PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO DE ALUMNOS DE QUINTO DE PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE PROPORCIONALIDAD

Primary education students' early algebraical thinking when solving a proportionality task

Burgos, M.[a], Beltrán-Pellicer, P.[b] y Godino, J. D.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Zaragoza

Resumen

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo es diseñar, experimentar y evaluar intervenciones educativas que promuevan formas de razonamiento algebraico en los primeros niveles de educación primaria usando tareas de proporcionalidad. Se informa de la fase de evaluación de una experiencia realizada con un grupo de alumnos de quinto curso de primaria que tienen un primer encuentro con este tipo de tareas, analizando con detalle los procedimientos, representaciones, argumentos y grado de generalización en las respuestas dadas al problema planteado. Como resultado se observa en algunos estudiantes rasgos del nivel 1 de razonamiento proto-algebraico. Se concluye que el uso de tareas introductorias de la proporcionalidad, en nuevos ciclos de experimentación, por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades homogénea y aditiva de la función de proporcionalidad puede permitir que los alumnos progresen hacia niveles superiores de razonamiento algebraico.

Palabras clave: *algebra temprana, niveles de algebrización, razonamiento proporcional.*

Abstract

This manuscript is part of a research project whose main goal is to design, experiment and evaluate educative interventions that promote algebraic reasoning in the first levels of primary school, by using proportionality tasks. We report of the evaluation step of an experiment developed with a group of students in the fifth level of primary school (10-11 years old) that had a first contact with this kind of tasks. We analyse in deep detail the procedures, representations, arguments and generalization level of the answers given for the proposed problem. As a result, we observe in some students traces of level 1 of proto-algebraic reasoning. We conclude that the use of introductory proportionality tasks in new experimental cycle, by means of numerical tables and posing questions for the recognition of the homogeneous and additive properties of the proportionality function, enables the student to achieve higher levels of algebraic reasoning.

Keywords: *early algebra, algebraization levels, proportional reasoning.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza ha despertado gran interés en la comunidad de investigadores en educación matemática. La introducción del álgebra temprana en el currículo de Educación Primaria persigue organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Radford, 2014).

Parte de la propuesta conocida como "early algebra" sugiere que los alumnos en edades tempranas exploren, modelicen, discutan y argumenten sobre relaciones y propiedades matemáticas. Diversas

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2018). Pensamiento algebraico temprano de alumnos de quinto de primaria en la resolución de una tarea de proporcionalidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 181-190). Gijón: SEIEM.

investigaciones muestran la capacidad de los estudiantes de educación primaria para trabajar problemas aritméticos desde un punto de vista algebraico, para identificar relaciones funcionales, representarlas de diversas maneras, generalizarlas y utilizarlas para resolver problemas (Cañadas y Fuentes, 2015; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Molina 2007).

Para Kieran (2004) el razonamiento algebraico en los grados elementales "debería incluir el desarrollo de formas de pensar sobre la relación entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción" (p. 149). En este sentido, el razonamiento proporcional es frecuentemente considerado como ruta de acceso al pensamiento algebraico temprano. Puesto que razón y proporción tratan sobre relaciones cuantitativas entre cantidades, la habilidad para razonar proporcionalmente juega un papel decisivo en el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes (Lim, 2009).

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que tiene un doble objetivo:

- Estudiar nuevas modalidades de intervención educativa que se deberían implementar en los procesos instruccionales para promover el desarrollo del razonamiento proporcional, con estudiantes que tienen su primer encuentro con dicho tema.

Describir las formas de pensamiento algebraico temprano en las prácticas desarrolladas por alumnos de quinto curso de Educación Primaria como consecuencia de las intervenciones educativas implementadas. A continuación, se presenta el marco teórico, el problema de investigación y antecedentes, seguido del método de investigación y diseño instruccional. En la siguiente sección se analizan los resultados de las respuestas dadas por los estudiantes a la tarea de evaluación propuesta. El documento concluye con unas reflexiones finales a modo de síntesis.

OBJETIVO ESPECÍFICO, MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El objetivo específico de esta comunicación es presentar resultados sobre las formas de razonamiento algebraico temprano (proto-algebraicas) manifestadas por alumnos de 5º curso de primaria que han participado en una intervención educativa centrada en el desarrollo del pensamiento proporcional. Dicha intervención sigue un modelo instruccional de tipo mixto en el que el profesor y los estudiantes estudian conjuntamente situaciones introductorias que ponen en juego los contenidos matemáticos pretendidos (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2014).

