser tres va a formar R³, no, ya que lo que nos dice si es R² o R³ es lo… el número de x, y o z, aquí solo tenemos x y y. Y, bueno, como aquí así a simple vista se podría decir que es cualquier punto en R². |

Luego, las inferencias sobre el significado de los conceptos se reunieron en una nueva matriz llamada "matriz de correspondencias teóricas", y en este arreglo se analizaron detenidamente los modos de pensamiento y las operaciones mentales que intervinieron en la construcción del significado de los conceptos (ver tabla 2).

***Tabla 2.*** Extracto de la Matriz de las correspondencias teóricas en la entrevista al estudiante E1.

| Categorías / Conceptos | Significado | Base de la comprensión (modos de pensamiento) | Operación mental |
|---|---|---|---|
| ombinación Lineal | El estudiante E1 distingue la relación representada por una combinación lineal, y relaciona esta noción con otras en el sistema conceptual. Señala:<br><br>Referente- un vector<br><br>Sentido- que resulta de la suma de múltiplos escalares de otros vectores. | La base de la comprensión que E1 ha referido para dar significado a una **combinación lineal** es el ***modo analítico-aritmético***.<br><br>*"a simple vista vi que, este vector multiplicado por uno y este vector multiplicado por uno, se suman, nos podría dar este…*<br>*[refiere a los vectores del conjunto (1,-3,0), (3, 0, 4), (-2,-3,-4)]*<br>*Entrevistador: Ah, ok. Notaste que, si sumas el segundo vector con el tercero, te da el primero.*<br>*Estudiante: Ajá."*<br><br>*"es independiente, ya que son dos vectores que […] a cualquier vector multiplicado por un escalar no podría dar el otro…"*<br><br>*"se podría decir que es linealmente dependiente, ya que, de acuerdo a éstos… hay escalares que multiplicado por dos vectores pueden generar el tercero."*<br><br>*"Éste no podría ser una base ni éste, ya que son múltiplos y pues, este… más bien éste [señala el conjunto {(-1,3)}] se podría decir que es la base para generar cualquier de estos […] nada más necesitamos uno que, multiplicado por cualquier escalar, de los demás…"* | E1 ***identifica*** un vector que es combinación lineal de otros, principalmente en e modo de pensamiento analítico-aritmético. |

Este procedimiento, se realizó con la finalidad de facilitar la relación de información entre los renglones la matriz de cada estudiante, para elaborar una segunda lectura comprensiva de las inferencias de cada concepto en el sistema conceptual que incluyera los modos de pensamiento y, la lectura vertical de las columnas que dio pie a la descripción de las operaciones mentales y los conceptos del sistema que los estudiantes involucraron en el reconocimiento de la noción de base del espacio vectorial $R^2$ y $R^3$.

La descripción de la comprensión conceptual de los estudiantes se realiza en medida que el significado de cada concepto en el sistema se relaciona con otros en una red de significados que se organiza y se presenta en un "diagrama configuración de los significados", que explicita el proceso que se interpreta (ver figura 2).

