ANÁLISIS DE LA PROGRESIÓN DE APRENDIZAJE DE UNA FUTURA MAESTRA

Analysis of the learning progression of a future teacher

García-Honrado, I.[a], Clemente, F.[b], Vanegas, Y.[b], Badillo, E.[b] y Fortuny, J. M.[b]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

El objetivo de esta comunicación es evidenciar el progreso de aprendizaje de una futura maestra a lo largo del proceso de resolución de tareas matemáticas, que involucran la identificación inicial de elementos matemáticos, la generalización de patrones geométricos y la reformulación de contenidos matemáticos en un contexto artístico. Se estudia los cambios en el conocimiento matemático en uso a través de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. Verificamos la progresión de aprendizaje que evidencia la futura maestra, contrastando el conocimiento logrado con la progresión hipotética de aprendizaje diseñada, a priori. Su progreso de aprendizaje revela procesos de exploración vinculados a la visualización, que le permiten establecer relaciones entre las propiedades geométricas, modificando su conocimiento matemático inicial.

Palabras clave: *trayectorias hipotéticas de aprendizaje, progresión de aprendizaje, formación de maestros, generalización de patrones.*

Abstract

The aim of this communication is to show the learning progress of a trainee teacher throughout the process of solving mathematical tasks framed in the model of Hypothetical Learning Trajectories, and which involve the initial identification of mathematical elements, the generalization of geometric patterns and the reformulation of mathematical contents in an artistic context. It is shown some evidences of the progression of the trainee teacher's learning, and it is contrasted the knowledge achieved with the hypothetical progression of learning designed, a priori. The learning progress of the future teacher reveals exploration processes linked to visualization, which allow her to establish relationships between geometric properties, modifying the initial mathematical knowledge of the trainee teacher.

Keywords: *hypothetical learning trajectories, learning progress, teacher training, generalization of patterns.*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad los programas de formación del profesorado se centran en el desarrollo de competencias docentes. Esta nueva visión implica considerar la formación del profesorado como un espacio para el desarrollo profesional (Sullivan y Wood, 2008; Silverman y Thompson, 2008; Climent et al., 2016). Las investigaciones centradas en la formación de profesores de matemáticas resaltan la necesidad de diseñar tareas que ayuden a los futuros maestros en su desarrollo profesional (Mason, 2002; Hill et al., 2008). Fernández, Llinares y Valls (2013) consideran que la adquisición de las competencias docentes implica que el futuro maestro use el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas en la resolución de tareas profesionales, tales como: resolver problemas; diseñar actividades; planificar y gestionar secuencias; evaluar el pensamiento de los alumnos, etc.

Estudios recientes han considerado que el uso de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) en el diseño de tareas profesionales puede contribuir al desarrollo de las competencias docentes

García-Honrado, I., Clemente, F., Vanegas, Y., Badillo, E. y Fortuny, J. M. (2018). Análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 231-240). Gijón: SEIEM.

(Simon y Tzur, 2004; Bernabeu y Llinares, 2016, entre otros). Un aspecto interesante del uso de la THA en la formación de maestros es que ayuda a caracterizar e interpretar la progresión de aprendizaje de los alumnos cuando se enfrentan a la resolución de tareas matemáticas. No obstante, en esta comunicación utilizaremos el marco de la THA desde la perspectiva de formadores de maestros para desarrollar el conocimiento matemático necesario para la tarea de enseñar. En concreto, nos focalizaremos en el análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra (Patricia) dando cuenta de los cambios en el uso del conocimiento matemático que evidencia a lo largo de la implementación de las tareas de la THA, relacionadas con la generalización de patrones geométricos. Caracterizamos la progresión de aprendizaje contrastando el conocimiento logrado (trayectoria actual) por Patricia con la trayectoria hipotética de aprendizaje diseñada, a priori.