En este artículo aplicaremos algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007) para analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes. Tales herramientas son, las categorías de objetos matemáticos que propone el EOS, así como los niveles de algebrización de la actividad matemática introducidos en Godino et al. (2014), aplicando los tipos de procesos, medios de representación y grados de generalidad de los objetos matemáticos.

Tipos de objetos matemáticos

Desde la concepción antropológica de la matemática asumida por el EOS, la noción de práctica matemática ocupa un lugar central. Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Las entidades materiales o inmateriales que intervienen en la práctica matemática, sustentando y regulando su realización, son los objetos matemáticos. El EOS propone los siguientes tipos de objetos primarios:

- *Situaciones-problema*: ejercicios y problemas más o menos abiertos, aplicaciones intra-matemáticas o extra-matemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática.

- *Lenguajes*: términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros (gestual, oral, escrito).
- *Conceptos*: entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante descripción o definición (número, punto, recta, media, función).
- *Proposiciones*: propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos*: técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.
- *Argumentos*: enunciados requeridos para justificar o demostrar las proposiciones o para explicar los procedimientos.

En el EOS se dice que un objeto es extensivo si interviene en la práctica matemática como un caso particular, mientras que es intensivo si interviene como una clase o tipo de objetos; son las entidades resultantes de los correspondientes procesos de particularización y generalización.

Niveles algebraicos de razonamiento matemático

La necesidad de promover el razonamiento algebraico en los distintos niveles de Educación Primaria y Secundaria (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Chevallard y Bosch, 2012; Kieran, 2004; Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2011) requiere la identificación de los rasgos característicos del pensamiento algebraico, dado que dependiendo de cómo se conciba el álgebra escolar se tomarán decisiones relativas a su introducción temprana y las estrategias instruccionales a seguir.

En Godino et al. (2014) se propone un modelo de razonamiento algebraico para la Educación Primaria, estableciendo criterios que permiten identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de algebrización) y distinguirla de los progresivos niveles de algebrización. Los criterios utilizados para delimitar los distintos niveles se basan en la clase de objetos y procesos matemáticos involucrados: tipos de representaciones usadas, procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente.

- *Nivel 0*. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
- *Nivel 1*. Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de los naturales y la igualdad como equivalencia.
- *Nivel 2*. Se usan representaciones simbólico – literales para referir a los objetos intensivos reconocidos, los cuales están ligados a la información espacial, temporal y contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$.
- *Nivel 3*. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax+B=Cx+D$.

Los niveles de algebrización se atribuyen a la actividad matemática que desarrolla el sujeto que resuelve un problema o tarea matemática, no a la tarea matemática en sí, que puede ser resuelta de distintas maneras, poniendo en juego una actividad algebraica diferente.

La aplicación de los niveles de algebrización a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a proporcionalidad, aporta criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional.

Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) distinguen tres tipos de significados del objeto proporcionalidad: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional, que además se complementan con un significado informal-cualitativo, centrado en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva, por ejemplo, de la semejanza de formas geométricas.

El significado aritmético (nivel 0 de algebrización) se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división). En la práctica intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; no intervienen objetos y procesos algebraicos. El significado proto-algebraico está centrado en la noción de proporción, de manera que el reconocimiento del valor unitario en un procedimiento de reducción a la unidad, y el uso de representaciones diagramáticas de soluciones se pueden calificar de proto-algebraicas y, por tanto, de nivel 1 de algebrización. Por otro lado, la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación, la actividad de algebrización que se realiza es proto-algebraica de nivel 2, según el modelo de Godino et al. (2014), ya que la incógnita aparece despejada en un miembro de la ecuación (Ax=B).

