

COMPONENTES DEL SENTIDO ESPACIAL EN UN TEST DE CAPACIDAD ESPACIAL

Components of space sense in a space capacity test

Cruz, A.^a y Ramírez, R.^a

^aUniversidad de Granada

Resumen

En este estudio se presentan las componentes del sentido espacial en base al análisis de la literatura e investigaciones relevantes sobre el tema. Con estas componentes, se hace un primer estudio exploratorio sobre las características presentadas por los modelos geométricos y las seis figuras que componen algunos ítems de un test que mide la capacidad visual. Se presenta una caracterización que sirve para analizar y mostrar la relación existente entre las propiedades de los modelos geométricos de cada ítem del test y sus respectivas figuras, y los aciertos y errores presentados en su aplicación por un grupo de estudiantes.

Palabras clave: *componentes del sentido espacial, geometría, prueba, relaciones geométricas, sentido espacial.*

Abstract

In this research, the components of spatial sense are presented based on the analysis of literature and relevant research on the subject. With these components, a first exploratory study is carried out on the characteristics of the geometric models and the six figures that are part of some items of a test that measures visual capacity. A characterization is presented that serves to analyze and show the relationship between the geometric models' properties of each item with their respective figures, and the successes and errors presented in its application by a group of students.

Keywords: *components of spatial sense, geometry, test, geometric relations, spatial sense.*

INTRODUCCIÓN

El objetivo de la enseñanza de la matemática, especialmente de la geometría, es que los estudiantes y los ciudadanos en general se ubiquen y desplacen eficientemente en el medio en que se desenvuelven a través de herramientas útiles. Por lo que se hace fundamental, en la enseñanza de los primeros niveles escolares, el desarrollo del sentido espacial, ya que proporciona a los estudiantes, nuevos caminos para pensar y hacer matemática por medio de la visualización (Flores, Ramírez y Del Río, 2015). Esta noción implica que los conceptos geométricos se articulen a través de la conexión de sus elementos, lo que permite elaborar razonamientos bien estructurados (Clements y Battista, 1992).

En esta comunicación se hace una revisión conceptual del sentido espacial y se explicitan sus componentes (elementos geométricos, relaciones, propiedades y movimientos). Luego, se relacionan dichos componentes con el uso de las habilidades de visualización que especifica Del Grande (1990), para realizar un análisis de las características geométricas presentes en los ítems de un test utilizado frecuentemente para evaluar la capacidad visual. Para esto, se realiza una exploración de las propiedades geométricas de los ítems en los que se han detectado mayores dificultades en su aplicación.

Esta comunicación pretende aportar información sobre la conexión entre las componentes del sentido espacial y las respuestas dadas por un grupo de estudiantes en algunos ítems y comprender la influencia de éstos en los resultados obtenidos.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El entorno geométrico manifiesta la relación entre aspectos de la visualización y el aprendizaje de contenidos geométricos (Guillén, 2010; Gutiérrez, 1996). Así también, en relevantes recopilaciones de investigaciones (Battista, 2007; Bishop, 1983) se han destacado los conceptos y las habilidades como dos elementos principales en el desarrollo del sentido espacial.

El sentido espacial es un conjunto complejo de competencias interconectadas (Lea, 1990) que interactúan necesariamente para relacionarse con el espacio. Lupiañez y Rico (2015) plantean que el sentido espacial es un campo del sentido matemático, mientras que otros autores lo definen como:

La competencia del sujeto para registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos. Se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas (Flores, Ramírez y Del Río, 2015, p. 129).

En lo descrito anteriormente sobre el sentido espacial, aparece un elemento común relativo a un enfoque funcional de la enseñanza de la geometría. Todos los estudiantes deben desarrollar el sentido espacial, siendo un objetivo básico de la enseñanza y aprendizaje de la geometría a través de actividades espaciales integradas en los planes de estudio (Bishop, 1983), de oportunidades para el uso de vocabulario espacial en el lenguaje, del fomento de habilidades espaciales, de ejemplos concretos enlazados a experiencias previas, del seguimiento de dificultades y errores de los estudiantes y del establecimiento de la tecnología (Diezmann y Lowrie, 2009). Su desarrollo, se muestra cuando los estudiantes son capaces de identificar, analizar y describir las características y propiedades de las figuras de dos y tres dimensiones con criterios comunes y propios, en la localización y descripción de posiciones y trayectorias, en la descripción de invariantes y relaciones entre cuerpos y figuras; y en la aplicación e identificación de transformaciones, composiciones y descomposiciones geométricas (Lupiañez y Rico, 2015).