Por otro lado, se estudian los cambios en el conocimiento matemático de Patricia promovidos por la implementación de la secuencia de tareas, ya que con anterioridad a las tareas de la THA se proponen unas tareas iniciales que involucran la identificación de elementos matemáticos en un contexto artístico, y posteriormente, se pide la reformulación de contenidos matemáticos en dicho contexto artístico.

El objetivo de esta comunicación se concreta en la siguiente pregunta de investigación: ¿se evidencia progreso de aprendizaje en el conocimiento matemático de una futura maestra a través de la resolución de tareas matemáticas enmarcadas dentro de una THA, relacionada con la generalización de patrones? El progreso tendrá dos vertientes, por un lado, teniendo en cuenta los cambios de conocimiento mostrados a lo largo del desarrollo de estas tareas, y por otro lado, contrastando la identificación de elementos matemáticos en un contexto artístico inicial con la reformulación de estos contenidos tras finalizar las tareas de la THA.

MARCO TEÓRICO

Para este trabajo tomamos como referencia un sistema de dos ejes teóricos: el conocimiento especializado del profesor de matemática y las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Las investigaciones sobre la formación del profesorado han puesto de manifiesto la importancia de focalizar la atención en las características de los procesos de construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas que pueden emerger en entornos formativos (Silverman y Thompson, 2008; Ball, Thames y Phelps, 2008; Climent et al., 2016, entre otros). Uno de los focos para dar cuenta de la progresión de aprendizaje de los futuros maestros es el análisis del tipo de conocimiento especializado que ponen en juego cuando resuelven diferentes tareas en el contexto de un entorno formativo. Desde el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) se asume que la noción de especialización es intrínseca al tipo de reflexiones que el profesor establece sobre el contenido, en cuanto a que contempla todos los conocimientos de índole matemática que el profesor necesita para enseñar (Climent et al., 2016). En este sentido, asumimos el conocimiento especializado de los futuros maestros como una conceptualización del conocimiento específico que poseen o podrían poseer para la enseñanza de las matemáticas.

La caracterización del conocimiento especializado nos permite una mejor comprensión de qué conoce el futuro maestro de matemáticas, cómo conoce, qué le posibilita dicho conocimiento y qué necesita. Llinares (2012) considera que la forma en la que este conocimiento se construye es importante porque ayuda a los futuros maestros a desarrollar destrezas para aprender, desde la propia práctica, los aspectos relevantes del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. En concreto, caracterizar el conocimiento matemático que emerge en los procesos de resolución de tareas profesionales, nos proporciona herramientas para el diseño de propuestas de formación, que promuevan en los futuros maestros el desarrollo de procesos como razonar, argumentar, generalizar y hacer un uso con significado del conocimiento matemático.

En esta comunicación, se profundiza en el conocimiento matemático que muestra una futura maestra, centrándonos en los procesos de generalización de patrones geométricos (Radford, 2007). En concreto, las tareas dan cuenta de dos de los estadios de la progresión de aprendizaje propuesta por Zapatera y Callejo (2015). El primer estadio de coordinación de las estructuras numéricas y espaciales, implica que el alumno establezca relaciones entre las representaciones espaciales y numéricas (Duval, 2006). Esta coordinación es necesaria para explicar el fenómeno que se pretende generalizar y permite la exploración de regularidades. En el segundo estadio, se promueve la búsqueda de una relación funcional, a través de la profundización de las regularidades anteriormente descritas, para encontrar la regla general de la secuencia de cuadrados negros y grises en la obra de arte.

Sobre las trayectorias hipotéticas de aprendizaje

En una THA, se distinguen los siguientes componentes: el objetivo de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético; es decir, la predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evolucionan en el contexto de las actividades de aprendizaje (Simon, 1995). Se destaca especialmente la importancia de la tarea, su diseño, los objetivos de aprendizaje, los conocimientos previos de los estudiantes y la progresión hipotética de aprendizaje. Así mismo, se considera relevante reconocer los efectos de la secuencia de tareas en la progresión de aprendizaje de la futura maestra (Simon y Tzur, 2004).