En la última década, diversos autores (Bentley y Yates, 2017; Martínez, Muñoz, Oller y Pecharromán, 2015; Miyakawa y Winslow, 2009; Silvestre y Ponte, 2011) se han preocupado por analizar y proponer diseños didácticos apropiados para introducir la proporcionalidad en Educación Primaria. Miyakawa y Winslow (2009) presentan un estudio comparativo de dos modelos didácticos ampliamente usados en educación matemática, apoyados en el análisis de experiencias de enseñanza de iniciación a la proporcionalidad en el contexto de la semejanza de figuras. Silvestre y Ponte (2011) asumen en su experiencia didáctica la perspectiva de que el aprendizaje de la proporcionalidad directa en 6° año de escolaridad debe centrarse en la comprensión de la estructura multiplicativa de una relación proporcional, lo que se consigue mediante la resolución de problemas en el contexto de la interacción social en pequeños grupos y la discusión colectiva con todo un curso. Por otro lado, Bentley y Yates (2017) comparan los resultados obtenidos por dos grupos de estudiantes de 12 años, cuando resolvían problemas de valor faltante de proporcionalidad, y concluyen que la instrucción basada en ejemplos resueltos (de reducción a la unidad) tuvo un gran impacto en la habilidad de los estudiantes para razonar proporcionalmente.

MÉTODO

Se trata de un experimento de enseñanza concebido en el marco de las investigaciones de diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008), las cuales, según (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013) se relacionan con la ingeniería didáctica (Artigue, 1989), aplicando en nuestro caso, el EOS como teoría base. En este trabajo, por razones de espacio, solo reportamos resultados de la fase de evaluación de un primer ciclo de experimentación, aplicando un método mixto, cuantitativo y cualitativo (Castro y Godino, 2010).

Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La población sobre la que se centra la investigación son estudiantes de primaria que tienen su primer encuentro con situaciones-problema que ponen en juego la noción de proporcionalidad. La muestra objeto de estudio está constituida por un grupo de 23 estudiantes (13 niñas y 10 niños) de quinto curso de Educación Primaria (10-11 años de edad). La experiencia se llevó a cabo en un centro público de enseñanza de Educación Infantil y Primaria durante el curso 2016-2017. La selección de la muestra fue intencional, atendiendo a la disponibilidad del centro escolar y de los docentes de este.

Las sesiones de investigación se desarrollaron en el tiempo (50 minutos) y la distribución habitual de la clase, durante las dos últimas semanas del curso académico. De manera previa a las sesiones, los alumnos no habían trabajado con problemas que proporcionasen a los alumnos un concepto intuitivo de proporción. Después de presentar el contexto en la primera sesión, la investigadora facilitó a los alumnos una hoja de trabajo con las tareas introductorias, que se trabajarían durante las siguientes dos sesiones. En el diseño de las tareas se tuvieron en cuenta las recomendaciones de diversas investigaciones que sugieren un primer acercamiento intuitivo al concepto de proporcionalidad, recurriendo al uso de factores multiplicativos y tablas numéricas. Así, por medio de cuestiones dirigidas, iniciamos el razonamiento proporcional a través de razones sencillas (doble, mitad, etc.) y el reconocimiento de la propiedad aditiva de la función de proporcionalidad, por medio del registro tabular. El alumno debía reflexionar sobre si una situación es de tipo proporcional o no, movilizando el razonamiento proporcional en contextos en los que la constante de proporcionalidad no es necesariamente un número entero. En la segunda parte de la hoja de trabajo, se introdujo también el concepto de constante de proporcionalidad a través de las tablas de proporcionalidad, y el procedimiento de reducción a la unidad.

Al acabar cada actividad se discutieron las ideas de forma grupal, centrando la atención en el concepto de proporcionalidad y las propiedades cuya comprensión se perseguía desarrollar con cada tarea.

Instrumento de recogida de datos

La situación-problema planteada a los estudiantes se basa en la tarea de ampliación del puzle de Brousseau (1997). Esta tarea forma parte de una secuencia de 65 lecciones experimentadas por Guy y Nadine Brousseau sobre fracciones y números decimales (Brousseau, 1997, Capítulo 4).

> En la figura se presentan las piezas de un puzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Queremos construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm. ¿Sabrías que medida hay que darle a cada lado? Explica cómo lo has obtenido.