Esto brinda expectativas en el cumplimiento de los objetivos que se presentan en toda la educación preescolar y primaria referidos dentro del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), al desarrollo de dicho campo y reconocimiento de la geometría como un medio para describir y modelizar el mundo físico, lo que se relaciona con la orientación y visualización espacial. Por ejemplo, en el estándar de Geometría de este documento curricular, se explicita que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas; localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación; aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas; y utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas (NCTM, 2000, p. 43).

Esto tiene relación con lo que plantea Hershkowitz (1990) sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, que éstos han sido abordados en dos modos clásicos: en ver la geometría como la ciencia del espacio y como estructura lógica donde el aprendiz puede conseguir un soporte para la estructura matemática. El primero, intenta desarrollar conocimientos sobre las figuras, formas y sus relaciones como elementos que ayudan a situarse en el espacio. El segundo, enfatiza que estos elementos son completamente abstractos, aunque tengan referentes concretos, por lo que el

razonamiento con ellos se puede hacer de manera formal, como se ha estado empleando en la enseñanza siguiendo leyes de la lógica tal como hizo Euclides. Este doble enfoque relaciona estrechamente la enseñanza de la geometría con el desarrollo del sentido espacial (Ramírez, 2012).

Esto, además coincide con lo que Flores, Ramírez y Del Río (2015) plantean sobre que, el sentido espacial requiere generar una amplia red de imágenes de los conceptos geométricos para su aprendizaje, acompañada del descubrimiento y la práctica de destrezas para ubicarlos en el espacio, percibirlos y representarlos de diversas formas. Por lo que distinguen las siguientes componentes del sentido espacial:

El manejo de conceptos geométricos. Hace referencia al conocimiento de las características y propiedades de las formas geométricas, al reconocimiento y establecimientos de relaciones geométricas y a la ubicación y movimientos de ellas en el plano o en el espacio. El conocimiento de características y propiedades consiste en identificar las formas a través del nombre, la definición y diferentes representaciones, definir las formas y proponer contraejemplos. El reconocimiento y establecimiento de relaciones geométricas, en apreciar cualidades en las formas y cuerpos geométricos como la congruencia, simetría, igualdad o equivalencia, y características de clasificación y diferenciación. La ubicación y movimientos son elementos dinámicos que consisten en disponer de referentes para situar los elementos en el plano y espacio, conocer y saber llevar a cabo los movimientos, detectar regularidades o los elementos que resultarían invariantes al moverlos.

Las destrezas para visualizar estos conceptos (orientación y visualización). Hace referencia especialmente a la orientación y visualización de elementos geométricos en el espacio, donde los estudiantes deben localizar y describir las relaciones espaciales entre los elementos que componen su entorno (Flores, Ramírez y Del Río, 2015, p. 131).

La orientación se define como la destreza para comprender cómo están dispuestos los elementos en el espacio, y recordarlos sin confusión adoptando diferentes perspectivas. Es crear una representación mental de los elementos que permita identificarlos cuando se cambien las condiciones (Bishop, 1983).

Se señala a la visualización como una componente transversal que mediante el establecimiento de conexiones entre los elementos del primer componente descrito, se incorporan sus destrezas lo que contribuye a su mejora para lograr un dominio geométrico funcional, es decir, facilitar la ubicación y el reconocimiento de relaciones geométricas y espaciales. Gutiérrez (2006) define la visualización como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos.

De acuerdo con lo que plantean Xistouri y Pitta-Pantazi (2006), tanto la visualización como la orientación son dos componentes principales de las habilidades espaciales que no sólo están correlacionadas, sino que la disociación entre estas dos es bastante difícil (Kozhevnikov y Hegarty, 2001; Zacks, Mires, Tversky y Hazeltine, 2002). Por tanto, ambas componentes o destrezas se consideran esenciales para el desarrollo del sentido espacial y no se pueden entender de un modo aislado.

Para discutir la influencia de la caracterización geométrica de los ítems en el rendimiento visual de los estudiantes, se caracterizan las habilidades recopiladas por Del Grande (1987, 1990), las que se describen a continuación:

- Coordinación ojo-motor. Coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.
- Percepción figura-contexto. Reconocer una figura asilándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos.

