Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

27 julho 2019

1

Introdução

Um dos grandes objetivos do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocinar.

- O que é raciocinar?
- Quais os aspetos fundamentais da capacidade de raciocínio?
- De que modo pode o professor na sala de aula promover o seu desenvolvimento?

São questões que irei analisar conjugando perspetivas teóricas e exemplos concretos.

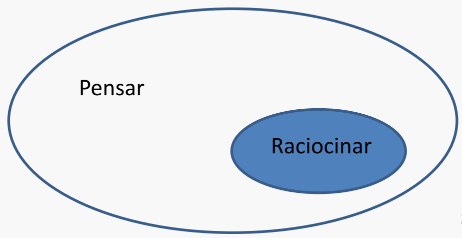
2

Raciocínio

Raciocinar: 1. fazer uso da razão para depreender, julgar ou compreender; 2. encadear pensamentos de forma lógica; 3. apresentar razões; 4. ponderar; reflectir; pensar (Do lat. *ratiocinári*) (Dicionário Porto Editora)

Fazer inferências de forma justificada, ou seja, obter nova informação a partir de informação dada.

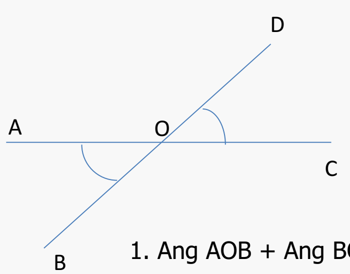
Tipos de raciocínio:
- Dedutivo,
- Indutivo,
- Abdutivo.



3

Raciocínio dedutivo

- **Dois ângulos verticalmente opostos são iguais.**



1. Ang AOB + Ang BOC = Ang Raso (por construção)
2. Ang DOC + Ang BOC = Ang Raso (por construção)
3. Ang AOB + Ang BOC = Ang DOC + Ang BOC (duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si)
4. Ang AOB = Ang DOC (subtraindo a mesma quantidade a ambos os membros de uma igualdade obtém-se uma nova igualdade)

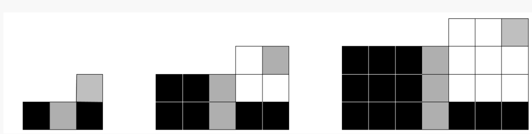
4

Raciocínio dedutivo

- É característico da Matemática, onde ocupa um lugar fundamental.
  - Constitui, "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (**Oliveira, 2002, p. 178**).
- É desenvolvido do geral para o particular, com uma conclusão necessária.
  - Desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros, "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (**Oliveira, 2008, p. 7**).
- Assume a forma de demonstração: "raciocinar dedutivamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (**Ponte, Branco e Matos, 2008, p. 89**).
- Tem principalmente o papel de validação de conhecimento.

5

Raciocínio indutivo



1 2 3 … n

1. O quarto termo quantos quadrados negros tem?
2. E o termo de ordem n, quantos quadrados negros tem?

$$\mathbf{n^2+n}$$

6

Raciocínio indutivo e abdutivo

- A indução é a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares. **(George Pólya, 1954)**
- A abdução é um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência.
- "A abdução, ao fim e ao cabo, não é senão conjetura… é o processo de escolher uma hipótese". **(Charles Peirce, 1839-1914)**

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15(4), 213-221.*

Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática, 101, 37-41.*

Representações

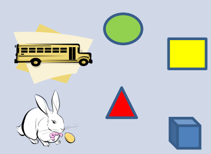
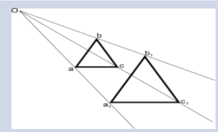
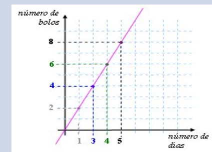
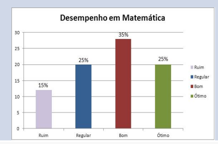
Suporte para raciocinar e para comunicar o raciocínio

- As representações assumem um papel decisivo na aprendizagem: "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 75).
- É impossível aceder directamente ao raciocínio matemático dos alunos—para o conhecer é necessário que estes o comuniquem, através de diferentes representações.
- Trabalhar com diferente representações: "as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação" (ME, 2007, p. 9).

8

Representações

(Bruner, Goldin, Duval)

Representações (externas) básicas	Exemplos		Representações mistas
Ativas	Objetos		
Icónicas	Figuras (representações pictóricas)		
Simbólicas	Linguagem verbal	Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos…	
	Símbolos matemáticos	**1, 3, +, x, ≤,√, ∞, ∫, β…**	

Que lugar para os diferentes tipos de raciocínio?

- Dedutivo
- Indutivo
- Abdutivo

10

Raciocínio - Modelo 1

- Ideia central: Raciocinar matematicamente é um processo dinâmico que envolve conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver a avaliar argumentos.