A través de la THA, se muestran diferentes niveles de sofisticación por los que los estudiantes pueden pasar transformando sus ideas intuitivas a una comprensión más formal de los conceptos matemáticos. Los niveles cada vez más sofisticados de razonamiento matemático evidencian aspectos de la progresión de la comprensión de un contenido específico. Por todo lo anterior, se considera que las THA constituyen un recurso instructivo muy eficaz para la enseñanza. La THA proporciona al profesorado recursos relevantes para acompañar a cada estudiante en el logro de su aprendizaje. Indican también el estado actual de aprendizaje del alumnado y lo que le falta para lograr su progreso cognitivo a través de una secuencia de estados de aprendizaje.

MÉTODOLOGÍA

En esta investigación usamos una metodología etnográfica (Eisenhart, 1988). Abordamos el caso particular de una futura maestra, Patricia, que se analiza en profundidad, para evidenciar y hacer emerger su progreso de aprendizaje sobre los procesos de generalización de patrones y su posible impacto didáctico.

Contexto y tareas

Se diseñó un experimento de enseñanza que se implementó en una asignatura optativa con alumnos del Grado de Maestro en Educación Primaria e Infantil. En concreto, Patricia era alumna de ambas titulaciones. Este experimento constaba de 3 sesiones. En la primera sesión se plantearon tareas de exploración para la identificación de los elementos matemáticos de una obra de arte (Figura1). La segunda sesión estuvo centrada en tareas de generalización de patrones geométricos. Finalmente, la tercera sesión tenía como objetivo la reformulación de los contenidos matemáticos. La propuesta de tareas tiene un enfoque competencial (Walter, 2001; Pim, 2001) de las Matemáticas en el Arte (Figura 1), que permite ser adaptada a diferentes niveles educativos.

La primera sesión se estructura en tres tareas encaminadas a identificar los conceptos previos de los futuros maestros y favorecer un primer acercamiento al análisis matemático de la obra de arte. La tarea 1 y 2 perseguían identificar y relacionar intuitivamente conceptos geométricos en el contexto artístico. La tarea 3 está planteada para que los futuros maestros, a partir de la visualización del cuadro, reconocieran intuitivamente la relación entre el área de los cuadrados que aparecen en él. En las tareas 1, 2 y 3 se plantean las siguientes preguntas: observa la obra de arte por primera vez y enumera las sensaciones que le trasmite (T1); identifica los elementos matemáticos y las relaciones intuitivas que visualizas en la obra artística (T2); y, explica cómo crees que el autor construyó la obra de arte (T3). La sesión 1 permite conocer los conocimientos matemáticos previos de los que se parte para, según Simon y Tzur (2004), construir la THA.

La sesión 2 se estructura en 4 tareas que forman parte de la THA propuesta (Tabla 1). Para su diseño nos hemos inspirado en los estadios de Zapatera y Callejo (2015), aplicándolos al análisis de los cuadrados del contexto artístico que nos ocupa. Concretamente, la tarea 4, buscaba encontrar la relación entre los cuadrados de distinto color a partir de razonamientos matemáticos ligados a la visualización de las figuras geométricas de la obra artística. Las tareas 5, 6 y 7 pretendían que los futuros maestros argumentaran las relaciones entre áreas, las expresaran algebraicamente y llegaran a la generalización del patrón geométrico. Finalmente, en la tercera sesión se plantean las tareas 8 y 9, centradas en la reformulación de las ideas iniciales los elementos matemáticos y su uso en otras situaciones de enseñanza.

En esta investigación hemos construido la siguiente THA cuyo objetivo de aprendizaje es reconocer la generalización de patrones en la construcción de la secuencia geométrica de las figuras que aparecen en la obra artística "Composición aritmética" (Figura 1).