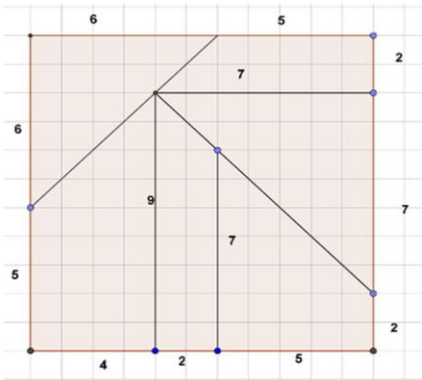


Figura 1. Situación del puzle

RESULTADOS

Métodos de solución y niveles de algebrización

Para evaluar el grado de aprendizaje logrado por los estudiantes se definieron dos variables cuantitativas y variables cualitativas.

Las variables cuantitativas refieren al grado de corrección de la respuesta y al grado de corrección de las explicaciones dadas por los estudiantes en las tareas de evaluación. En ambos casos se ha asignado una puntuación de 0, 1, o 2 puntos si la respuesta es incorrecta (o el alumno no responde), parcialmente correcta o correcta, respectivamente. Se consideró correcta la solución cuando el alumno obtuvo apropiadamente las cinco medidas desconocidas en el puzle de cartulina y parcialmente correcta cuando determinó adecuadamente un mínimo de tres medidas de este. En otro caso, se consideró incorrecta. Por otro lado, una explicación se calificó como correcta siempre que la secuencia argumentativa se refiriese a la relación de proporcionalidad entre las medidas de la maqueta y las medidas del puzle en cartulina; parcialmente correcta cuando hacía referencia a la multiplicación por la constante sin argumentar de qué manera se había obtenido o por qué se procedía de esta forma; e incorrecta en otro caso.

Las variables cualitativas refieren, con base a nuestro marco teórico, a la presencia en la práctica matemática de determinados tipos de objetos, como son, argumentos, procedimientos, tipos de lenguaje y representaciones, así como el grado de generalidad logrado. La Tabla 1 resume las frecuencias en el grado de corrección de la solución y justificación a dicha tarea.

Tabla 1. Frecuencias absolutas y relativas (porcentajes) de las variables vinculadas al grado de corrección

Grado de corrección	Solución (n=23)	Justificación (n=23)
No contesta	3 (13,04)	8 (34,78)
Incorrecta	4 (17,39)	2 (8,70)
Parcialmente correcta	7 (30,43)	10 (43,48)
Correcta	9 (39,13)	3 (13,04)

El procedimiento más seguido por los alumnos para resolver la tarea es el de reducción a la unidad; es decir, encontrar la razón unitaria: nueve de los veinte alumnos lo usaron de forma exclusiva y cuatro más lo combinaron con estrategias aditivas. Un ejemplo de ello puede verse en la Figura 2.

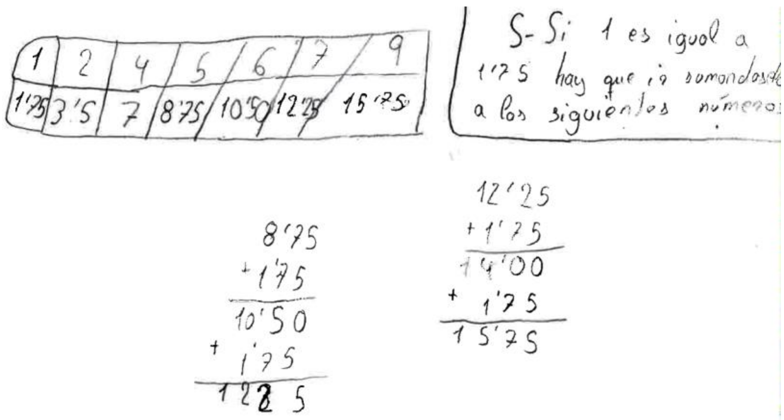


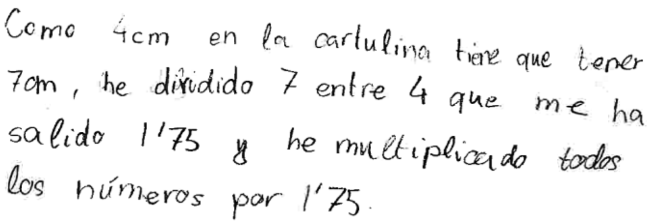
Figura 2. Estrategia mixta de resolución

Casi todos los alumnos (dieciocho de los veinte que respondieron a esta tarea) usaron el registro tabular, pero de ellos, solo dos lo utiliza de forma exclusiva como respuesta a la tarea sin especificar cómo habían llegado a completar la tabla. La Tabla 2 recoge los tipos de procedimiento empleados por los alumnos y sus frecuencias.