Conjeturar e generalizar (1-4)

Investigar porquê (5)

Justificar ou refutar (6-9)

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8. Reston, VA: NCTM.*

11

Raciocínio – Modelo 2

Significar
("Sense making")

Indução e Abdução

Dedução

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Formular questões (específicas ou gerais)

Formular estratégias de resolução

Formular conjeturas específicas

Generalizar

Aplicar as estratégias

Testar

Fazer cálculos, usar definições e propriedades matemáticas

Justificar (Informal e formalmente)

Representar

Linguagem natural, pictórica, algébrica, geométrica, estatística…

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, 21(2), 81-110.*

12

Tarefa 2 - Equivalência de frações (10 anos)

Inês: Isto aqui é uma justificação.

…

Tânia: Mas depois na outra já têm aqui uma generalizaçãozinha.

…

Tânia: Já não é para todos.

Joana: Exatamente.

5.

a) Será que $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$? $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$?

Sim.

$0,5 = 0,5$.

b) Dá uma (ou mais) justificações para a tua resposta à pergunta anterior.

$\frac{2}{4} = 0,5$ $\frac{8}{16} = 0,5$

$0,5 = 0,5$

Um número a dividir pelo seu dobro é igual a 0,5.

13

Tarefa 3 - Comparação de frações (10 anos)

Dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, se $a > c$ e $b > d$

Será que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$?

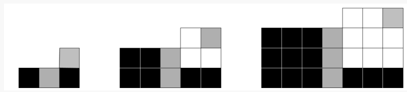
Não Porque o exemplo de $7:4 = 1,75$ e o $5:2 = 2,5$ $1,75 < 2,5$ é de que isso não é verdade.

Tânia: É mais uma justificação, ele vai arranjar um [contra-]exemplo.

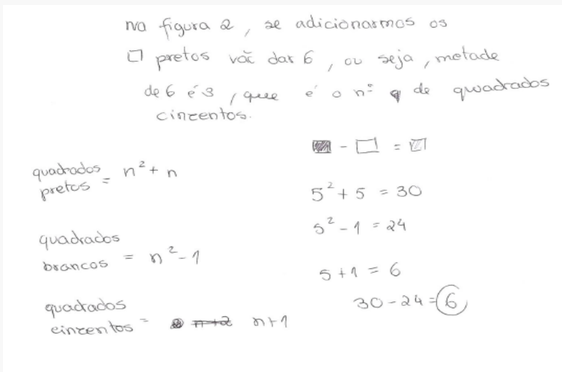
Não é verdade, porque podemos ter $\frac{5}{5}$ e $\frac{3}{3}$. O numerador e o denominador podem ser maiores por exemplo: $\frac{5}{5} = \frac{3}{3}$ e $\frac{7}{7} = \frac{4}{4}$. Mas o resultado é igual.

14

Tarefa 4 - Sequências (13 anos)



Mostra que a diferença entre o número de quadrados pretos e o número de quadrados brancos é igual ao número de quadrados cinzentos.



- Conta os quadrados pretos da fig. 2 (que são 6), mas não se percebe porque determina metade (justificação incorreta).
- Identifica os 3 termos gerais, mas não faz a diferença entre os termos gerais que interessam.
- Mostra que a afirmação é verdadeira, apresentando apenas um exemplo. (justifica com um caso)

15

Tarefa 4 - Sequências

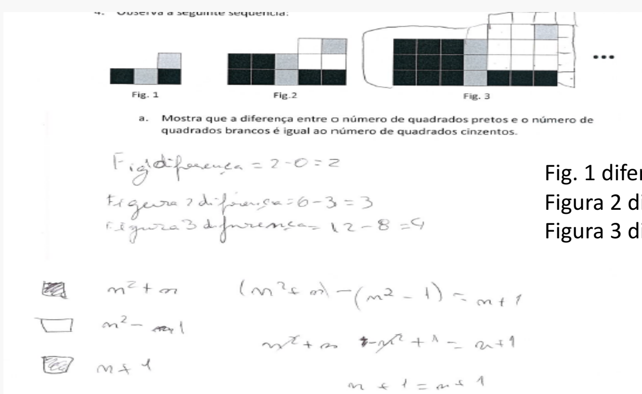


Fig. 1 diferença = 2-0=2
Figura 2 diferença = 6-3=3
Figura 3 diferença 12-8=4

- Faz as diferenças para as três figuras.
- Determina os termos gerais.
- Faz uma verificação algébrica da igualdade pedida.

16

Aula em três fases

1. Introdução da tarefa (promovendo o envolvimento dos alunos).
2. Trabalho autónomo dos alunos (pares, grupos, individual).
3. Discussão coletiva (apresentação e confronto de resoluções, síntese final).