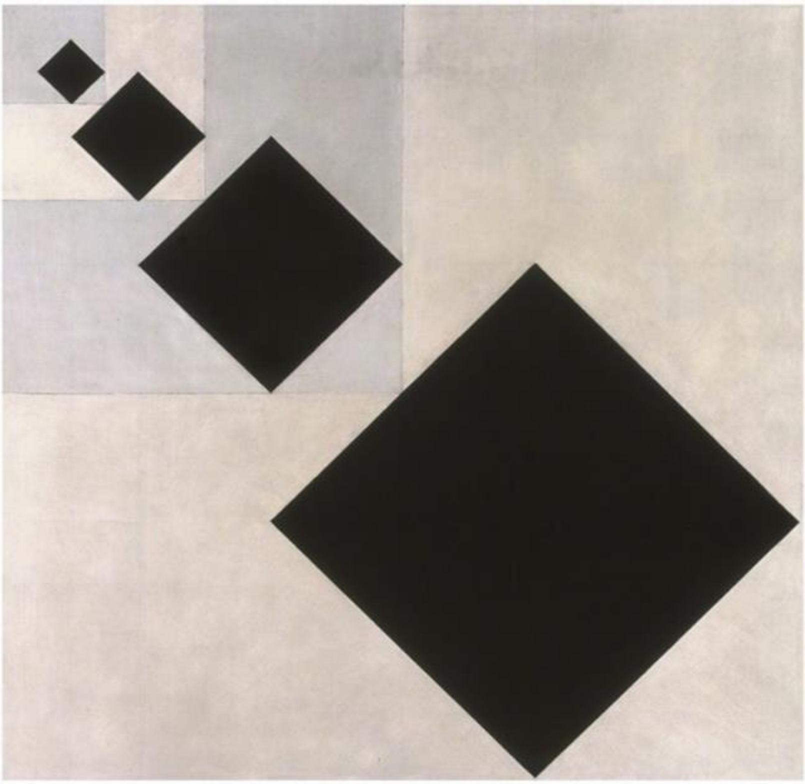
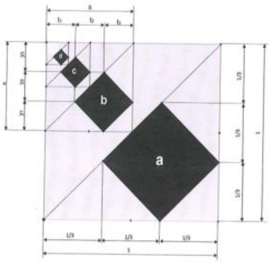
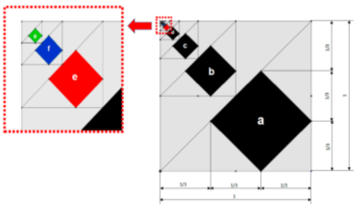


Figura 1. Arithmetic Composition. Theo van Doesburg, 1929-1930

Las tareas y la progresión hipotética de aprendizaje se describen en la Tabla 1.

Tabla 1. Tareas y progresión hipotética de aprendizaje.

Tarea de aprendizaje	Progresión hipotética de aprendizaje
Tarea 4. A partir de la obra de arte de la Figura 1, se ha construido la imagen que se muestra a continuación (la información que se incluye puede ayudar a resolver las tareas 5, 6 y 7).  Completa los datos que faltan en la figura, encontrando los valores de X, y1, y2, y3, s, t1, t2, t3. Justifica tu respuesta.	Estadio 1. Coordinación de la estructura espacial y la estructura numérica (a partir de las cotas) en la identificación de la secuencia de longitudes de los lados de los cuadrados grises involucrados en la obra artística.
Tarea 5. (a) En el cuadro gris grande de la Figura 1, ¿cuántas figuras "a" pueden colocarse sin superponerse? (b) Dentro de la figura negra "a", ¿cuántas figuras negras "b" podrías colocar?	Coordinación de la estructura espacial y la numérica de la secuencia de los cuadrados negros, estableciendo relaciones entre las áreas de los cuadrados negros de la Figura 1.
Tarea 6: En la Figura 1, (a) Calcula el área de la figura negra "a". (b) Calcula el área de la figura negra "b". (c) Calcula el área de las figuras negras "c" y "d".	Cálculo del área de la sucesión de los cuadrados negros, relacionando el valor del área de un cuadrado con el valor del área del anterior, lo que propicia la búsqueda de una regularidad funcional en el cálculo de esas áreas.
Tarea 7. Si continuáramos la secuencia de las figuras negras podríamos dibujar otras, tal y como se muestra en la ampliación siguiente.  ¿Sabrías calcular las áreas de las nuevas figuras "e", "f" y "g"? Explica cómo lo has hecho.	Estadio 2. Abstracción de la coordinación espacial y numérica para el establecimiento de la relación funcional entre el área de los cuadros negros.