Tabla 2. Tipos de procedimiento y frecuencias absolutas y porcentajes

Tipos de procedimiento	Frecuencias (n=20)
Aritmético	4 (20)
Tabular	2 (10)
Reducción a la unidad	9 (45)
Aritmético y reducción a la unidad	4 (20)
Proporciones	1 (5)

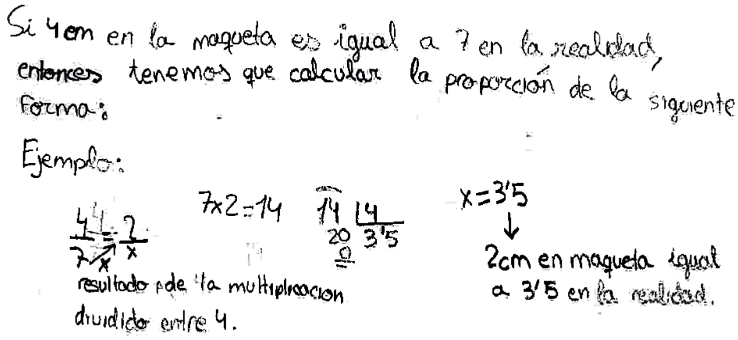
De los veinte alumnos que habían resuelto la tarea, 5 (es decir, la cuarta parte) no lograron justificar la forma en que habían obtenido las medidas del puzle. Dos alumnos que usaron una argumentación de orientación exclusivamente aritmética lo hicieron de forma incorrecta. En ambos casos los estudiantes interpretaron que el puzle en realidad era el doble del puzle en la maqueta, y, por tanto, las medidas deberían ser el doble. Por otro lado, la mayoría de los alumnos que justificaron apropiadamente el proceso seguido para obtener las medidas del puzle en cartulina, (9 de los 15) hicieron referencia al factor de proporcionalidad (escala) que habían averiguado a partir de las medidas conocidas correspondientes al puzle en la maqueta (lado de 4 cm) y su respectiva en el puzle en cartulina (lado de 7cm). Las demás distancias las obtuvieron después multiplicando por dicho factor (1,75), tal y como muestra el ejemplo de solución en la Figura 3. Se consideraron como incompletas aquellas justificaciones del tipo "multiplico por 1,75", donde no se explicitaba la forma de obtener la constante de proporcionalidad, ni el significado de los números que intervienen.



Como 4cm en la cartulina tiene que tener 7cm, he dividido 7 entre 4 que me ha salido 1'75 y he multiplicado todos los números por 1'75.

Figura 3. Justificación a la tarea del puzle

Llama la atención la respuesta dada por un alumno (Figura 4) en la que cada medida se obtiene como valor faltante en una proporción, establecida entre las medidas del puzle en la maqueta y el puzle que se pretende construir en la realidad, siendo en cada caso una de las razones 4/7. Además, dicho alumno recurre a un simbolismo que no se le había introducido antes en clase (según confirmó el tutor del grupo).



Si 4cm en la maqueta es igual a 7 en la realidad, entonces tenemos que calcular la proporción de la siguiente forma:

Ejemplo:

$\frac{4}{7} = \frac{2}{x}$ 7x2=14 14 | 4 20 3'5 0 x=3'5

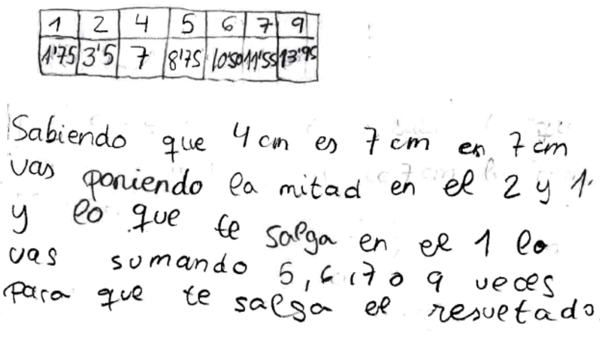
resultado de la multiplicación dividido entre 4.