- Conservación de la percepción. Reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, textura...) aunque cambie de posición y deje de verse por completo.
- Percepción de la posición en el espacio. Relacionar un objeto en el espacio y respecto a uno mismo; identificar figuras congruentes bajo traslaciones, giros y volteos.
- Percepción de las relaciones espaciales. Identificar correctamente las relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc).
- Discriminación visual. Identificar las semejanzas y diferencias entre varios objetos independientemente de su posición.
- Memoria visual. Recordar con exactitud objetos o propiedades y relacionarlos con otros. Memoria fotográfica.

Cabe destacar que en el seno del SEIEM, destacadas revisiones de la literatura de investigación sobre visualización han respaldado el interés y la vigencia de este campo de investigación en la educación matemática (Fernández, 2013; Guillén, 2010). Específicamente algunos de estos trabajos se han focalizado en aspectos cognitivos asociados a las habilidades de visualización (Escrivá, Beltrán-Meneu, Gutiérrez y Jaime, 2016; Ramírez, Beltrán-Meneu, Jaime y Gutiérrez, 2016; Ramírez, Flores y Castro, 2010; Ramírez, Flores y Castro, 2012). Así también, en revisiones de la literatura de investigación se considera aún relevante investigar sobre el sentido espacial (Jones y Tzekaki, 2016).

METODOLOGÍA

Este trabajo se enmarca en un estudio previo realizado a 331 estudiantes (grupo experimental y grupo control) de segundo, tercer y cuarto año de la educación secundaria para el análisis de la influencia del género en el talento matemático y la capacidad espacial. El grupo experimental compuesto por 145 estudiantes (105 hombres y 40 mujeres) que participaban en un proyecto para estimular a los matemáticamente talentosos (ESTALMAT) y que fueron elegidos por su desempeño en la resolución de problemas no rutinarios y entrevistas personales. El grupo control, compuesto por 186 estudiantes (97 hombres y 89 mujeres) lo formaban estudiantes de tres centros de secundaria, de los que ninguno estaba considerado como talento matemático. En esta comunicación se presentan los resultados de la muestra completa, sin distinción de sexo ni talento matemático.

En dicho estudio se utiliza la prueba de Aptitudes Mentales Primarias (PMA) (Thurstone y Thurstone, 1976) que evalúa 5 de 7 aptitudes: comprensión verbal, comprensión espacial, razonamiento general, comprensión numérica y fluidez verbal. Específicamente, a los estudiantes antes mencionados se les aplica el Test Factor E que permite la evaluación de la visualización estática, la que se define como “la aptitud para interpretar y reconocer objetos que cambian de posición en el espacio, manteniendo su estructura interna”. El Test se constituye de 20 ítems, en que cada uno presenta un modelo geométrico plano y seis figuras similares en distintas posiciones, como se muestra en el ejemplo de la Figura 1. En un tiempo limitado de 5 minutos los estudiantes debían determinar cuál o cuáles figuras coincidían con el modelo al aplicarle un giro en el plano.



Figura 1. Ejemplo de ítem, Test Factor E

En este trabajo como estudio exploratorio, se realiza una caracterización geométrica de los modelos de los ítems que presentan un porcentaje de acierto más bajo en su aplicación. Se realiza primero una caracterización de cada uno, a partir de las componentes del sentido espacial, en donde se

identifican los elementos que componen al modelo y sus figuras, y el número total de ellos. Se identifica el cambio de posición que muestra cada figura, ya sea con un giro y/o simetría respecto al modelo y se mide el ángulo de giro, cuando corresponda. En segundo lugar, se analiza cuál es la relación existente entre el porcentaje alto de respuestas incorrectas y las características geométricas de las figuras, en cuanto a los elementos presentes y las destrezas requeridas (orientación y visualización).

Se considerará, la puesta en juego de determinadas habilidades para comparar la componente relativa a la visualización con la caracterización geométrica de las tareas presentadas en los ítems del test, a través del análisis de los elementos, las relaciones y los movimientos implicados.