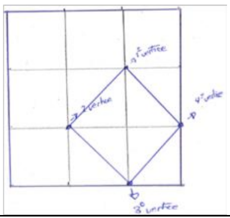
Análisis de datos

Los datos de esta investigación son los protocolos escritos de las tareas desarrolladas por el caso objeto de estudio. El análisis de los datos se realizó en tres fases. En la primera fase se analizaron las respuestas de Patricia a las tareas de la sesión 1, lo que permitió caracterizar su conocimiento matemático inicial sobre los elementos matemáticos de la obra artística: identificación de figuras geométricas; clasificación de polígonos; elementos de un cuadrado (polígonos); medida de longitudes y de área de las figuras geométricas; relación entre el área de los cuadrados del mismo color y de diferentes color; relación entre el perímetro de los cuadrados del mismo color y de diferentes color; generalización del patrón geométrico de crecimiento de los cuadrados (área y perímetro); teorema de Pitágoras; homotecia; relaciones de proporcionalidad, entre otros. En la segunda fase, se analizaron las respuestas a las tareas de la sesión 2, lo que evidenció su comprensión sobre la generalización de patrones. Finalmente, en la tercera fase se analizaron las respuestas a las tareas de la sesión tres, lo que pone de manifiesto cambios en el conocimiento matemático.

El análisis realizado en las tres fases se centró en los cambios del discurso evidenciados en el proceso de resolución de las tareas propuestas en las tres sesiones. Entendemos que el cambio de discurso conlleva el desarrollo de una actividad transformativa que permite un cambio de representaciones del objeto matemático (Duval, 2006). Así mismo, estos cambios discursivos y representacionales nos permitirán dar cuenta de la progresión de aprendizaje evidenciada por la futura maestra, teniendo en cuenta la THA.

A continuación, ejemplificaremos el análisis realizado para todas las resoluciones de las 9 tareas de Patricia, mostrando el análisis realizado de la tarea 3 de la primera fase y de las tareas 5 y 7 de la segunda fase. Seleccionamos estas tres tareas, ya que se focalizan en la segunda sesión en la cual se desarrolla la THA. Las respuestas han sido subdivididas en dos partes.

Tabla 2. Ejemplo 1: Dificultad en la coordinación entre la estructura espacial y numérica

Respuesta a la tarea 3	Análisis del conocimiento
 Los cuadrados negros los construyó [se refiere al autor de la obra artística] en base a los cuadrados grises, puesto que cada cuadrado gris lo dividió en 9 cuadrados pequeños y desde la derecha y desde abajo coges una 3ª parte del propio lado hacia la izquierda, otra 2ª parte del propio lado hacia arriba y hacia la izquierda y dos terceras partes en las mismas direcciones que las anteriores teniendo los cuatro vértices.	Patricia en su respuesta, parece que reconoce la *coordinación entre la estructura numérica y espacial,* realizada por el autor de la obra artística, tanto en la construcción gráfica que propone como al indicar "... que cada cuadrado gris lo dividió en 9 cuadrados pequeños...".
Cada cuadrado gris es una cuarta parte del cuadrado gris posterior al igual que el cuadrado negro es una cuarta parte del cuadrado negro posterior, y también el cuadrado negro es una cuarta parte del cuadrado gris en el que se encuentra.	Patricia *no reconoce la relación* entre las áreas del cuadro gris y el negro correspondiente, al no coordinar la estructura espacial con la numérica, al indicar que "...el cuadrado negro es una cuarta parte del cuadrado gris en el que se encuentra". Este razonamiento podría estar influenciado por la idea errónea de que el cuadro negro es un giro de 90º del cuadrado gris siguiente de la sucesión (¼ del gris grande), ya que en la tarea inicial afirma "que hay movimientos en el plano". Lo cual nos permite inferir que Patricia a partir de una percepción geométrica errónea asocia una relación numérica incorrecta.