Tarefa 5 - Equações

A Catarina, o Ricardo e a Inês fizeram um registo idêntico ao dos colegas e o crescimento das suas plantas pode ser representado pelas seguintes funções:

Planta da Catarina: $c(x) = 0.6x + 2$
Planta do Ricardo: $r(x) = 2 + \frac{3}{5}x$
Planta da Inês: $i(x) = 1 + 0.6x$

a. Em que dia é que a planta da Catarina tem a mesma altura que a do Ricardo? E do que a da Inês?

b. Atendendo aos resultados obtidos na questão anterior, que relação existirá entre os gráficos das funções c e r? E das funções c e i?

Discussão coletiva

J

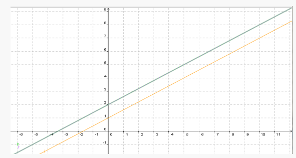
Professora: Porque é que têm de ser duas retas paralelas?

Vasco: Porque o da Catarina e do Ricardo começaram com dois centímetros de altura e vão sempre acrescentar e depois a da Inês começou com um centímetro de altura e a somar.

Professora: E só há... Há outra hipótese das retas não se intersetarem sem serem paralelas?

Vários alunos: Não.

Professora: Não, então, graficamente, nós temos isto.



...

Professora: E ainda quero que o Vasco partilhe connosco aqui uma coisa que observou muito interessante.

Vasco: Como a Catarina e o Ricardo começaram com a mesma altura e como ambas as plantas crescem ao mesmo ritmo, não se vão cruzar, a da Inês como cresce todos os dias...

C

Professora: Não se vão cruzar, estas aqui?!

Vasco: Sim. Então, já estão cruzadas.

Professora: Ah, já estão sobrepostas, coincidentes. E estas duas?

R

Vasco: A da Inês, como todos os dias cresce a mesma altura das restantes e começou com menos um centímetro... Vai ficar sempre mais pequena.

Professora: Vai ficar sempre mais pequena, daí que nunca se intersete. Exatamente, exatamente.

19

Abordagem exploratória - 1

Os **alunos**

- Trabalham em **tarefas** para as quais não têm um método de resolução imediato – para as resolver têm de construir os seus próprios métodos, usando conhecimentos prévios.
- Têm oportunidades para construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas.
- Assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução.
- São chamados a apresentar e justificar os seus raciocínios.

O **professor**

- Em lugar de ensinar diretamente procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar,
- … Propõe aos alunos um trabalho de descoberta, e promove momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva.

20

Abordagem exploratória - 2

- A abordagem exploratória tem dois suportes principais:
  - a escolha de **tarefas** apropriadas, suscetíveis de promover a construção de conceitos, a formulação de estratégias de resolução de problemas, conjeturas e justificações.
  - o estabelecimento de um ambiente de **comunicação na sala de aula** capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos, com relevo para os momentos de discussão coletiva.
- Esta abordagem enfatiza a construção de conceitos, a modelação de situações e também a utilização de definições e propriedades de objetos matemáticos para fazerem raciocínios – generalizar e justificar.
- Presta atenção aos **aspetos computacionais** da Matemática, mas valoriza os **aspetos concetuais** – ou seja, considera importante obter resultados, mas mais importante ainda perceber a estratégia geral que foi usada e a sua justificação.

21

Tarefas para o desenvolvimento do raciocínio

- Têm natureza diversa e com diferentes graus de desafio, com enfâse em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas.
- Incluem questões que permitam uma variedade de processos de resolução.
- Incluem questões que incitem a formulação de generalizações
- Incluem questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução.

22

Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio

- No trabalho autónomo:
  - Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, sem reduzir de modo significativo o desafio da tarefa,
- Na discussão coletiva
  - Encorajar a partilha de ideias nos momentos de discussão coletiva,
  - Explorar desacordos entre alunos, levando-os a argumentar as suas posições,
  - Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique,
  - Solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida.

23

Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio

- Durante todo o trabalho
  - Solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas tanto durante a resolução da tarefa como nos momentos de discussão coletiva,
  - Propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos,
  - Desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões quer pela formulação de generalizações.

24

Conclusão

- O raciocínio é uma capacidade transversal que, embora não exclusiva da Matemática, pode ser promovida de modo muito importante no trabalho em Matemática.
- Vertentes fundamentais do raciocínio em Matemática são as justificações (alicerce do raciocínio dedutivo) e as generalizações (obtidas na sua maioria de forma indutiva).
- O trabalho em torno do raciocínio matemático não é exclusivo das anos de escolaridade mais avançados – pode e deve começar nos primeiros anos.
- Dar maior visibilidade ao desenvolvimento do raciocínio matemático, através de uma **abordagem exploratória**, é um requisito fundamental para um ensino da Matemática com compreensão.