RESULTADOS

En este apartado se muestra el número de respuestas correctas e incorrectas de la aplicación del test, resumidas en la Tabla 1. En la tabla se puede observar que a partir del ítem 10, va aumentando la frecuencia de los estudiantes que no responden, lo que puede ser ocasionado por la limitación de tiempo asignado para el desarrollo del test. Se subraya que los ítems 7, 11, 15 y 16 tienen un porcentaje de acierto bajo el 0.60 % respecto al total de estudiantes que contestaron (aciertos y fallos) y que en los ítems 18 y 20 el porcentaje de error es mayor que el de aciertos. Atendiendo a esta información, seleccionamos los 6 ítems sombreados en la Tabla 1 para su análisis y relación, ítems que obtuvieron menor porcentaje de aciertos respondidos.

Tabla 1. Número de estudiantes con fallos, acierto y preguntas no contestadas

Ítems	Fallos	No Contestadas	Aciertos	Aciertos/Respondidas
1	67	6	258	0,79
2	78	8	245	0,76
3	101	12	218	0,68
4	65	8	258	0,80
5	101	7	223	0,69
6	67	18	246	0,79
7	139	25	167	0,55
8	53	58	220	0,81
9	81	57	193	0,70
10	69	84	178	0,72
11	83	129	119	0,59
12	39	149	143	0,79
13	41	174	116	0,74
14	38	201	92	0,71
15	44	223	64	0,59
16	32	257	42	0,57
17	19	272	40	0,68
18	23	287	21	0,48
19	14	295	22	0,61
20	22	301	8	0,27

En cuanto a los conceptos geométricos (Flores, Ramírez y Del Río, 2015), se hace referencia a las características y propiedades, específicamente, a las propiedades de las figuras de cada ítem del test, a las relaciones geométricas de sus elementos y al movimiento que ha realizado el modelo y que se ha representado en cada una de las figuras de los ítems. Por lo que, se hace la siguiente caracterización geométrica de los ítems del test y se establecen en las siguientes categorías:

- Elementos. Segmentos, trozos de línea recta de longitud mayor; arcos, trozos de línea curva; y puntos, dibujo de tamaño pequeño que se representa en forma circular.
- Contactos. Cruces, elementos que se intersectan; apoyos, los elementos de tocan en un punto; y prolongaciones, un elemento continúa donde termina el otro. Se identifica el número de elementos que continúan tras la intersección. Se clasifican según sean perpendiculares u oblicuos, y en el caso de los apoyos y las prolongaciones, se consideran si se dan en la misma dirección.
- Relaciones. Pares de elementos que presentan paralelismo e igual longitud.
- Simetrías. Respuestas que presentan una simetría respecto a la muestra, que coinciden con las respuestas incorrectas del ítem.
- Giros. Ángulo de giro de la figura con respecto a la posición de la muestra (haya o no simetría).

En la Tabla 2, se muestra la caracterización y descripción de los ítems seleccionados en el test de acuerdo con uno de los componentes del sentido espacial, anteriormente mencionado.

Tabla 2: Características de los ítems seleccionados.

	Conceptos geométricos				
	Elementos	Contactos	Relaciones	Simetrías	Giros
Item 7 	3 segmentos	2 prolongaciones oblicuas	1 par de elementos con igual longitud	En 3 de las respuestas	120, 0, -60, 120, -120 y 30
Item 11 	3 segmentos	1 cruce oblicuo 1 prolongación oblicua 1 prolongación perpendicular	1 par de elementos con igual longitud	En 3 de las respuestas	180, 60, -120, -60, 10, -10
Item 15 	2 segmentos 1 arco	1 apoyo oblicuo 1 prolongación con igual dirección	1 par de elementos con igual longitud	En 3 de las respuestas	150, 90, 30, -30, -150, 60
Item 16 	2 segmentos 1 arco	1 cruce perpendicular 1 prolongación oblicua 1 prolongación perpendicular	1 par de elementos de igual longitud	En 3 de las respuestas	180, -120, 120, 180, 60, -90
Item 18 	2 segmentos 1 arco	1 apoyo perpendicular 1 prolongación en la misma dirección 1 prolongación perpendicular	1 par de elementos de igual longitud	En 3 de las respuestas	150, 60, -60, -120, 0, 90
Item 20 	1 segmento 2 arcos	2 prolongaciones en la misma dirección	1 par de elementos paralelos	En 3 de las respuestas	60, 180, -90, 0, 0, 60

Respecto a las semejanzas y diferencias encontradas en el grupo de ítems seleccionados con el resto de los ítems del test, se puede establecer lo siguiente en cada categoría:

- Elementos. Los ítems presentan el menor número de ellos (3), frente a otros del test que presentan 4 elementos. Sólo el ítem 12 que no se presenta en la tabla, presenta dos elementos.
- Contactos. Predominan las prolongaciones, pero no se observan diferencias con el resto de los ítems de los test, donde también predominan.
- Relaciones. En los ítems seleccionados aparece sólo una, mayoritariamente un par de elementos de igual longitud. Esta caracterización también predomina en el resto del test, ya que hay 6 ítems que tienen un mayor número de relaciones.
- Simetrías. Una característica común de estos ítems es que hay tres respuestas con simetrías. En el total del test hay 7 ítems con 4 respuestas simétricas, mientras que 13 de ellos tienen 3 de ellas simétricas.
- Giros. En el primer estudio exploratorio, no se observan diferencias entre el grupo de ítems seleccionados con el resto de ítems, pues los giros señalados aparecen indistintamente en los dos grupos.

DISCUSIÓN

En este primer estudio exploratorio se han descrito las propiedades geométricas de las representaciones utilizadas en uno de los test del PMA (Factor E) que mide la capacidad visual. Se han establecido categorías fundamentadas en las componentes del sentido espacial relativas a elementos geométricos, relaciones y movimientos (Flores, Ramírez y Del Río, 2015).

Según la revisión de la literatura de investigación, en el desarrollo del sentido espacial se enfatiza la conexión entre las componentes (conceptos y destrezas), especialmente la visualización para fortalecer estas relaciones (Clements y Battista, 1992). A partir de este primer análisis, podemos establecer una primera aproximación en la relación entre el uso de las habilidades de visualización registradas mediante el rendimiento en el test con la caracterización geométrica de los ítems.

Previamente a un estudio con herramientas estadísticas más complejas de análisis de ítems, de este primer trabajo podemos deducir algunas hipótesis:

Los estudiantes han manifestado mayor número de errores en ítems con un menor número de elementos. Este hecho podría ir asociado a las habilidades Percepción figura-contexto y Discriminación visual. Para reconocer si la figura de la respuesta es la misma (salvo giros) o distinta (presencia de simetrías), una estrategia posible es fijar algunos elementos de referencia para establecer el centro, ángulo de giro o eje de simetría. Un menor número de elementos podría entenderse como una mayor dificultad para fijar estas referencias.

En los ítems con menor rendimiento aparecen pocas relaciones. Con la habilidad Percepción de las relaciones espaciales, el sujeto reconoce las relaciones entre los elementos de las figuras y con la habilidad Conservación de la percepción, reconoce que estas relaciones se mantienen al someterlas a giros o simetrías. Un ítem con un mayor número de relaciones (igualdad, paralelismo...) permite al sujeto identificarlas en la muestra y en la respuesta.

En esta misma línea, investigaciones en test espaciales han señalado la influencia en el tiempo de respuesta según el ángulo de giro y la presencia de simetrías. El tiempo de valoración de las respuestas se incrementaba según el ángulo de rotación y aumentaba con la presencia de reflexiones (Petrusic, Varro y Jamieson, 1978). Este aumento en los grados de ángulo de giro, también se ha asociado a un aumento en la complejidad y a una disminución del rendimiento (Alansari, Dere y McGeorge, 2008; Xu, Kim y Lewis, 2016). En este sentido se siguen demandando investigaciones específicas sobre las características geométricas relativas a la dirección y ángulo de rotación en los

ítems y que infieren diferencias de género (Maeda y Yoon, 2016), así como de la complejidad de las formas geométricas utilizadas en los test (Arendasy y Sommer, 2012).

Sin embargo, en este primer estudio no se ha detectado la mayor complejidad asociada a un mayor ángulo de giro. La habilidad Percepción de la posición en el espacio, permite al sujeto relacionar la posición de la figura respecto a él mismo o respecto a la muestra. En esta relación podría influir el ángulo de giro, implicando un menor movimiento (menor dificultad) como en los ángulos más pequeños o siendo más reconocibles los ángulos más perceptibles como los de 90 o 180 grados. La simetría en el test se identifica como un movimiento entre la muestra y la figura, suponiendo la existencia de simetría una respuesta incorrecta. Las muestras utilizadas no presentaban simetrías, por lo que tampoco aporta información sobre la complejidad de la figura asociada a la presencia de simetrías.