El análisis de la respuesta a la tarea 3, ha permitido observar una falta de coordinación entre la estructura espacial y numérica. Sin embargo, en el análisis de la respuesta a la tarea 5, que mostramos a continuación (Tabla 3), se evidencia que Patricia coordina la estructura numérica y espacial.

Tabla 3. Ejemplo 2: Coordinación entre la estructura numérica y gráfica

Respuesta a la tarea 5	Análisis del conocimiento
1. Respuesta numérica Un lado de a: $h^2 = \frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3}$, $h = \sqrt{\frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.47$ 2. Respuesta espacial Se pueden colocar cuatro figuras "a" puesto que el lado de cada cuadrado "a" es aproximadamente la mitad. Pero no se completaría totalmente como que sobraría algo de espacio.	Patricia hace uso de la *estructura numérica* a través del cálculo del lado del cuadrado negro más grande de la figura por medio del Teorema de Pitágoras. A través del cálculo previo, Patricia se apoya en la *estructura espacial* afirmando que en el cuadro entran 4 de esos cuadrados y "…pero [el cuadrado gris] no se completaría totalmente como que sobraría algo de espacio." Por tanto, evidenciamos una *coordinación entre lo espacial y numérico*.

El análisis de la respuesta a la tarea 7, lo subdividimos en tres partes. En la primera, se muestran evidencias de que Patricia abstrae la relación funcional. En la segunda, de que establece y explicita la relación funcional y, finalmente, en la tercera describe esa relación.

Tabla 4. Ejemplo 3: Establecimiento de la relación funcional de las áreas de los cuadrados negros

Respuesta a la tarea 7	Análisis del conocimiento
Puesto que cada figura es una cuarta parte del anterior el lado es la mitad del anterior. Podrías calcular las áreas de las siguientes figuras dividiendo la siguiente área entre cuatro puesto que es 1/4 del área anterior. $\frac{\text{Área } A}{4^n}$ N=0 -> A N=1 -> b N=2-> c La fórmula general se consigue sabiendo que el área de un cuadrado es una cuarta parte del área anterior. Por lo tanto, tomando como referencia el Área de "A" debemos dividir cada área entre 4 elevado a n, donde n es el número del cuadrado siendo n=0 -> A, n=1 -> b y así sucesivamente	Patricia es capaz de *abstraer la relación* entre la estructura espacial y la numérica entre las áreas de dos cuadros negros consecutivos: "Podrías calcular las áreas de las siguientes figuras dividiendo la siguiente área entre cuatro puesto que es 1/4 del área anterior." *Establece la relación funcional* que explicita en una expresión algebraica del cálculo del área el término general, que permite obtener el valor del área de un elemento arbitrario de la progresión geométrica. Además, explica el significado del término general relativo a los cuadrados negros "...donde n es el número del cuadrado siendo n=0->A [nombre del cuadrado negro más grande], n=1-> b [nombre del cuadrado negro que sigue en la sucesión al cuadrado "A"] y así sucesivamente".