2cm en maqueta igual a 3'5 en la realidad.

Figura 4. Fragmento de la solución propuesta por un alumno basada en razones

Cuatro alumnos ofrecieron una justificación que hemos calificado de tipo "mixto". En ella obtienen la medida del puzle en cartulina que corresponde a 1 cm del puzle maqueta, pero no recurren a este valor como factor. A veces obtienen dicho valor de forma directa dividiendo los 7 centímetros del real entre los 4 centímetros de la maqueta, y en otras ocasiones lo obtienen después de dividir por la mitad dos veces la medida 7 cm que corresponde a los 4 cm de la maqueta (Figura 5).

Casi todos los alumnos, 18 de los 20 que realizaron la tarea, usaron el registro tabular: 4 lo usaron de forma exclusiva y el resto de forma conjunta con el lenguaje natural y/o numérico. En estos casos, las tablas eran utilizadas para organizar los datos obtenidos o justificar la relación entre las medidas. Además, el alumno que resolvió la tarea del puzle por medio de proporciones recurrió al símbolo literal "x" para representar el valor faltante en cada proporción (Figura 4).



1	2	4	5	6	7	9
1'75	3'5	7	8'75	10'50	11'55	13'95

Sabiendo que 4 cm es 7 cm en 7 cm vas poniendo la mitad en el 2 y 1 y lo que te salga en el 1 lo vas sumando 5, 6, 7 o 9 veces para que te salga el resultado.

Figura 5. Justificación con orientación mixta

Respecto al grado de generalidad de la actividad matemática desarrollada, es importante notar que el 55% de los alumnos que efectuaron la tarea, consiguieron expresar la regla general que les permitía obtener las distintas distancias en el puzle de cartulina a partir de las correspondientes distancias en el puzle modelo, a través de la constante de proporcionalidad. Un 25% incluyeron de forma exclusiva una tabla donde se relacionaban las medidas sin desarrollar ninguna otra práctica discursiva, y un 15% trabajaron con números particulares con relaciones doble-mitad infructuosas (puede verse el ejemplo en la Figura 6).

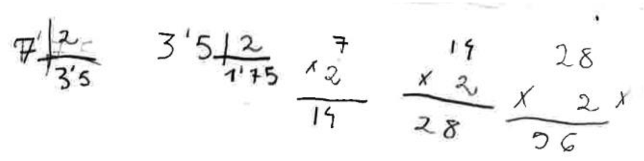


Figura 6. Solución incorrecta de tipo aritmético

Nivel de algebrización

Para determinar el nivel de algebrización de la actividad desarrollada, analizamos los tipos de objetos (números particulares, tablas, clase de medidas del puzle en cartulina), las transformaciones aplicadas sobre objetos (cálculos), las representaciones usadas (lenguaje natural, numérico, tabular o simbólico), y los procesos de generalización implicados. En base a los datos que hemos recogido y presentado de cada uno de estos aspectos, casi todos los alumnos, respondieron a la tarea por medio de reducción a la unidad y la mayoría expresaron la regla general en base a ésta. Cuando se reconoce la generalidad, se hace en lenguaje natural. Así, concluimos que la actividad matemática desarrollada por la mayoría de los alumnos (15 de los 20) se puede considerar proto-algebraica de nivel 1 de algebrización. La actividad desarrollada por el alumno recogida en la Figura 4 se considera de nivel 2 de algebrización, por cuanto interviene la variable expresada en lenguaje simbólico-literal, se reconoce la generalidad dada por la igualdad de razones y se plantean ecuaciones del tipo $\frac{4}{7}=\frac{A}{x}$, que se resuelven multiplicando en cruz, para cada medida *A* desconocida en el puzle a construir. Los cuatro alumnos que resolvieron de forma incorrecta la tarea realizaron una actividad aritmética (nivel 0 de algebrización) como en el ejemplo de la Figura 6.

CONCLUSIONES

El carácter algebraico de una práctica matemática no viene dada de forma exclusiva por el uso del simbolismo algebraico, sino que se reconoce en la presencia de ciertas formas de razonamiento. Como afirma Radford (2003), los estudiantes de los primeros niveles educativos pueden expresar tipos de objetos y procesos algebraicos a través de registros distintos del simbólico, en particular, pueden recurrir al lenguaje ordinario, gráfico, tabular o incluso gestual. El sentido algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades debidamente planificadas, que, partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido, vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico (Godino et al, 2014, p. 217).