Con este análisis tampoco se establece una relación entre el rendimiento y los contactos que forman la figura. La distinción entre cruces, apoyos y prolongaciones no ha mostrado resultados para caracterizar los ítems con mayor número de fallos. Se considera necesario seguir indagando en los aspectos relativos a esta componente que permitan caracterizar la mayor complejidad de las formas geométricas (Arendasy y Sommer, 2012; Maeda y Yoon, 2016). La utilización de figuras menos complejas y más familiares podría favorecer un uso más efectivo de la habilidad Memoria visual. Sin embargo, un triángulo menos la mitad de uno de sus lados ha supuesto uno de los ítems con mayor número de errores.

Para resolver el test, los sujetos pueden utilizar distintas estrategias y combinaciones de las habilidades de visualización, por lo que consideramos necesario un estudio más complejo en el que se puedan establecer relaciones entre distintas combinaciones de las habilidades y de las componentes.

Se puede concluir que, en el ámbito psicológico, la capacidad visual de los estudiantes queda registrada por su rendimiento en test psicométricos. Sin embargo, identificar las propiedades geométricas que implican una mayor dificultad para los estudiantes en el uso de la visualización, puede aportar una información relevante para el diseño de tareas y los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría (Jaime y Gutiérrez, 1996).

Referencias

- Alansari, B. M., DerEgowski, J. B. y McGeorge, P. (2008). Sex differences in spatial visualization of Kuwaiti school children. *Social Behaviour and Personality*, 36(6), 811-824.
- Arendasy, M. E. y Sommer, M. (2012). Gender differences in figural matrices: The moderating role of item design features. *Intelligence*, 40(6), 584-597.
- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing.
- Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau. (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Clements, D. y Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. A. Grouws. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). Nueva York: Macmillan.
- Del Grande, J. J. (1987). Spatial Perception and Primary Geometry. En M. M. Lindquist. (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 127-135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, 37(6), 14-20.
- Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. En *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 19-24). Greece: Aristotle University of Thessaloniki.

- Escrivá, M. T., Beltrán-Meneu, M. J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Habilidades de visualización de estudiantes de primaria en actividades de geometría espacial. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 595). Málaga: SEIEM.
- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.
- Flores, P., Ramírez, R. y Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico. (Cds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid, España: Pirámide.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida. SEIEM.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez. (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. De la Fuente. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz, España: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick. (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, G. B.: Cambridge U. P.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Jones, K. y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-149). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.
- Kozhevnikov, M. y Hegarty, M. (2001). A dissociation between object manipulation spatial ability and spatial orientation ability. *Memory and Cognition*, 29(5), 745-756.
- Lea, H. (1990). Spatial concepts in the Kalahari. En O. George Booker, P. Cobb y T. Mendicuti. (Eds.), *Proceedings of 14th PME conference* (pp. 259-266). México: Program Committe of the 14th PME Conference.
- Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico. (Cds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (p. 45). Madrid, España: Pirámide.
- Maeda Y. y Yoon, SY. (2016). Are gender differences in spatial ability real or an artifact? Evaluation Of measurement invariance on the revised PSVT: R. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 34(4), 397-403.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics*. Recuperado de <http://standards.nctm.org/>
- Petrusic, W. M., Varro, L. y Jamieson, D. G. (1978). Mental rotation validation of two spatial ability tests. *Psychological Research*, 40(2), 139-148.
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talent matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida. SEIEM.
- Ramírez, R.; Flores, P. y Castro, E. (2012). Habilidades de visualización manifestadas por los alumnos con talento matemático en tareas geométricas. En M. Marín-Rodríguez y N. Climent-Rodríguez. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*. Ciudad Real: SEIEM.

- Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talento. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*. Málaga: SEIEM.
- Thurstone, L. L. y Thurstone, T. G. (1976). *P.M.A.: Aptitudes Mentales Primarias*. Madrid: TEA.
- Xistouri, X. y Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 425-432). Prague: PME.
- Xu, X., Kim, E. S. y Lewis, J. E. (2016). Sex difference in spatial ability for college students and exploration of measurement invariance. *Learning and Individual Differences*, 45, 176-184.
- Zacks, J. M., Mires, J., Tversky, B. y Hazeltine, E. (2002). Mental spatial transformations of objects and perspective. *Spatial Cognition and Computation*, 2(4), 315-332.