RESULTADOS

Los resultados se organizan en tres partes: (a) caracterización del conocimiento matemático inicial de Patricia sobre los elementos matemáticos de la obra artística, (b) análisis de la progresión sobre la generalización de patrones y (c) cambios en el conocimiento matemático.

Caracterización del conocimiento matemático inicial

En la primera tarea de la sesión 1, al responder sobre las sensaciones que le trasmite la producción artística, la futura maestra indica: "… perfeccionismo, profundidad y organización matemática perfecta", mostrando ideas matemáticas intuitivas. Al enumerar los elementos y relaciones matemáticas de la obra, Patricia identifica inicialmente, cuadrados, movimientos en el plano y alude a un geoplano. En la tarea 3, dibuja la cuadrícula de un geoplano representando el cuadrado gris grande y el cuadrado negro correspondiente. Esta representación le permite visualizar y establecer la relación geométrica entre el área del cuadrado gris grande con su correspondiente cuadrado negro (Tabla 2). Sin embargo, establece una relación numérica errónea entre el área del cuadrado grande gris y el negro correspondiente. Este razonamiento podría estar influenciado por su percepción inicial de que el cuadrado negro grande se obtiene a partir del giro de un cuarto del cuadrado gris grande. Esto podría ser una evidencia de una falta de coordinación entre las relaciones numérica y espacial.

Progresión sobre la generalización de patrones

Patricia coordina la estructura espacial y numérica dado que identifica la secuencia de longitudes de los lados de los cuadrados grises involucrados en la obra artística cuando, a través de las cotas proporcionadas en la tarea 4, Patricia se focaliza en el establecimiento de la relación numérica del área de los cuadrados que aparecen en la obra artística.

Coordina la estructura espacial y numérica de la secuencia de los cuadrados negros, estableciendo relaciones entre sus áreas (Figura 1), como se evidencia en las respuestas dadas a la tarea 5 (Tabla 3), manifestándose una actividad transformadora de lo numérico a lo figural, en términos de Duval (2006).

Hay indicios de que inicia la búsqueda de una regularidad funcional a partir del cálculo del área de la sucesión de los cuadrados negros cuando indica que "se podría calcular el área de las figuras dividiendo la siguiente área entre cuatro puesto que es 1/4 del área anterior" (Tabla 4, parte 1). Finalmente, abstrae la relación funcional entre el área de los cuadros negros mediante la coordinación espacial y numérica ya que en su respuesta a la tarea 7, afirma que "la fórmula general se consigue sabiendo que el área de un cuadrado es una cuarta parte del área anterior. Por lo tanto, tomando como referencia el Área de A debemos dividir cada área entre 4 elevado a n, donde n es el número del cuadrado siendo n=0 > A, n=1 > b y así sucesivamente" (Tabla 4, parte 2 y 3). Lo anterior nos permite concluir que Patricia se encuentra en el estadio 2 de la progresión de aprendizaje de la THA, tal como se indica en la Tabla 1.

Cambios en el conocimiento matemático

Patricia además de observar cuadrados como lo hacía en la primera sesión, es capaz, en la tercera sesión, de observar otros tipos de figuras geométricas como triángulos. Esto podría estar influenciado por la activación del esquema de conocimiento del triángulo rectángulo conectado a la necesidad de usar el teorema de Pitágoras en el cálculo del área de los cuadrados negros (Chinnappan y Lawson, 2005). Lo anterior, se evidencia en la respuesta de Patricia a la tarea 8 "…puesto que podemos dividir el cuadro en pequeños cuadraditos y ver gráficamente las medidas".

Patricia también establece una transferencia de conceptos a una representación visual (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996). Esto se evidencia en la medida que va incorporando al razonamiento numérico aspectos de razonamiento geométrico; es decir, Patricia va siendo capaz de visualizar gráficamente los conocimientos matemáticos construidos a través del desarrollo numérico.