Diversos autores (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Streefland, 1985) apoyan la pertinencia de una secuencia didáctica que permita avanzar desde un conocimiento de naturaleza intuitiva y cualitativa de estructura aditiva (pre-proporcional), hacia un conocimiento cuantitativo de estructura multiplicativa, haciendo uso de procesos que fomenten la manifestación de estrategias de construcción progresiva que permita encaminar hacia el proceso de consolidación del razonamiento proporcional.

Con relación a la tarea del puzle que hemos usado en nuestra investigación, Miyakawa y Winslow (2009) afirman, "parece deducirse de los experimentos previos realizados por Brousseau y colegas que, a pesar de la cuidada preparación en las lecciones previas, los estudiantes tienden de manera espontánea a construir las piezas mayores añadiendo 3 cm a todos los lados conocidos (ya que 7 cm es 3 cm más que 4 cm)." En nuestro estudio, no hemos encontrado evidencias de este tipo, posiblemente porque la realización de esta tarea fue precedida de otras introductorias sobre proporcionalidad aritmética. La estrategia de resolución predominante fue la reducción a la unidad. Algunos estudiantes identificaron el valor unitario después de haber realizado ciertas operaciones aritméticas (dividir por dos de forma sucesiva). En otras ocasiones, recurrían a una estrategia aditiva para determinar las medidas, sumando el valor unitario tantas veces como fuese preciso.

En relación con los objetivos de nuestra investigación, el análisis global de la experiencia realizada nos permite reconocer formas de pensamiento proto-algebraico en las prácticas desarrolladas por alumnos de quinto curso de Educación Primaria cuando se enfrentan a una tarea de proporcionalidad directa. El uso de tareas introductorias sobre proporcionalidad, por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades homogénea y aditiva de la función de proporcionalidad, puede permitir que los alumnos progresen hacia niveles superiores de razonamiento algebraico. Por otro lado, un modelo de colaboración entre profesor y estudiantes, en relación a la situación-problema que se pretende resolver y el contenido matemático puesto en juego, permite identificar y resolver conflictos semióticos, aumentando el grado de implicación del alumnado y la apropiación progresiva de los objetos implicados en la proporcionalidad.

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolla en el marco del proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI), del Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía) y dentro del Grupo «S119-Investigación en Educación Matemática» financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

Referencias

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook on research of teaching and learning* (pp. 296-333). New York: McMillan.

Bentley, B. y Yates, G. (2017). Facilitating proportional reasoning through worked examples: Two classroom-based experiments. *Cogent Education, 4*, 1297213.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des mathématiques, 21*(3), 247-304.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-706). Charlotte, NC: Information Age Publishing; Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En, M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (p. 99). Ciudad Real: SEIEM.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J. L. Dorier, y A. Robert (Coord.), Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, special issue, 13-33.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. *CERME 9, TWG 17: Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research*. (Versión ampliada en español: Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica. Universidad de la Sabana, Colombia).

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi M.R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *CERME 8*, Turquía.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge.

Kieran, C. (2004). *Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Lim, K. H. (2009). Burning the candle at just one end: Using nonproportional examples helps students determine when proportional strategies apply. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(8), 492-500.

Martínez, S., Muñoz, J. M., Oller, A. M. y Pecharromán, C. (2015). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En C. de E. de la J. de C. y León. (Ed.), *Congreso las Nuevas Metodologías en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Miyakawa, T. y Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*, 199-218.

Molina, M. (2007). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores, P. y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 53-70). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: SEIEM.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics *Education Research Journal, 26*, 257-277.

Ruiz-Munzón, N. Bosch, M. y Gascón (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD*. (pp. 743-765). III Congreso Internacional sobre la TAD.

Silvestre, A. I. y Ponte, J. P. (2011) Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía, 23*(59), 137-158.

Streefland, L. (1985). Search for roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards... a theory) part II: the outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.

Wilhelmi, M. R. (2017). Didáctica del álgebra. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 17-23). Zaragoza: SEIEM.