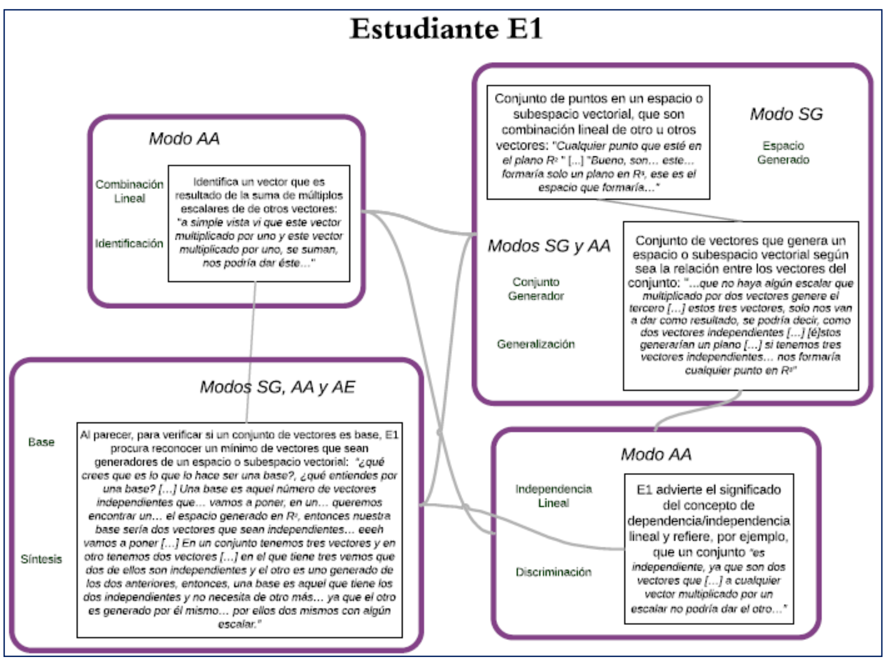


***Figura 2.*** Diagrama de la configuración de los significados del estudiante E1.

A través de la interpretación de la evidencia obtenida de los seis estudiantes del estudio, se pretende desarrollar una explicación sobre la cadena de inferencias que los estudiantes realizan, a partir de los modos de pensamiento, para alcanzar determinado nivel de abstracción de las nociones ya sea sintetizar, generalizar, discriminar o identificar los conceptos del sistema conceptual.

En particular, en el siguiente apartado se describen algunas inferencias asociadas la coordinación de los distintos modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, en el proceso por medio del cual el estudiante E1 sintetiza el sistema conceptual que conduce a la comprensión de la noción de base.

## Conclusiones

Como resultado de la evaluación sistémica de las componentes en la comprensión del concepto de base, la evidencia mostró que el estudiante E1 logró sintetizar las nociones del sistema, llevando a cabo un proceso en el cual:

1) Al parecer fue suficiente advertir en el modo analítico-aritmético el vector que resulta de sumar múltiplos escalares de los vectores en un conjunto, para llegar a construir el concepto de combinación lineal y utilizarlo en la construcción de otros conceptos del sistema conceptual (ver figura 3).

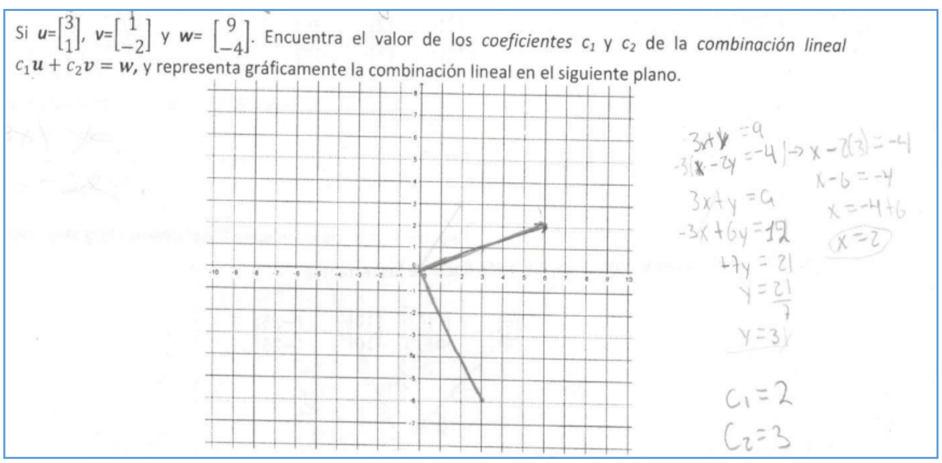


*Figura 3.* Modo analítico-aritmético en la identificación del concepto de combinación lineal.

2) Luego, la evidencia reveló que el estudiante pudo reconocer en el modo sintético-geométrico posibles grupos de combinaciones lineales generadas por diferentes conjuntos de vectores del espacio vectorial (el espacio generado), mientras que fundamentalmente a partir del trabajo realizado en el modo analítico-aritmético, que el estudiante E1 pudo abstraer la relación entre los vectores de un conjunto (independencia/dependencia lineal) (ver tabla 3).

***Tabla 3.*** Modo analítico-aritmético en la discriminación del concepto de independencia lineal.

| | | |
|---|---|---|
| **Independencia lineal**<br><br>Referente- Conjunto de vectores<br><br>Sentido- en los cuales no hay uno que pueda obtenerse como múltiplo escalar de otro(s) en el conjunto. | Con base en el ***modo de pensamiento analítico-aritmético***, el estudiante E1 describe respecto al conjunto {(1, -3, 0), (3, 0, 4), (-2, -3, -4)} que *"es un conjunto dependiente ya que hay escalares que multiplicado por los vectores al final va a dar como resultado otro vector"* y cuando se le pide que lo aclare menciona que: *"a simple vista vi que, este vector multiplicado por uno y este vector multiplicado por uno, se suman, nos podría dar éste…*<br>*Entrevistador: Ah, ok. Notaste que, si sumas el segundo vector con el tercero, te da el primero.*<br>*Estudiante: Ajá."* | La operación mental que se asocia es la *discriminación* debido a que el estudiante E1 identifica diferentes casos en los que un conjunto de vectores es linealmente independiente o linealmente dependiente justificando la relación entre los vectores del conjunto, aunque se considera que E1 no llega a la generalización de éste concepto debido a que no reconoce por ejemplo, que cualquier conjunto de 4 vectores en $R^3$ es linealmente dependiente, y no conecta la solución de un sistema de ecuaciones con la dependencia o independencia lineal. |