Por otro lado, Patricia muestra que se ha producido una modificación respecto de sus conocimientos iniciales estableciendo una conexión correcta entre el razonamiento numérico con el geométrico que inicialmente era erróneo. Por ejemplo, cuando al resolver la tarea 5 indica "…la relación que encontramos entre los cuadrados de distinto color es que entran 4'5 cuadrados negros de los más grandes que aparecen en el cuadrado gris que aparece más grande".

Otra evidencia de cambio de su conocimiento en uso es cuando modifica sus ideas iniciales erróneas sobre la visualización de giros en los cuadrados negros de la obra artística, al incorporar la idea intuitiva de homotecia hablando de "zum". Este cambio se puede ver cuando al resolver la tarea 7, afirma: "En cuanto al movimiento [se refiere a movimientos en el plano] no pueden ser de traslación ni de giro puesto que se modifica el tamaño de cada cuadrado comparándolo con los otros, es un movimiento de zum o alejarse".

CONCLUSIONES

En esta comunicación hemos evidenciado la progresión del aprendizaje matemático de una futura maestra, a lo largo de diferentes tareas diseñadas a partir de la obra *Arithmetic Composition* de Theo van Doesburg. Tras la implementación de la secuencia de tareas y el posterior análisis del conocimiento manifestado por Patricia en las respuestas a dichas tareas, hemos identificado cambios en su conocimiento matemático. Patricia incorpora razonamientos geométricos y numéricos en la interpretación de los elementos y las relaciones matemáticas de la obra artística, lo que le ha permitido modificar las ideas matemáticas erróneas que mostraba inicialmente.

En relación con el progreso en el aprendizaje seguido por la futura maestra en las respuestas a las tareas de la segunda sesión, hemos constatado que sigue la hipótesis de progresión definida en la trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la generalización de patrones. Por lo tanto, podemos concluir que Patricia alcanza el objetivo sobre la generalización de patrones y éste ha podido motivar los cambios en su conocimiento matemático en relación con la visualización, los procesos de identificación de elementos matemáticos y las relaciones geométricas.

Por lo tanto, hemos ilustrado con el ejemplo del caso de Patricia los cambios en el conocimiento matemático en uso a través de la consideración de una trayectoria hipotética de aprendizaje. Este resultado, puede ser una aportación interesante para el diseño de propuestas formativas que busquen el desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza de las matemáticas.

Agradecimientos

El estudio se ha realizado en el seno del Proyecto EDU2015-65378-P, MINECO; SGR-2014-972 y EDU2016-81994-REDT. Agradecemos a la profesora Julia Valls sus comentarios y sugerencias que han hecho mejorar esta comunicación.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Bernabeu, M. y Llinares, S. (2016). El desarrollo de una "mirada profesional": La idea de trayectoria de aprendizaje del pensamiento geométrico. *Ice/jornadas-redes*. Universidad de Alicante.

Chinnappan, M. y Lawson, M. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 197-221.

Climent, N., Montes, M. A., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Barrera, V. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *9*, 85-103.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Eisenhart, A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 99-114.

Fernández, C.; Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teachers' noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, *10*, (1-2), 441-468.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Part 1, pp.161-204). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hill, H., Blunk, M., Charambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430-511.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2*, 53-70.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Pim, D. (2001) Some Notes on Theo van Doesburg (1883-1931) and his Arithmetic Composition 1. *For the learning of Mathematics*, *21*(2), 31-36.

Radford, L. (2007) Iconicity and contradiction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83-96.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, *11*(6), 499-511.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114-145.

Simon M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 91–104.

Sullivan, P. y Wood, T. (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education, Vol. 1: Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.

Walter, M. (2001). Looking at a Painting with a mathematical Eye. *For the learning of Mathematics*, *21*(2), 26-30.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2015). Caracterización de una trayectoria de la "mirada profesional" de los estudiantes para maestro sobre la comprensión del proceso de generalización. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 521-528). Alicante: SEIEM.