3) Así mismo, fue relevante la coordinación de los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético, para que el estudiante pudiera dar cuenta precisa de las condiciones bajo las cuales determinado conjunto era generador o no de un espacio o subespacio vectorial de $R^2$ y $R^3$, es decir, que una vez que se identificó la relación entre los vectores en un contexto algebraico pudo llegar a establecer la relación del conjunto de vectores con el espacio que genera (ver tabla 4).

***Tabla 4***. Modos S-G y A-A en la generalización del concepto de conjunto generador.

| | | |
|---|---|---|
| Conjunto Generador<br><br>Referente: Vector o conjunto de vectores<br><br>Sentido: que genera un determinado espacio o subespacio vectorial con base en las componentes de sus vectores y en la relación entre los vectores que conforman el conjunto. | Se estima que la base de la comprensión del concepto de **conjunto generador** es ***la coordinación de los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético***.<br><br>Dado que el estudiante E1 justifica:<br><br>*"[el conjunto {(1, -3, 0), (3, 0, 4), (-2, -3, -4)}] no puede generar algo en $R^3$ ya que hay un escalar… no todos son independientes, para que se cumpla […] que sea generador de todos, estos vectores tienen que ser independientes […] si genera algo en $R^3$ tiene que ser los tres vectores totalmente independientes, que no haya algún escalar que multiplicado por dos vectores genere el tercero […] estos tres vectores, solo nos van a dar como resultado, se podría decir, como dos vectores independientes […] [é]stos generarían un plano […] si tenemos tres vectores independientes… nos formaría cualquier punto en $R^3$"* | La operación mental relacionada es la *generalización*. Esto se debe a que el estudiante E1, con base en los modos de pensamiento sintético y analítico, advirtió que conjuntos de vectores linealmente independientes o linealmente dependientes, pueden ser generadores de un determinado espacio o subespacio vectorial. |

4) Y finalmente, al haber reconocido el concepto de conjunto generador, el estudiante evaluó, con base en la coordinación de los modos sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, las características particulares de distintos conjuntos de $R^2$ y $R^3$, diferenciando conjuntos de vectores generadores con un mínimo de vectores necesarios para generar un espacio o subespacio vectorial específico, lo que finalmente condujo a establecer las correspondencias entre las nociones germinales que lo llevaron a la comprensión del concepto de base, y a la síntesis del sistema conceptual (ver figura 2).

## Referencias bibliográficas

Chargoy, R. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Dorier, J. L. (1995). Meta Level in the Teaching of Unifying and Generalizing Concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *29* (2), Advanced Mathematical Thinking*,* 175-197. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/3482902

Da Silva, A. y Lins, R. (2002). An analysis of the production of meaning for the notion of basis in linear algebra. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. John Wiley Publishers. Crete: Greece.

Hillel, J. (2002). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra in Question, 23*, 191-207. doi: 10.1007/0-306-47224-4_7

Kú, D., Trigueros, M., Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática, 20* (2), 65-89.

Martínez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Segunda edición (reimpresión 2013). México: Trillas.

Mejía, J. (2011). Problemas centrales del análisis de datos cualitativos. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social, 1* (1), 47-60.

Merriam, S. and Associates, (2002). *Qualitative Research in Practice: Examples for discussion and analysis.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics (10)* 3, 24-41. Canada: FLM Publishing Association.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press. Recuperado de la base de datos Ebrary (10096967).

Sierpinska, A. (2002). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra, 23*, 209-246. doi: 10.1007/0-306-47224-4_8

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra.* Reporte de Investigación. Montreal, Canadá: Concordia University.

Vera-Soria, M. G. (2016). *La comprensión del concepto de base de un espacio vectorial en estudiantes universitarios*. (Tesis doctoral). Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente (ITESO). México.

Weiss, E. (2011). *La hermenéutica. Un enfoque para comprender al otro y para interpretar textos y significados culturales*. Manuscrito inédito.